

## M229–ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ–ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ι Δ. ΠΛΑΤΗΣ

### 1. ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1. Από τον κανόνα των συνημιτόνων, βρείτε το Πυθαγόρειο Θεώρημα της σφαιρικής γεωμετρίας.
2. Υπολογίστε την περίμετρο σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι  $\pi/2$ .
3. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του εμβαδού σφαιρικού τριγώνου, προσδιορίστε τις τιμές του  $\theta$  για τις οποίες μπορεί να κατασκευαστεί σφαιρικό ισόπλευρο τρίγωνο γωνίας  $\theta$ .

### 2. ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^3$

4. Βρείτε τον τύπο για την ανάκλαση στο επίπεδο  $x_2 = 0$  ακολουθούμενη από την ανάκλαση στο επίπεδο  $x_3 = 0$  και βρείτε τα σταθερά σημεία αυτού του μετασχηματισμού. Τι παριστάνει γεωμετρικά;
5. Υποθέτουμε ότι  $R_1, \dots, R_p, S_1, \dots, S_q$  είναι ανακλάσεις σε επίπεδα που περιέχουν την αρχή. Δείξτε ότι αν  $R_1 \cdots R_p = S_1 \cdots S_q$  τότε  $(-1)^p = (-1)^q$ .

### 3. ΤΕΤΡΑΝΙΑ

7. Έστω  $q \in \mathfrak{S}(\mathbb{H})$ .
  - (1) Δείξτε ότι  $q^{-1} = -\|q\|^{-2} q$ .
  - (2) Δείξτε ότι  $q \in \mathfrak{S}(\mathbb{H})$  αν και μόνο αν  $q^2 \leq 0$ .
8. Έστω  $p, q \in \mathfrak{S}(\mathbb{H})$ .
  - (1) Δείξτε ότι το  $pq = -qp$  αν και μόνο αν  $p \perp q$  (στον  $\mathbb{R}^3$ ).
  - (2) Δείξτε ότι  $pq = qp$  αν και μόνο αν  $p \times q = 0$ .
9. Χρησιμοποιώντας τετράνια, βρείτε την εικόνα του  $\mathbf{x}$  υπό την περιστροφή γύρω από τον  $\mathbf{k}$ -άξονα κατά γωνία  $\pi/6$ .

### 4. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΜÖBIUS

10. Έστω  $f(z) = (3z + 2)/(z + 1)$  και  $g(z) = (z + 4)/(z - 1)$ . Βρείτε  $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  που να αναπαριστούν τους  $f, g$  αντίστοιχα. Βεβαιώστε κατόπιν ότι ο  $AB$  αναπαριστά τον  $f \circ g$ .
11. Χρησιμοποιώντας διπλούς λόγους βρείτε τον  $f \in \mathcal{M}$  ο οποίος μεταθέτει κυκλικά τα  $-1, 0, 1$ . Βεβαιώστε κατόπιν ότι  $f^3 = id$ .
12. Βρείτε τον  $f(C)$  όταν:
  - (1)  $f(z) = 1/z$  και  $C = \{x + iy : x + y = 1\} \cup \{\infty\}$ .
  - (2)  $f(z) = iz/(z - 1)$  και  $C = \{z : |z| = 1\}$ .
13. Βρείτε έναν  $f \in \mathcal{M}$  που απεικονίζει το εξωτερικό του κύκλου  $|z - 1| = 1$  στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = 2$ .
14. Έστω ο  $f \in \mathcal{M}$  με

$$f(z) = \frac{(k-2)z - 2(k-1)}{(k-1)z - (2k-1)}, \quad k \in \mathbb{C}_*.$$

(1) Για τον πίνακα

$$A_f = \begin{pmatrix} k-2 & 2-2k \\ k-1 & 1-2k \end{pmatrix}$$

βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματά του. Τα τελευταία δείξτε ότι δεν εξαρτώνται από το  $k$ .

(2) Βρείτε τα σταθερά σημεία του  $f$ .

(3) Δείξτε ότι ο  $f$  είναι συζυγής με κάποια διαστολή  $z \rightarrow az$  και προσδιορίστε το  $a$ .

15. Έστω  $\phi$  η στερεογραφική προβολή.

(1) Δείξτε ότι οι εικόνες των ευθειών  $y = ax$  και  $x = 0$  είναι οι μεσημβρινοί της μοναδιαίας σφαίρας.

(2) Αν  $\phi$  είναι η στερογραφική προβολή, βρείτε την αντίστροφή της.

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ.

E-μιαλ αδδρεςς: [jplatis@math.uoc.gr](mailto:jplatis@math.uoc.gr)