ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Ολοκληρωση II: Fubini

1. Έστω I κλειστό ορθογώνιο και $f : I \to \mathbb{R}$, μη αρνητική, ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τό χωρίο κάτω από το γράφημα της f είναι το

$$D_f = \{(x, y) \mid x \in I,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Δείξτε ότι το σύνορό του ∂D_f είναι μηδενικού μέτρου και ότι ο όγκος του είναι το

$$\int_I f(x)dx.$$

(Υπόδειξη: μπορείτε στην αρχή να εργαστείτε στην μία μεταβλητή, όπου το ∂D_f έχει τέσσερα κομμάτια: α) τα κατακόρυφα ευθύγραμμα τμήματα $x = a$, $0 \le y \le f(x)$ και $x = b$, $0 \le y \le f(x)$, το ίδιο το $[a, b]$ και το γράφημα $\mathrm{Gr}(f)$. Τα τρία πρώτα είναι μηδενικού 2-μέτρου. Για το τρίτο, εφόσον η f είναι ολοκληρώσιμη, τό μέτρο του συνόλου των ασυνεχειών της είναι 0. κατά συνέπεια, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi(D_f)$ είναι ολοκληρώσιμη σε ενα ορυογώνιο $J = [a, b] \times [c, d]$ που περιέχει το D_f. Είναι

$$\int_J \chi(D_f) = \iint_{D_f} dxdy,$$

και εφαρμόζουμε τον Fubini.

2. Έστω $I = [a, b] \times [a, b]$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε:

$$\int_a^b \left(\int_a^y f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_x^b f(x, y)dy \right) dx.$$

(Υπόδειξη: Χωρίστε το τετράγωνο σε κατάλληλα χωρία. Βάλτε τη φαντασία σας να δουλέψει!).

3. Έστω $I = [a, b] \times [c, d]$ και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ορίζουμε την

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(s, t)dsdt, \quad (x, y) \in (a, b) \times (c, d).$$

Δείξτε ότι

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_c^y f(x, t)dt, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_a^x f(s, y)ds.$$

(Υπόδειξη για την αριστερή ισότητα, ομοίως για την δεξιά: Για h μικρό δείξτε ότι

$$\left| \frac{F(x + h, y) - F(x, y)}{h} - \int_c^y f(x, t)dt \right| \cdots \le \frac{\int_x^{x+h} \left(\int_c^y |f(s, t) - f(x, t)|dt \right) ds}{|h|}.$$

Χρησιμοποιήστε τώρα την (ομοόμορφη) συνέχεια της f).

4. Δείξτε την εξής παραλλαγή του κανόνα του Leibniz για την παραγώγιση υπό το σύμβολο της ολοκληρώσεως: Αν η $f(x,y)$ είναι $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, δείξτε πρώτα ότι

$$\int_0^x \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dydt = \int_a^b \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(t,y)dydt,$$

ολοκληρώνοντας την $\frac{\partial f}{\partial x}$ στο χωρίο

$$D = \{(t,y) \mid 0 \leq t \leq x,\ a \leq y \leq b\},$$

και εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Fubini και κατόπιν το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.