Ὅλα τὰ παραπάνω συνοψίζονται κατ᾽ἀρχὴν στό

<u>Θεώρημα 2.2.4</u> Τὸ $\mathbb{H}$ μὲ πράξη τὸν πολλαπλασιασμό εἶναι μή-ἀβελιανή ὁμάδα.

Δηλαδή, ἄν θεωρήσομε κ᾽ τὶς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως, τὸ $\mathbb{H}$ εἶναι ἕνα <u>στρεβλὸ σῶμα</u> (skew field), δηλαδή, ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τῆς πρόσθεσης καὶ τοῦ πολ/μοῦ, πλὴν τῆς μεταθετικότητας τοῦ τελευταίου.

<u>Ἀσκήσεις 2.2</u>

1. Ἄν $q\in\mathbb{H}$ ἐκφράστε τὸ $\mathrm{Re}\,q$ καὶ τὸ $\mathrm{Im}\,q$ συναρτήσει τῶν $q,\bar q$.

2. Ἄν $q\in\mathbb{H}$ δεῖξτε ὅτι $q^{-1}=\dfrac{\bar q}{\|q\|^2}$.

3. Ἄν $q\in\mathbb{H}$ τότε $q\in\mathrm{Im}\,\mathbb{H} \Leftrightarrow q^2\in\mathbb{R},\ q^2<0$ (!)

4. Δεῖξτε ὅτι $pq=qp \Longleftrightarrow p\times q=0$. Τί λέει ἡ τελευταία αὐτὴ σχέση γεωμετρικά;

2.3 Ἀνακλάσεις καὶ περιστροφές

Ὁ τύπος (2.1.1) γιὰ τὴν ἀνάκλαση εἶναι ἀρκετὰ ἁπλός, ἀλλὰ ὅπως ἔχομε δεῖ, ἄν θεωρήσομε μία περιστροφὴ ὡς σύνθεση δύο ἀνακλάσεων, ὁ προκύπτων τύπος εἶναι μᾶλλον δύσχρηστος. Τὰ τετράνια θὰ μᾶς δώσουν μία ἐναλλακτικὴ ἀλγεβρικὴ μέθοδο γιὰ νὰ ἐκφράσομε τὶς ἀνακλάσεις κ᾽ τὶς περιστροφές. Τὰ τετράνια εἶναι σημεῖα τοῦ $\mathbb{R}^4$, ἀλλὰ ἐμεῖς θὰ ἐπικεντρωθοῦμε στὸ χῶρο $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ τῶν φανταστικῶν τετρανίων τὸ ὁποῖο καὶ θὰ ταυτοποιήσομε μὲ τὸ $\mathbb{R}^3$.

Ἄς θεωρήσομε τὴν απεικόνιση $\theta:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$ ποὺ δίδεται ἀπὸ τὴν

$$\theta(y)=-qyq^{-1}\quad\text{ὅπου } q\neq 0,\ q\in\mathrm{Im}(\mathbb{H}) \text{ δοθέν.}$$

Προφανώς η θ είναι γραμμική· δηλαδή $\theta(\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2)=\lambda_1\theta(y_1)+\lambda_2\theta(y_2)$ $\forall\, \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$, $y_1,y_2\in\mathbb{H}$. Επίσης προφανώς, $\theta(0)=0$ $\theta(q)=-q$.
Τα προηγούμενα μας κάνουν να υποψιαζόμαστε ότι η θ πιθανώς να συνδέεται με μία ανάκλαση επί επίπεδο κάθετο στο q (το τελευταίο ειδωμένο ως διάνυσμα). Πράγματι, έχομε το

<u>Θεώρημα 2.3.2</u> Η απεικόνιση $\theta:\mathbb{H}\to\mathbb{H}$, $\theta(y)=qyq^{-1}$ $\forall y\in\mathbb{H}$ με $q\in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ δοθέν μη μηδενικό, απεικονίζει το σύνολο $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ στον εαυτό του. Επιπλέον, όταν το $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ ταυτίζεται με το $\mathbb{R}^3$ και το q με το $\vec{q}$, η θ είναι η ανάκλαση επί το επίπεδο $\langle \vec{x},\vec{q}\rangle=0$.
Εάν το q είναι μοναδιαίο, τότε $\theta(y)=qyq$

