3. Αφού βρήτε τύπο γιά την $R_{\vec a}, R_{\vec b}$ όπως πιό πάνω, δικαιολογήστε γιατί ο άξονας της $R_{\vec a} R_{\vec b}$ είναι το σύνολο των παραλλήλων του $\vec a \times \vec b$. Βεβαιώστε το αλγεβρικά δείχνοντας ότι καί η $R_{\vec a}$ καί η $R_{\vec b}$ σταθεροποιούν τά παράλληλα του $\vec a \times \vec b$.

(*)
4. Έστω $L_1, L_2, L_3$ τρείς ευθείες στό μιγαδικό επίπεδο πού περιέχουν την αρχή. Έστω $R_j$ οι ανακλάσεις στίς $L_j$, $j=1,2,3$ (Βρήτε τύπο!) Δείξτε ότι η $R_1 R_2 R_3$ είναι ανάκλαση γύρω από μια ευθεία του $\mathbb{C}$.

5. Έστω ότι $R_1, \dots, R_p, S_1, \dots, S_q$ είναι όλες ανακλάσεις επί επιπέδων πού περιέχουν τό $\vec 0$. Δείξτε: $R_1 \cdots R_p = S_1 \cdots S_q \Rightarrow (-1)^p = (-1)^q$!

## 2.2 Τετράνια

Τό 1843 ο Rowan Hamilton εισήγαγε τά τετράνια (quaternions) ως έναν τρόπο νά γενικευθεί η άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών σέ μεγαλύτερες διαστάσεις. Στήν πράξη, τά τετράνια είναι σημεία του $\mathbb{R}^4$. Ας θυμηθούμε ορισμένα βασικά γιά τό Καρτεσιανό γινόμενο συνόλων. Δοθέντων δύο συνόλων A καί B, τό Καρτεσιανό τους γινόμενο είναι τό

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$$

Υπάρχει μια φυσιολογική ταυτοποίηση των χώρων $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ υπό την έννοια ότι τα παρακάτω στοιχεία θεωρούνται τα ίδια

$$(w,x,y,z), \quad ((w,x),(y,z)), \quad (w,(x,y,z))$$

Φορμαλιστικά, κάθε $z = x+iy \in \mathbb{C}$ είναι ένα σημείο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ή μ' αυτό τον τρόπο $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Θεωρούμε τώρα τό $\mathbb{R}^4$ ως τό $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ καί κάθε q του $\mathbb{R}^4$, όπου

$q = (a, x_1, x_2, x_3) = (a, (x_1, x_2, x_3)) = (a, \vec{x})$ θά τό γράφουμε

ὡς $\quad q = a + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

<u>Ὁρισμός 2.2.1</u> Τό σύνολο τῶν τετρανίων $\mathbb{H}$ εἶναι τό σύνολο τῶν ἐκφράσεων $a + bi + cj + dk$ ὅπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ἄν $\quad q = a + x_1 i + x_2 j + x_3 k = (a, x)$ ὀνομάζουμε

$a = \mathrm{Re}\, q$, $\quad x = \mathrm{Im}\, q$ τό πραγματικό κ' τό "φανταστικό" μέρος τοῦ $q$ ἀντίστοιχα.

Ἡ πρόσθεση στά τετράνια ὁρίζεται κατά τόν γνωστό τρόπο:

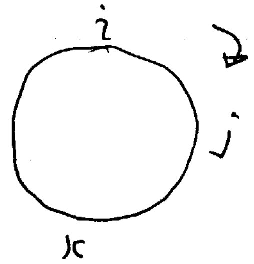
Ἄν $\quad q = a + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad p = b + y_1 i + y_2 j + y_3 k$ τότε

$$q + p = (a+b) + (x_1 + y_1) i + (x_2 + y_2) j + (x_3 + y_3) k.$$

(ὅπως καί στούς μιγαδικούς ἀριθμούς). Ὁ πολλαπλασιασμός ἔχει ἰδιαιτερότητα ὅπως κ' στήν μιγαδική περίπτωση.
Κατ' ἀρχήν, ὁρίζουμε πολλαπλασιασμό γιά τά $i, j, k$ ἀπό τούς ἑξῆς κανόνες:

1) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
2) $ij = k = -ji \quad jk = i = -kj \quad ki = j = -ik$

Γιά τό 2) μνημονικός κανόνας βρίσκεται ἀπό τό παρακάτω σχῆμα



Θά υποθέσουμε επίσης ότι κάθε πραγματικός αριθμός μετατίθεται μέ τά $i,j,k$ δηλ. άν $x\in\mathbb{R}$ $xi=ix$, $xj=jx$, $kx=xk$. Τί γίνεται όμως μέ ένα μιγαδικό αριθμό $z=x+iy$? Άς δούμε ότι

$$zj=(x+iy)j = xj+iyj = xj+ijy = xj+ky$$
$$= xj-jiy = jx-jiy = j(x-iy) = j\bar{z}\ !$$

