ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. Ολοκληρωση III: Αλλαγη Μεταβλητης

1. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείει το υποκυκλοειδές

$$D = ((x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^{2/3}+y^{2/3}\le R^{2/3},\ R>0\}.$$

(Υπόδειξη: βρείτε την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών. Το εμβαδόν είναι $3\pi R^2/8$).

2(∗). Βρείτε τον όγκο της μοναδιαίας κλειστής μπάλλας

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le 1.$$

(Υπόδειξη: Εάν ένα δισδιάστατο επίπεδο περνά από το κεντρο της 4–μπάλλας, έστω r η απόσταση μεταξύ ενός σημείου του επιπέδου και του κέντρου της μπάλλας και θ το αζιμούθιο-δείτε εδώ:
https://el.wikipedia.org/wiki/Αζιμούθιο

Τέμνοντας την 4–μπάλλα με τα 2-διάστατα επίπεδα που ορίζονται σταθεροποιώντας μια ακτίνα και ένα αζιμούθιο, δίνει μία 2–μπάλλα (δίσκο) ακτίνας $\sqrt{1-r^2}$. Συνεπώς ο όγκος της μπάλλας μπορεί να γραφεί ως επαναληπτικό ολοκλήρωμα των εμβαδών των δίσκων υπεράνω όλων των δυνατών r και θ:

$$\mathrm{Vol}_4=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \mathrm{Area}_2(\sqrt{1-r^2})\,r\,dr\,d\theta,$$

όπου βεβαίως $\mathrm{Area}_2(\sqrt{1-r^2})=\pi(1-r^2)$. Ολοκληρώστε την άσκηση, σψμπληρώνοντας και τις λεπτομέρειες που παρέλειψα. Παρατηρήστε ότι γνωρίζοντας τον όγκο της 4–μπάλλας μπορούμε κατά τον ίδιο τρόπο να βρούμε τον όγκο της 6–μπάλλας κ.λπ.)

3. Έστω I^n ο μοναδιαίος κύβος $[0,1]^n$ του $\mathbb{R}^n$ και S^n το τυπικό μονόπλοκο (standard simplex) του $\mathbb{R}^n$:

$$S^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i\le 1,\ x_i\ge 0\}$$

Ορίζουμε τον μεταχηματισμό $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ από την σχέση

$$(u_1,\dots,u_n)\mapsto\left(u_1,(1-u_1)u_2,\dots,\left(\prod_{i=1}^{n-1}(1-u_{n-1})\right)u_n\right).$$

(1) Με επαγωγή, δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1-\prod_{i=1}^n(1-u_n).$$

(2) Δείξτε ότι ο T απεικονίζει το I^n επί του S^n, είναι 1–1 και ο αντίστροφος T^{-1} ορίζεται στο εσωτερικό του S^n από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} u_1 &= x_1, \\ u_2 &= \frac{x_2}{1-x_1}, \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{x_n}{1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i}. \end{aligned}$$

(3) Δείξτε τίς σχέσεις

$$\begin{aligned} \det(DT)(u) &= \prod_{i=1}^{n-1}(1-u_i)^{n-i}, \\ \det(DT^{-1})(x) &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1}(1-\sum_{k=1}^{i} x_k)}. \end{aligned}$$

(4) Δείξτε τέλος ότι

$$\mathrm{Vol}(S^n) = \frac{1}{n!}.$$

(Υπόδειξη: Δοκιμάστε πρώτα τις εύκολες περιπτώσεις $n = 2, 3$).

4. Ένας δίσκος ακτίνας $r > 0$ του $\mathbb{R}^3$ έχει κέντρο $(R, 0, 0)$, $R > r$, και κείται ολόκληρος στο επίπεδο xz. Περιστρέφουμε τον δίσκο κατά μήκος του κύκλου μέ κέντο την αρχή και ακτίνα R που κείται στο επίπεδο yz. Το παραγόμενο γεωμετρικό αντικείμενο που μοιάζει με σαμπρέλλα, καλείται τόρος ή σπείρα. (Κάνετε σχήμα!)

Για να βρούμε έναν καλό μετασχηματισμό που θα μας δώσει τον όγκο της σπείρας, σκεφτόμαστε ως εξής. Ένα σημείο του αρχικου δίσκου έχει συντεταγμένες

$$x = R + t\cos u, \quad z = t\sin u, \quad t \in [0, r], \quad u \in [0, 2\pi].$$

Περιστρέφοντας κατά μήκος του κύκλου ακτίνας R *αυτό* το σημείο, παίρνουμε τον μετασχηματισμό

$$x = (R + t\cos u)\cos v, \quad y = (R + t\cos u)\sin v, \quad z = t\sin u, \quad v \in [0, 2\pi].$$

Εφαρμόστε τώρα το Θεώρημα Αλλαγήω Μεταβλητών και βρείτε τον όγκο του τόρου.