ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

ΤΟ ΛΗΜΜΑ ΤΟΥ POINCARÉ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Γ.ΠΛΑΤΗΣ

Ξεκινάμε με έναν ορισμό:

Ορισμός. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $p_0 \in A$. Λέμε ότι το A είναι *συσταλτό* (contractible) ως προς το p_0 αν υπάρχει μια C^∞ απεικόνιση

$$\begin{aligned} H : M = A \times \mathbb{R} &\to A \\ (p,t) &\to H(p,t) \end{aligned}$$

τέτοια ώστε $H(p,0) = p_0$ και $H(p,1) = p$ για κάθε p στο A.

Για παράδειγμα, αν $A = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ είναι ο μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$, τότε το A είναι συσταλτό ως προς το $(0,0)$: Η απεικόνιση H δίνεται από την σχέση

$$H(x,y,t) = (tx, ty).$$

Πρακτικά, ένα σύνολο είναι συσταλτό ως προς σημείο του P_0 αν μπορούμε να το συρρικνώσουμε στο p_0 με C^∞ τρόπο. Ένα αστρόσχημο σύνολο ως προς σημείο του p_0 είναι και συσταλτό ως προς το ίδιο σημείο: Αν p_0 είναι το σημείο ως προς το οποίο το A είναι αστρόσχημο τότε η απεικόνιση H δίνεται από την σχέση

$$H(p,t) = p_0 + tp, p \in A.$$

Πράγματι η H είναι καλώς ορισμένη, αφού για κάθε $t \in [0,1]$ και p σταθερό, η εικόνα της H είναι το ευθύγραμμο τμήμα $[p_0, p]$ που λόγω του αστρόσχημου, βρίσκεται όλο εντός του A.

Το αντίθετο όμως δεν συμβαίνει: ενδέχεται να υπάρχει ένα συσταλτό σύνολο ως προς σημείο του το οποίο να μην είναι αστρόσχημο ως προς αυτό το σημείο. Φανταστείτε για παράδειγμα ένα μη κυρτό σύνολο με πάρα πολύ καλό σύνορο. Τότε υπάρχει σημείο του ως προς το οποίο είναι συσταλτό αλλά όχι αστρόσχημο. (Κάντε ένα σχήμα!)

Η έννοια της συσταλτότητας είναι λοιπόν πιο ισχυρή και το Λήμμα του Poincaré μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Λήμμα του Poincaré. *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο συσταλτό ως προς σημείο του p_0, τότε κάθε $k-$ κλειστή μορφή του είναι ακριβής.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο προτάσεις:

Πρόταση 1. *Αν* $\varpi \in \Omega^k(M)$ *όπου* $M = A \times \mathbb{R}$, *τότε υπάρχει* $\omega_1 \in \Omega^k(M)$ *και* $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ *τέτοιες ώστε*
$$\varpi = \omega_1 + dt \wedge \eta.$$

Απόδειξη. Έστω $(x_1, ..., x_n, t)$ οι συντεταγμένες του M, $(x_1, ..., x_n) \in A$. Τότε αν $\varpi \in \Omega^k(M)$,
$$\varpi = \sum_{i_1 < ... < i_k} \varpi_{i_1 ... i_k} dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$$
και τα $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ παίρνουν τιμές από τα $x_1, ..., x_n, t$. Η ϖ λοιπόν γράφεται ως το άθροισμα δύο μορφών: Η μία είναι η ω_1 που δεν περιέχι τον όρο dt και η άλλη είναι τέτοια ώστε να περιέχει το dt σε κάθε αθροιστικό της όρο. Έτσι το dt βγαίνει κοινός παράγοντας από την δεύτερη μορφή και η απόδειξη τελειώνει.

Για παράδειγμα, ας είναι $A = \mathbb{R}^2$ και $M = \mathbb{R}^3$. Αν (x, y, t) οι συντεταγμένες, τότε κάθε $1-$ μορφή γράφεται
$$\varpi = P(x,y,t)dx + Q(x,y,t)dy + R(x,y,t)dt =$$

$$[P(x,y,t)dx + Q(x,y,t)dy] + dt \wedge R(x,y,t).$$
Εδώ $\omega_1 = P(x,y,t)dx + Q(x,y,t)dy \in \Omega^1(M)$, $\eta = R(x,y,t) \in \Omega^0(M)$. Επίσης, κάθε $2-$μορφή γράφεται
$$\varpi = P(x,y,t)dx \wedge dy + Q(x,y,t)dx \wedge dt + R(x,y,t)dy \wedge dt =$$

$$P(x,y,t)dx \wedge dy + dt \wedge [-Q(x,y,t)dx - R(x,y,t)dy]$$
και ούτω καθ' εξής.

Μας ενδιαφέρει τώρα το παρακάτω θέμα. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την απεικόνιση
$$i_t : A \to M$$
$$i_t(p) = (p, t)$$
Τούτη η απεικόνιση παριστάνει την φυσιολογική ένθεση του A στο $t-$επίπεδο του $M = A \times \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν $A = [a, b]$, τότε το M είναι η άπειρη λωρίδα $M = \{(x, y) : a \leq x \leq b\}$ και $i_t(A) = \{(x, y) : a \leq x \leq b, y = t\}$ (κάντε σχήμα!).