Έχουμε ήδη υπογραμμίσει ότι ο πολ/μός δέν είναι μεταθετικός, η παρακάτω σχέση όμως είναι αρκετά όμορφη κ' χρήσιμη:

$$zj = j\bar{z} \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

Θά δώσουμε τώρα ένα χρήσιμο θεώρημα πού θά μας δίδει ένα "ωραίο" τύπο γιά τόν πολλαπλασιασμό:

Έστω $p=(a,x)$ $q=(b,y)$ δηλαδή

$$p = a+x_1 i+x_2 j+x_3 k \qquad q = b+y_1 i+y_2 j+y_3 k$$

Είναι
$$p\cdot q = (a+x_1 i+x_2 j+x_3 k)\cdot(b+y_1 i+y_2 j+y_3 k) =$$
$$a(b+y_1 i+y_2 j+y_3 k) + x_1 i(b+y_1 i+y_2 j+y_3 k)$$
$$+ x_2 j(b+y_1 i+y_2 j+y_3 k) + x_3 k(b+y_1 i+y_2 j+y_3 k) =$$

..... (Συμπληρώστε τις πράξεις)

$$= \big(ab-\langle x,y\rangle,\ ay+bx+(x\times y)\big)$$
$$= \big(\mathrm{Re}\,p\,\mathrm{Re}\,q-\langle \mathrm{Im}\,p,\mathrm{Im}\,q\rangle\ \mathrm{Re}\,p\,\mathrm{Im}\,q+\mathrm{Re}\,q\,\mathrm{Im}\,p+\mathrm{Im}\,p\times\mathrm{Im}\,q\big)$$

Έχουμε λοιπόν:

<u>Θεώρημα 2.2.2</u> Ἄν $p, q \in \mathbb{H}$ τότε

$$(2.2.1) \quad p \cdot q = \mathrm{Re}p \cdot \mathrm{Re}q - \langle \mathrm{Im}p, \mathrm{Im}q \rangle + \mathrm{Re}p\, \mathrm{Im}q + \mathrm{Re}q\, \mathrm{Im}p + (\mathrm{Im}p \times \mathrm{Im}q).$$

Τά πλήρως φανταστικά τετράνια $(0, x)$ ἀποτελοῦν τό σύνολο $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$.

Ἄς παρατηρήσουμε ὅτι ἡ (2.2.1) γίνεται γιά τήν περίπτωση τῶν $p, q \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$

$$p \cdot q = -\langle p, q \rangle + p \times q. \qquad (2.2.2)$$

Τό συζυγές ἑνός τετρανίου $q = (a, x) = a + x$ εἶναι τό $\bar{q} = a - x$ κάτι πού εἶναι σέ πλήρη ἀναλογία μέ τούς μιγαδικούς. Αὐτό πού δέν εἶναι σέ ἀναλογία μέ τούς μιγαδικούς εἶναι τό παρακάτω

<u>Θεώρημα 2.2.3</u> $\forall\, p, q \in \mathbb{H} \quad \overline{pq} = \bar{q} \cdot \bar{p}$

Ἀπόδειξη: Ἀπό τήν 2.2.1 καί τόν ὁρισμό τοῦ συζυγοῦς,

$$\begin{aligned}\overline{p \cdot q} &= \mathrm{Re}p \cdot \mathrm{Re}q - \langle \mathrm{Im}p, \mathrm{Im}q \rangle - \mathrm{Re}p\, \mathrm{Im}q - \mathrm{Re}q\, \mathrm{Im}p - (\mathrm{Im}p \times \mathrm{Im}q) \\ &= \mathrm{Re}\bar{q} \cdot \mathrm{Re}\bar{p} - \langle \mathrm{Im}\bar{q}, \mathrm{Im}\bar{p} \rangle + \mathrm{Re}\bar{q}\, \mathrm{Im}\bar{p} + \mathrm{Re}\bar{p}\, \mathrm{Im}\bar{q} + (\mathrm{Im}\bar{q} \times \mathrm{Im}\bar{p}) \\ &= \bar{q} \cdot \bar{p}.\end{aligned}$$

<u>Ἄσκηση</u> Δεῖξτε ὅτι ἄν $q = a + x$ τότε $\|q\|^2 = (a^2 + \|x\|^2) = q \cdot \bar{q}$.

Ἡ νόρμα ἔτσι, ὅπως ὁρίστηκε εἶναι ἡ εὐκλείδεια, δηλαδή ἄν
$q = a + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ τότε

$$\|q\| = \sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$