ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2015–16

ΜΕΜ 216 ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ
ΔΩΡΟ ΧΡΙΣΤΟΥΓΕΝΝΩΝ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

k-ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

Έστω ο $\mathbb{R}^n$ με συντεταγμένες $x_1, \dots, x_n$ και $k < n$. Ένα υποσύνολο M λέγεται *k-υποπολλαπλότητα* του $\mathbb{R}^n$ αν υπάρχει συλλογή διαφορίσιμων ομοιομορφισμών $\sigma_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, $i \in I$, I αριθμήσιμο, όπου U_i ανοικτά του $\mathbb{R}^k$ τέτοια ώστε

(1)
$$\cup_{i\in I}(\sigma(U_i)) = M.$$

(2) Αν
$$\sigma_i(\mathbf{u}) = \sigma_i(u_1, \dots, u_k) = \mathbf{x}(\mathbf{u}) = (x_1(\mathbf{u}), \dots, x_n(\mathbf{u}))$$
και
$$D\sigma_i(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \end{pmatrix}_{\mathbf{u}},$$
τότε
$$\operatorname{rank}(D\sigma(\mathbf{u}_0)) = k,$$
για κάθε $\mathbf{u}_0 \in U_i$ και για κάθε $i \in I$.

Κάθε ζεύγος (U_i, σ_i) λέγεται χάρτης της M και η συλλογή $\{(U_i, \sigma_i),\ i \in I\}$ λέγεται άτλας της M.

1.

(1) Χρησιμοποιώντας την $\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, με
$$\iota(u_1, \dots . u_k) = (u_1, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$$
δείξτε ότι ο $\mathbb{R}^k$ είναι μια k-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$. Ποιος είναι ο άτλας;

(2) Έστω οι $n-k$ διαφορίσιμες συναρτήσεις Φ_i, $i = 1, \dots, n-k$ του $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ και το σύστημα
$$\begin{aligned} \Phi_1(u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= 0, \\ \vdots &= \vdots \\ \Phi_{n-k}(u_1, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$
Υποθέτοντας ότι σε κάθε σημείο $(\mathbf{u}_0\mathbf{x}_0)$ που ικανοποιεί το σύστημα ισχύει
$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_{n-k}}{\partial x_{k+1}} & \cdots & \frac{\partial \Phi_{n-k}}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(\mathbf{u}_0\mathbf{x}_0)} \neq 0,$$

αποδείξτε ότι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα είναι μία k-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, για κάθε σημείο p αυτής της υποπολλαπλότητας υπάρχει περιχή του $(u_1, \dots, u_k, x'_{k+1}, \dots, x'_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ όπου

$$x'_{k+1}(p) = \cdots = x'_n(p) = 0.$$

2. Έστω (U, σ) χάρτης της υποπολλαπλότητας M καί $\mathbf{u}_0 \in U$ τέτοιο ώστε $\sigma(\mathbf{u}_0) = p_0 \in M$. Άν

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_{\mathbf{u}_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)_{\mathbf{u}_0}$$

είναι η κανονική βάση του $T_{\mathbf{u}_0}(U)$ και

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{p_0}, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_{p_0},$$

είναι η κανονική βάση του $T_{p_0}(\mathbb{R}^n)$, δείξτε ότι για κάθε $j = 1, \dots, k$ είναι

$$\sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_{\mathbf{u}_0} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial u_j}(\mathbf{u}_0)\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_{p_0}$$

όπου $\sigma_{*,\mathbf{u}_0}$ είναι η εφαπτόμενη γραμμική απεικόνιση της σ στο $\mathbf{u}_0$. Τα διανύσματα

$$\sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_{\mathbf{u}_0}, \quad j = 1, \dots, k$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;) και λέμε ότι αποτελούν τον εφαπτόμενο χώρο της M στο $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε:

$$\mathrm{T}_p(M) = \left\langle \sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_{\mathbf{u}_0}, \dots, \sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)_{\mathbf{u}_0} \right\rangle.$$