Προτού προχωρήσουμε παρακάτω, είναι σκόπιμο να μελετήσουμε τις απεικονίσεις $(i_t)_*$ και $(i_t)^*$. Έστω προς τούτο p σημείο του A και $\{(e_1)_p, ..., (e_n)_p\}$ η κανονική βάση του $T_p(A)$. Τότε αν $(e)_t$ είναι η κανονική βάση του $T_t(\mathbb{R})$, το σύνολο $\{(e_1)_{(p,t)}, ..., (e_n)_{(p,t)}, (e)_{(p,t)}\}$ είναι η κανονική βάση του $T_{(p,t)}(M)$. Τώρα, για κάθε $i = 1, ..., n$,
$$((i_t)_*(e_i)_p)_{(p,t)} = (D(i_t)(p)(e_i))_{(p,t)} = (e_i)_{(p,t)}$$
αφού
$$D(i_t)(p) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & ... & ... & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(p)} .$$

Κατά συνέπεια αν

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_n)(e_i)$$

είναι ένα διανυσματικό πεδίο του A τότε

$$(i_t)_* X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_n)(e_i)$$

είναι ένα διανυσματικό πεδίο του M που έχει 0 στην $t-$συντεταγμένη, με άλλα λόγια είναι πεδίο του $t-$επιπέδου του M. Από την άλλη,

$$((i_t)^*(dx_i))_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (i_t)_i}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p = (dx_i)_{(p,t)}$$

για κάθε $i = 1, ..., n$ ενώ

$$((i_t)^*(dt))_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (i_t)_{n+1}}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial t}{\partial x_j}(p)(dx_j)_p = 0.$$

Άρα, αν

$$\varpi = \sum_{i_1 < ... < i_k} \varpi_{i_1 ... i_k}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} \in \Omega^k(M)$$

με τα $x_{i_1}, ..., x_{i_k}$ να παίρνουν τιμές από τα $x_1, ..., x_n, t$, τότε η $i_t^* \varpi$ θα έχει την ίδια μορφή μόνο που δεν θα υπάρχει πουθενά όρος dt και στις συντεταγμένες συναρτήσεις, η μεταβλητή t θα είναι σταθερή.

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα που δώσαμε προηγουμένως, ας θεωρήσουμε την

$$i_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,$$

$i_0(x, y) = (x, y, 0)$. Αν

$$\varpi = P(x, y, t)dx + Q(x, y, t)dy + R(x, y, t)dt,$$

τότε

$$(i_0)^* \varpi = (i_0)^*(P(x, y, t))dx + (i_0)^*(Q(x, y, t))dy =$$

$$P(x, y, 0)dx + Q(x, y, 0)dy$$

και όμοίως, αν

$$\varpi = P(x, y, t)dx \wedge dy + Q(x, y, t)dx \wedge dt + R(x, y, t)dy \wedge dt$$

τότε

$$(i_0)^* \varpi = P(x, y, 0)dx \wedge dy.$$

Ορίζουμε τώρα μια απεικόνιση $I : \Omega^k(M) \to \Omega^{k-1}(A)$ ως εξής: αν $\varpi \in \Omega^k(M)$, τότε για κάθε $p \in A$ και $(v_i)_p \in T_p(M)$, $i = 1, ..., k$

$$(I\varpi)_p((v_1)_p, ..., (v_k)_p) = \int_0^1 \eta_{(p,t)}((i_t)_*(v_1)_p)_{(p,t)}, ..., (i_t)_*(v_k)_p)_{(p,t)} dt$$

όπου βεβαίως η είναι η $k-1$ μορφή της πρότασης 1.

Πρόταση 2.

$$(i_1)^*\varpi - (i_0)^*\varpi = d(I\varpi) + I(d\varpi).$$

Απόδειξη. Λόγω της (προφανούς) γραμμικότητας του I, αρκεί να περιοριστούμε σε δύο περιπτώσεις:

α) $\varpi = f dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k}$. Τότε

$$d\varpi = \frac{\partial f}{\partial t} dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} + \theta$$

όπου θ είναι μια μορφή που δεν έχει πουθενά τον όρο dt. Κατά συνέπεια $I\varpi = 0$ λόγω του ορισμού του I και της πρότασης 1 και επιπλέον στην ολοκλήρωση $I(d\varpi)$ μετράει μόνο η αριστερή μορφή. Έτσι

$$(I(d\varpi))_p = \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t} dt\right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} =$$

$$(f(p,1) - f(p,0)) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_k} = ((i_1)^*\varpi)_p - ((i_0)^*\varpi)_p.$$

β)

$$\varpi = f dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Τότε $(i_1)^*\varpi = (i_0)^*\varpi = 0$ και από την άλλη,

$$d\varpi = \sum_{a=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_a} dx_a \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}.$$

Συνεπώς,

$$(Id\varpi)_p = -\sum_{a=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_a} dt\right) dx_a \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}$$

και

$$(d(I\varpi))_p = d\left\{\left(\int_0^1 f dt\right) dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}\right\} =$$

$$\sum_{a=1}^{n} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_a} dt\right) dx_a \wedge dt \wedge dx_{i_1} \wedge ... \wedge dx_{i_{k-1}}$$

και η απόδειξη της πρότασης 2 είναι πλήρης.

Απόδειξη του λήμματος του Poincaré. Αφού το A είναι συσταλτό,

$$H \circ i_1 = id$$
$$H \circ i_0 = const. = p_0 \in A.$$

Συνεπώς

$$\omega = (H \circ i_1)^*\omega = (i_1)^*(H^*\omega) = (i_1)^*\varpi$$
$$0 = (H \circ i_0)^*\omega = (i_0)^*(H^*\omega) = (i_0)^*\varpi$$

Τώρα, αν $d\omega = 0$, παίρνουμε $d\varpi = H^*(d\omega) = 0$ και από την πρόταση 2,

$$\omega = (i_1)^*\omega = d(I\varpi).$$

Η τελευταία σχέση ολοκληρώνει την απόδειξη.