Απόδειξη. Ας δούμε πρώτα τα σταθερά σημεία της θ, δηλαδή τα $y\in\mathbb{H}$: $\theta(y)=y$. Αμέσως, $-qyq^{-1}=y$ και πολλαπλασιάζοντας από δεξιά με q έχομε $-qy=yq$. Χρησιμοποιούμε τώρα το Θεώρημα 2.2.3: Από την $\mathrm{Re}(-qy)=\mathrm{Re}(yq)$ προκύπτει ότι

$$-\cancelto{0}{\mathrm{Re}\,q}\cdot \mathrm{Re}\,y+\langle q,\mathrm{Im}\,y\rangle=\mathrm{Re}\,y\cdot\cancelto{0}{\mathrm{Re}\,q}-\langle \mathrm{Im}\,y,q\rangle \quad \text{δηλαδή}$$

$$\langle q,\mathrm{Im}\,y\rangle=0.$$

Επιπλέον, από την $\mathrm{Im}(-qy)=\mathrm{Im}(yq)$ προκύπτει ότι

$$\cancelto{0}{\mathrm{Re}(-q)}\,\mathrm{Im}\,y+\mathrm{Re}\,y\cdot q+(-q\times \mathrm{Im}\,y)=$$
$$\mathrm{Re}\,y\cdot q+\mathrm{Im}\,y\cdot\cancelto{0}{\mathrm{Re}\,q}+(\mathrm{Im}\,y\times q) \qquad \text{δηλαδή} \quad \mathrm{Re}\,y\cdot q=0$$

Τότε όμως, $\langle q,y\rangle=\langle q,\mathrm{Re}\,y+\mathrm{Im}\,y\rangle=q\cdot\mathrm{Re}\,y+\langle q,\mathrm{Im}\,y\rangle=0.$

Συμβολίζομε τώρα με Π το επίπεδο $\langle\vec{x},\vec{q}\rangle=0$ του $\mathbb{R}^3$· η θ σταθεροποιεί κάθε σημείο του Π όπως προκύπτει από παραπάνω.
Ας είναι τώρα $\vec{y}\in\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. Τότε, υπάρχει $\vec{p}\in\Pi$ και $\lambda\in\mathbb{R}$:

$\vec{y} = \vec{p} + \lambda\vec{q}$. Ἐπειδή ἡ θ εἶναι γραμμική,

$$\theta(\vec{y}) = \theta(\vec{p}) + \lambda\theta(\vec{q}) = \vec{p} - \lambda\vec{q} \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$$

ἄρα $\theta(\operatorname{Im}(\mathbb{H})) \subseteq \operatorname{Im}(\mathbb{H})$ καί ἐπιπλέον τό $\theta(\vec{y})$ εἶναι ἡ ἀνάκλαση τοῦ $\vec{y}$ στό Π. (Δεῖξτε ὅτι $\operatorname{Im}(\mathbb{H}) \subseteq \theta(\operatorname{Im}(\mathbb{H}))$)

Τέλος, ἄν $\|\vec{q}\| = 1$, τότε ἄς παρατηρήσουμε ὅτι $q^2 = -1$. Πράγματι,

$$\operatorname{Re} q^2 = \operatorname{Re} q \cdot q = (\cancelto{0}{\operatorname{Re} q})^2 - \langle q, q\rangle = -1$$

$$\operatorname{Im} q^2 = \cancelto{0}{\operatorname{Re} q} \cdot q + q \cdot \cancelto{0}{\operatorname{Re} q} + (q \times q) = 0.$$

Ἄρα $q^{-1} = -q$ καί $\theta(y) = q y q$. $\square$

(Σημείωση: $\forall y \in \mathbb{H}$, $y^{-1} = \dfrac{\bar{y}}{\|y\|^2}$. Ὁπότε $\forall q \in \operatorname{Im}(\mathbb{H})$ μοναδιαῖο $q^{-1} = \bar{q} = -q$. Αὐτή εἶναι μία ἁπλούστερη ἀπόδειξη τοῦ παραπάνω)

<u>Παράδειγμα:</u> Ἡ ἀνάκλαση ἐπί τό $\langle \vec{x}, \vec{k}\rangle = 0$ δίδεται ἀπό τήν

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2, -x_3)$$

Μέ ὅρους τετρανίων: $\vec{x} \to \vec{k}\vec{x}\vec{k}$ Ἐπίσης, ἡ ἀπεικόνιση $\vec{x} \to \vec{k}\vec{x}\vec{k}^{-1}$ εἶναι ἡ

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (-x_1, -x_2, x_3)$$

δηλαδή ἡ περιστροφή κατά π γύρω ἀπό τόν $\vec{k}$ ἄξονα.

Θά χρησιμοποιήσουμε τώρα τά τετράνια γιά νά περιγράψουμε τις περιστροφές πού σταθεροποιοῦν τήν ἀρχή. Θεωροῦμε μία περιστροφή R

πού ὁρίζεται ἀπό τήν ἀνάκλαση ἐπί τό ἐπίπεδο μέ μοναδιαῖο κάθετο $\vec{p}$ ἀκολουθούμενη ἀπό τήν ἀνάκλαση μέ μοναδιαῖο κάθετο $\vec{q}$. Σύμφωνα μέ τό Θεώρημα 2.3.2

$$R(\vec{x}) = q\,(p\,\vec{x}\,p)\,q = (qp)\,\vec{x}\,(pq) \qquad (2.3.1)$$

ὅπου $p = (0,\vec{p})$, $q = (0,\vec{q}) \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$. Ἔτσι ἔχουμε

<u>Θεώρημα 2.3.4</u> Ἔστω $r = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{n}$ ὅπου $\vec{n}$ μοναδιαῖο διάνυσμα (Δηλαδή, ἄν $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $r = \cos\theta/_2 + \sin\theta/_2\,(n_1 i + n_2 j + n_3 k)$).