3. Για κάθε $p \in M$ ορίζουμε ένα εσωτερικό γινόμενο στον $\mathrm{T}_p(M)$ από το σύνηθες Ευκλείδειο γινόμενο του $\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$:

$$g_{ij}(p) = \sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_{\mathbf{u}_0} \cdot \sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_{\mathbf{u}_0}.$$

Δείξτε χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση ότι

$$g_{ij}(p) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial x_l}{\partial u_j}(\mathbf{u}_0) \cdot \frac{\partial x_l}{\partial u_j}(\mathbf{u}_0),$$

και συμπεράνατε ότι το εσωτερικό γινόμενο αυτό είναι θετικά ορισμένο. Αν

$$(du_1)_{\mathbf{u}_0}, \dots, (du_k)_{\mathbf{u}_0},$$

είναι βάση του $\mathrm{T}^*_{\mathbf{u}_0}(U)$ τότε γράφουμε

$$G_{p_0} = g_{ij}(p)(du_i)_{\mathbf{u}_0} \otimes (du_j)_{\mathbf{u}_0}$$

και ο G_{p_0} είναι ο τανυστής Riemann της M στο p_0.

5. Έστω M μια k-υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$ και $p \in M$. Ονομάζουμε κάθετο χώρο $\mathrm{N}_p(M)$ της M τον $n-k$-διάστατο υπόχωρο εκε΄νο του $\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ που είναι τέτοιος ώστε

$$\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n) = \mathrm{T}_p(M) \oplus \mathrm{N}_p(M).$$

Δείξτε ότι όταν $k = n-1$ ο κάθετος χώρος παράγεται από τό διάνυσμα

$$n_p = \sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_{\mathbf{u}_0} \times \cdots \times \sigma_{*,\mathbf{u}_0}\left(\frac{\partial}{\partial u_k}\right)_{\mathbf{u}_0},$$

όπου $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ χάρτης της M τέτοιος ώστε $\sigma(\mathbf{u}_0) = p$ για κάποιο $\mathbf{u}_o \in U$. (Υπόδειξη: ο ορισμός του εξωτερικού γινομέμου $n-1$ διανυσμάτων X_i του $\mathrm{T}_p(\mathbb{R}^n)$ μπορεί να δοθεί ως εξής: Αν

$$X_i(p) = \sum_{j=1}^{n} X_i^j(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p,$$

τότε

$$X_1 \times \cdots \times X_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p & \dots & \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p \\ X_1^1(p) & \dots & X_1^n(p) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_{n-1}^1(p) & \dots & X_{n-1}^n(p) \end{pmatrix}.$$

Η παραπάνω ορίζουσα είναι σχηματική· συγκρίνατε με το γνωστό σας από τον Απειροστικό Λογισμό ΙΙ εξωτερικο γινόμενο δύο διανυσμάτων του $\mathbb{R}^3$.)

6. Ο όγκος τμήματος της M μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τανυστή Riemann ως εξής: έστω $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ χάρτης και τμήμα W της M που είναι η σ-εικόνα κάποιου κλειστού $D \subset U$. Θεωρούμε την κανονική μορφή όγκου

$$\omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

στο W. Δείξτε ότι η μορφή $\omega_\sigma = \sigma^*\omega$ δίνεται από την

$$\omega_\sigma = \det G \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k$$

όπου G ο τανυστής Riemann. Είναι λοιπόν λογικό να ορίσουμε

$$\mathrm{Vol}(W) = \int_D \det G \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_k.$$

7. Εφαρμόστε όλα τα παραπάνω αποτελέσματα για τον χάρτη $\sigma : U \to \mathbb{R}^4$, $U = (0, 2\pi)^2 \times (0, \pi)$,

$$\sigma(u_1, u_2, u_3) = (\cos u_1 \cos u_2 \cos u_3, \cos u_1 \cos u_2 \sin u_3, \cos u_1 \sin u_2, \sin u_1)$$

της μοναδιαίας σφαίρας

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$$

του $\mathbb{R}^4$.