ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Ολοκληρωση Ι: Εννοιες

1. Έστω I ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{P}$ διαμέρισή του. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμε στο I αν και μόνο αν για κάθε υποορθογώνιο J της $\mathcal{P}$, ο περιορισμός $f_{|J}$ της f στο J είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και

$$\int_I f = \sum_{J\in\mathcal{P}} \int_J f_{|J}.$$

(Υπόδειξη: Την έχουμε κάνει στην τάξη αλλά είναι σημαντική, οπότε ξεσκονίστε τις σημειώσεις σας και ενδεχομένως τον Shurman).

2. Η άσκηση αυτή μας λέει ότι μία φνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη· δείτε ξανά από τον Spivak τον ορισμό της *αιώρησης* ω μιας συνάρτησης. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση και έστω διαμέριση

$$a < z_1 < \cdots < x_n < b.$$

Τότε:

α) ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, x_i) < f(b) - f(a)\cdot$$

β) για κάθε $\epsilon > 0$, το σύνολο $\{x \in [a,b] \mid \omega(f,x) > \epsilon\}$ είναι μηδενικού μέτρου·

γ) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(Υπόδειξη για το β): Αρκεί για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να δείξετε ότι το

$$B_k = \{x \in [a,b] \mid \omega(f,x) > 1/k\}$$

είναι μηδενικού μέτρου. Αν είναι αριθμήσιμο τελειώσαμε. Έστω ότι δεν είναι· τότε έχει ένα σημείο συσσώρευσης x_0 στο $[a,b]$. Πάρτε τώρα ακολουθία του B_k που να συγκλίνει στο x_0 και εκμεταλλευτείτε το α)).

3. Έστω I ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και $A \subset I$ μηδενικού περιεχομένου: για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάλυψη του A από πεπερασμένου πλήθους ορθογώνια J_i, $i = 1, \ldots, n$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}(J_i) < \epsilon.$$

α) Αποδείξτε ότι καί η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι μηδενικού περιεχομένου.

β) Μέ ένα παράδειγμα δείξτε ότι γενικά δεν ισχύει

$$\mathrm{cont}(A) = 0 \implies \mathrm{cont}(\overline{A}) = 0.$$

(Υπόδειξη για το α): η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi(A)$ του A είναι ολοκληρώσιμη στο I. Αυτό μπορείτε να το δείξετε συμπληρώνοντας για κάθε $\epsilon > 0$ τα J_i σε μία διαμέριση του I. Έπεται ότι το ολοκλήρωμά της είναι 0, συνεπώς από τό Θεώρημα του Lebesgue το ∂A είναι μηδενικού μέτρου. Επειδή και το A είναι μηδενικού μέτρου (γιατί;), έχουμε ότι το $\overline{A}$ είναι μηδενικού μέτρου. Αλλά τό A είναι συμπαγές, άρα...)

4. Έστω $A \subset I$ όπως στην Άσκηση 3. Αν Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, τότε δείξτε ότι είναι και ολοκληρώσιμη και

$$\int_A f = 0.$$

Βρείτε ένα παράδειγμα ότι αυτό το αοτέλεσμα δεν ισχύει γενικά αν υποθέσουμε απλώς ότι το A είναι μηδενικού μέτρου.

5. Έστω I κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε το γράφημα της f,

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) \in I \times \mathbb{R}\},$$

είναι σύνολο μηδενικού μέτρου.

(Υπόδειξη: έχουμε κάνει κάτι παραπλήσιο στην τάξη. Εδώ μπορείτε να δείξετε ότι το $\mathrm{Gr}(f)$ είναι μηδενικού περιεχομένου, εκμεταλλευόμενοι την συμπάγεια του I. Κάνετα σχήμα!)