Τότε τό r εἶναι μοναδιαῖο τετράνιο, καί ἡ ἀπεικόνιση $\vec{x} \longmapsto r\vec{x}r^{-1} = r\vec{x}\bar{r}$ εἶναι μία περιστροφή, μέ τήν φορά τῶν δεικτῶν, κατά γωνία θ γύρω ἀπό ἕναν ἄξονα, στήν διεύθυνση τοῦ $\vec{n}$.

Ἀπόδειξη. Διαλέγουμε μοναδιαῖα διανύσματα $\vec{p}$ καί $\vec{q}$ τέτοια ὥστε $\langle\vec{p},\vec{q}\rangle = \cos\theta/_2$ καί $\vec{p}\times\vec{q} = \sin\frac{\theta}{2}\vec{n}$. (Αὐτό μποροῦμε νά τό κάνουμε, παίρνοντας δύο μοναδιαῖα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου $\langle\vec{x},\vec{n}\rangle = 0$ γωνίας $\theta/_2$).
Τότε, ἡ περιστροφή πού περιγράφεται στό Θεώρημα εἶναι ἡ ἀνάκλαση στό $\langle\vec{x},\vec{p}\rangle = 0$ ἀκολουθούμενη ἀπό τήν ἀνάκλαση στό $\langle\vec{x},\vec{q}\rangle = 0$, ἄρα δίδεται ἀπό τήν R τῆς (2.3.1). Λόγω τῆς (2.2.2), $qp = -r$ καί $pq = -\bar{r}$.
Ἄρα, $R(\vec{x}) = (-r)\,\vec{x}\,(-\bar{r}) = r\vec{x}\bar{r}$. Τέλος, ἀφοῦ $\|r\| = 1$, ἔχουμε $\bar{r} = r^{-1}$. □.

Τό Θεώρημα 2.3.4 μᾶς δίδει μία μέθοδο νά βρίσκουμε τήν γεωμετρική περιγραφή τῆς σύνθεσης δύο δοθεισῶν περιστροφῶν. Ἔστω R_r, R_s οἱ περιστροφές πού ἀντιστοιχοῦν στά τετράνια

$$r = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\vec{n}, \quad s = \cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\vec{m}$$

Τότε $R_s \cdot R_r(\vec{x}) = (sr)\,\vec{x}\,(\overline{sr})$ καί ἀφοῦ τό sr εἶναι μοναδιαῖο τετράνιο, θά εἶναι ἀναγκαστικά τῆς μορφῆς $\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\vec{h}$ γιά κάποιο μοναδιαῖο $\vec{h}$ (Ἄσκ 1)

Ἄρα, $R_s R_r = R_{sr}$ καὶ ὑπολογίζοντας τὸ sr ὡς γινόμενο τετρανίων, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸν ἄξονα καὶ τὴν γωνία περιστροφῆς τῆς $R_s R_r$.

Ἀσκήσεις 2.3

1. Ἔστω $r \in \mathbb{H}$ μοναδιαῖο. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $p \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ μοναδιαῖο καὶ $\theta \in [0, 2\pi]$ ὥστε
$$r = \cos\theta + \sin\theta\,\vec{p}.$$

2. Χρησιμοποιεῖστε τὸ Θεώρημα 2.2.2 γιὰ νὰ δείξετε ὅτι ἂν $p, q \in \mathrm{Im}(\mathbb{H})$ καὶ $\vec{p} \perp \vec{q}$, τότε $-qpq^{-1} = p$.

3. Χρησιμοποιεῖστε τετράνια γιὰ νὰ βρεῖτε τὴν εἰκόνα τοῦ $\vec{x}$ κάτω ἀπὸ περιστροφὴ γύρω ἀπὸ τὸν $\vec{z}$-ἄξονα κατὰ γωνία $\pi/6$. Βεβαιῶστε τὸ ἀποτέλεσμά σας μὲ στοιχειώδη γεωμετρία.

4. Ἔστω Π τὸ ἐπίπεδο $\langle \vec{x}, \vec{n} \rangle = 0$, $\vec{n} = (1, -1, 0)$ καὶ R ἡ ἀνάκλαση ἐπὶ τὸ Π. Ἔστω $\vec{x} = (a, b, c)$ καὶ $\vec{y} = R(\vec{x})$. Δεῖξτε ὅτι $(b, a, c) = \vec{y}$ χρησιμοποιώντας <u>καὶ</u> στοιχειώδη γεωμετρία.