

ΧΗΜ011 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 1
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ
14/01/2016

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. **(2)** Τι διαστάσεις (ακτίνα βάσης r και ύψος h) πρέπει να έχει ένα κυλινδρικό δοχείο ελαιολάδου χωρητικότητας 1 λίτρου ώστε να καταναλωθεί το ελάχιστο υλικό για την κατασκευή του;

2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$, $x \in [-a, a]$, $a > 0$.

α) **(1)** Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τό γράφημα της f και τις ευθείες $x = \pm a$, $y = 0$, (κάνετε σχήμα).

β) **(1)** Βρείτε τον όγκο του στερεού από περιστροφή της f στο $[-a, a]$.

3. Η θερμοκρασία T μιας επίπεδης πλάκας δίνεται από τον τύπο

$$T(x, y) = x \cos(y - \pi).$$

α) **(1.5)** Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο της T στο $P_0 = (0, 0)$.

β) **(0.5)** Να δείξετε ότι η κατεύθυνση μέγιστης αύξησης της T στο P_0 είναι προς την αρνητική πλευρά του x άξονα, ενώ η κατεύθυνση μέγιστης μείωσης είναι προς την θετική πλευρά του x άξονα.

4. Ο ρυθμός ανάμειξης R δύο χημικών διαλυμάτων επάνω στην στρογγυλή πλάκα $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$R(x, y) = x^2 + y^2 - xy + 1.$$

α) **(2)** Βρείτε αν υπάρχουν σημεία στο εσωτερικό της πλάκας που ο ρυθμός ανάμειξης παρουσιάζει ακρότατη τιμή. Στην περίπτωση ύπαρξης ακρότατης τιμής, να την προσδιορίσετε.

β) **(2)** Δείξτε ότι εάν περιορίσουμε την R επάνω στον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, τότε αυτή εκφράζεται ως συνάρτηση του $t \in [0, 2\pi)$ με τον τύπο

$$R(t) = 2 - \frac{1}{2} \sin(2t).$$

Ποια είναι τα ακρότατα της παραπάνω συνάρτησης; Τι συμπεραίνετε για τα ολικά ακρότατα της $R(x, y)$ στον κλειστό δίσκο D ;

Διάρκεια 90 λεπτά.