ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινο ΕΞΑΜΗΝΟ 2019–20

ΜΕΜ233-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΤΟ ΙΣΟΜΕΤΡΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Υπενθυμίζουμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^n$ είναι η

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_2^n}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n).$$

Το εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ δίνεται για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ από την

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

1. Η ομαδα $\mathrm{O}(n)$

Το σύνολο των ορθογωνίων $n \times n$ πινάκων $\mathrm{O}(n)$ αποτελείται από τετραγωνικούς $n \times n$ πίνακες A με πραγματικούς συντελεστές που ικανοποιούν τη σχέση

$$AA^T = A^T A = I,$$

όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Δηλαδή, ένας ορθογώνιος πίνακας έχει αντίστροφο τον ανάστροφό του. Από τις ιδιότητες των οριζουσών συμπεραίνουμε αμέσως ότι

$$\det(A) = \pm 1, \quad \text{για κάθε } A \in \mathrm{O}(n).$$

Δείξαμε στην τάξη ότι η $\mathrm{O}(n)$ είναι ομάδα με πράξη των πολλαπλασιασμό πινάκων. Η παρακάτω πρόταση περιγράφει ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες[1] της $\mathrm{O}(n)$:

Πρόταση 1.1. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) $A \in \mathrm{O}(n)$.
(2) $A\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ *για κάθε* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
(3) $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$, *για κάθε* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
(4) Ο A *απεικονίζει ορθομοναδιαίες βάσεις σε ορθομοναδιαίες βάσεις.*

1.1. **Η ομάδα** $\mathrm{O}(2)$**.** Για $n = 2$ η ορθογώνια ομάδα έχει μία πολύ καλή περιγραφή. Κατ' αρχάς έχουμε την υποομάδα της[2] που αποτελείται από τους ορθογώνιους πίνακες ορίζουσας 1. Αυτή συμβολίζεται με $\mathrm{SO}(2)$ και κάθε πίνακας αυτής έχει τη μορφή:

$$A = A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

[1] Ψάξτε τις αποδείξεις στα εγχειρίδεια Γραμμικής Άλγεβρας (ή κάνετέ τις μόνοι σας!)
[2] Αποδείξτε ότι η $\mathrm{SO}(n)$ είναι υποομάδα της $\mathrm{O}(n)$!

Κάθε τέτοιος πίνακας παριστάνει περιστροφή κατά ϕ γύρω από την αρχή στο $\mathbb{R}^2$ αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Αυτό μπορείτε να το δείτε γράφοντας την αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση:

$$A(x_1, x_2) = (\cos\phi\, x_1 - \sin\phi\, x_2,\ \sin\phi\, x_1 + \cos\phi\, x_2).$$

Παρατηρήστε ότι η $\mathrm{O}(2)$ είναι αβελιανή ομάδα: αν $A_\phi, A_\psi \in \mathrm{O}(2)$, τότε:

$$A_\phi A_\psi = A_{\phi+\psi} = A_{\psi+\phi} = A_\psi A_\phi.$$

Για την ακρίβεια, η $\mathrm{SO}(n)$ είναι αβελιανή μόνο για $n = 2$.

Όλα τα άλλα στοιχεία της $\mathrm{O}(2)$ έχουν ορίζουσα -1 και *δεν* αποτελούν ομάδα. (Γιατί;). Τα στοιχεία αυτά καλούνται ανακλάσεις και οι αντίστοιχοι πίνακες είναι της μορφής

$$R = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Για $n > 2$ αποδεικνύεται ότι τα στοιχεία της $\mathrm{O}(n)$ ειναι της μορφής QAQ^{-1} όπου Q ορθογώνιος και

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_r & & \\ & & & I_s & \\ & & & & -I_r \end{pmatrix}, \quad A_k \in \mathrm{SO}(2),\ k = 1, \ldots, r,$$

όπου όλες οι θέσεις του πίνακα που δεν καθορίζονται είναι μηδενικές και I_m είναι ο μοναδιαίος $m \times m$ πίνακας. Η σημασία του παραπάνω είναι η εξής: κάθε στοιχείο της $\mathrm{O}(n)$ αναλύεται σε σύνθεση περιστροφών και ανακλάσεων σε δισδιάστατους υποχώρους του $\mathbb{R}^n$.

2. Το ισομετρικο θεωρημα

Συμβολίζουμε με $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο που περιέχει απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ της μορφής

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $A \in \mathrm{O}(n)$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια το σύνολο $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ αποτελείται από συνθέσεις *μεταφορών*,

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{b},$$

και *περιστροφών/ανακλάσεων*

$$R(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \quad A \in \mathrm{O}(n).$$

Δείξαμε στην τάξη ότι το $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ είναι ομάδα. Δείξαμε επίσης ότι τα στοιχεία του είναι *ισομετρίες* του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, κάθε $f \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Θεώρημα 1. *Η ομάδα* $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ *περιέχει όλες τις ισομετρίες του* $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Εάν f είναι μια οποιαδήποτε ισομετρία, τότε θέτουμε $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ και αρκεί να δείξουμε ότι $g(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ για κάποιο $A \in \mathrm{O}(n)$: παρατηρήστε ότι η g είναι επίσης ισομετρία που διατηρεί την αρχή. Τώρα, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}$,

$$\|g(\mathbf{x})\| = \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|, \quad \|g(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{y}\|.$$

Δηλαδή, η g διατηρεί την Ευκλείδεια νόρμα. Επίσης, έχουμε τις σχέσεις

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y},$$
$$\|g(\mathbf{x})-g(\mathbf{y})\|^2 = \|g(\mathbf{x})\|^2 + \|g(\mathbf{y})\|^2 - 2g(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}),$$

που προκύπτουν από τις ιδιότητες του βαθμωτού γινομένου. Αφού η g είναι ισομετρία, καταλήγουμε απ΄ όλα τα παραπάνω ότι

$$g(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y},$$

δηλαδή, η g διατηρεί το βαθμωτό γινόμενο. Έστω $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ η τυπική ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε, αφού η g διατηρεί την Ευκλείδεια νόρμα και το βαθμωτό εσωτερικό γινόμενο, προκύπτει αμέσως ότι και η $\{g(\mathbf{e}_1),\ldots,g(\mathbf{e}_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε τώρα για τυχόν $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \quad g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(g(\mathbf{x})\cdot g(\mathbf{e}_i))g(\mathbf{e}_i).$$

Όμως, εφ΄ όσον η g διατηρεί το βαθμωτό γινόμενο,

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i)g(\mathbf{e}_i),$$

δηλαδή, η g είναι γραμμική απεικόνιση με πίνακα που έχει στήλες τα ορθομοναδιαία $g(\mathbf{e}_1),\ldots,g(\mathbf{e}_n)$. Άρα, $g \in \mathrm{O}(n)$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$