Κεφάλαιο 1

Ανασκόπηση βασικών εννοιών

1.1 Συναρτήσεις

Αν και είμαστε εξοικειωμένοι με την έννοια της συνάρτησης από το σχολείο, θα την επαναλάβουμε εδώ καθώς είναι θεμελιώδης για ό,τι ακολουθεί.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η μεταβλητή x λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο A και η μεταβλητή y λαμβάνει τιμές από ένα σύνολο B. Λέμε ότι *η y είναι συνάρτηση του x* και γράφουμε

$$y = y(x) \quad \text{ή} \quad y = f(x),$$

αν σε κάθε x_1 του A αντιστοιχίζεται **ένα και μόνο** y_1 του B:

$$x_1 \mapsto y_1.$$

Λόγου χάρη, αν

$$y = 2x^2 + x + 1,$$

τότε για $x = 1$, $y = 4$, για $x = 2$, $y = 11$ κ.ο.κ. Η x καλείται *ανεξάρτητη μεταβλητή* (γιατί επιλέγουμε μια τιμή του x και κατόπιν την αντιστοιχούμε σε μία τιμή του y). Το y ονομάζεται *εξαρτημένη μεταβλητή*.

Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις όταν θέλουμε να εκφράσουμε ένα φυσικό φαινόμενο με ποσοτικό τρόπο. Για παράδειγμα, όταν μία ουσία A μειώνεται μέσω μίας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης,[1] η συγκέντρωση a στον χρόνο t της ουσίας δίνεται από την

$$a = a(t) = a_0 e^{-kt},$$

όπου a_0 είναι η αρχική συγκέντρωση της ουσίας και k είναι μία σταθερά.

[1] Θα δούμε αργότερα ότι τέτοιου είδους εξισώσεις είναι της μορφής

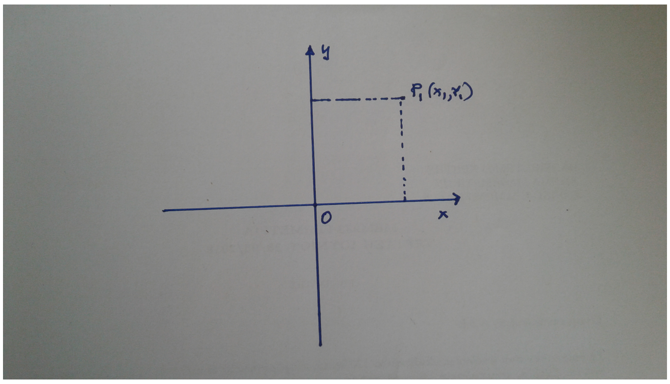
$$\frac{dy}{dx} = F(x, y),$$

όπου $F(x, y)$ είναι συνάρτηση των x και της άγνωστης y και dy/dx είναι η πρώτη παράγωγος της y. Στο παραπάνω παράδειγμα, η a είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{da}{dt} = -ka.$$

1.1.1 Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων

Ο ευκολότερος αλλά και βολικότερος τρόπος για να παραστήσουμε μία συνάρτηση είναι μέσω του γραφήματός της. Έχουμε ένα σύστημα καθέτων αξόνων, τον άξονα των x και τον άξονα των y που τεμνονται στην αρχή O. Κάθε σημείο P_1 του επιπέδου καθορίζεται από δύο αριθμούς x_1, y_1 επάνω στους άξονες των x και y αντίστοιχα, όπως στο σχήμα.



Συντεταγμένες σημείου

Γράφουμε τότε

$$P_1 = P_1(x_1, y_1)$$

και το ζεύγος (x_1, y_1) καλείται *συντεταγμένες* του P_1. Το x_1 είναι η *τετμημένη* του P_1 και το y_1 είναι η *τεταγμένη* του P_1.

Όταν έχουμε μία συνάρτηση $y = f(x)$, το σύνολο

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x))\},$$

καλείται *γράφημα* της f. Αποτυπώνουμε τα σημεία του $\mathrm{Gr}(f)$ στο σύστημα αξόνων μας και παίρνουμε μία καμπύλη[2] που είναι η *γραφική παράσταση της f*.

1.1.2 Διάφοροι τύποι συναρτήσεων

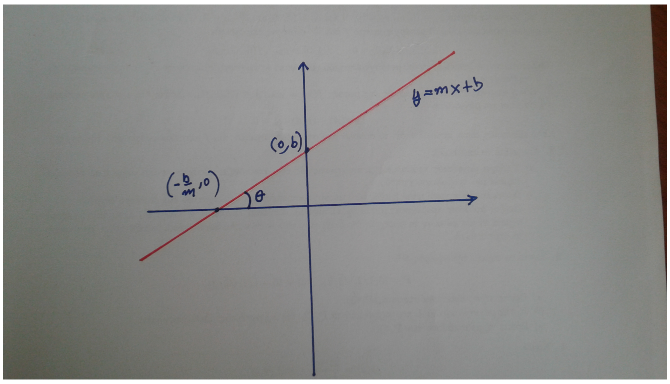
Αφφινική συνάρτηση.

Αυτή έχει τύπο

$$y = mx + b,$$

και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία.

[2]Συνήθως, λέγοντας καμπύλη μας έρχεται στο νου ένα σχήμα που είναι κάπως *λείο*. Στην πραγματικότητα, μία γραφική παράσταση συνάρτησης μπορεί να είναι ένα πολύ μπερδεμένο σχήμα.



Η γραφική παράσταση της αφφινικής συνάρτησης είναι ευθεία

Τέμνει τους άξονες των x και y αντίστοιχα στα σημεία

$$\left(-\frac{b}{m}, 0\right) \quad \text{και} \quad (0, b).$$

Η *κλίση* της y ορίζεται από την

$$\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m = \tan\theta$$

και προφανώς δεν εξαρτάται από την επιλογή των σημείων (x_1, y_1) και (x_2, y_2).

Οι αφφινικές συναρτήσεις είναι σημαντικές στην ανάλυση των χημικών δεδομένων διότι χαρακτηρίζονται από τις δύο παραμέτρους m και b. Επίσης, είναι οι πιο εύκολα αναγνωρίσιμες συναρτήσεις, με την έννοια ότι για ένα απολύτως τυχαίο σύνολο σημείων είναι ιδιαίτερα δύσκολο να αναγνωρίσουμε σε ποια καμπύλη ανήκει. Όταν είναι δυνατόν, προσπαθούμε να μετατρέψουμε μία συνάρτηση σε αφφινική: για παράδειγμα, η μεταβολή της σταθεράς ισορροπίας K με τη θερμοκρασία T δίνεται από τη σχέση

$$\ln K = -\frac{\Delta H^0}{RT} + c,$$

όταν η αντίδραση θερμότητας ΔH^0 δεν εξαρτάται από τη θερμοκρασία T. Εδώ, η R είναι μία σταθερά που εξαρτάται από το αέριο και η c είναι μία άλλη σταθερά. Η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης είναι κάπως σύνθετη. Όμως, αν θέσουμε

$$\ln K = K', \quad T' = \frac{1}{T},$$

παίρνουμε την αφφινική

$$K' = -\frac{\Delta H^0}{R} T' + c,$$

η οποία σχεδιάζεται εύκολα. Παρατηρούμε δε ότι η κλίση της ευθείας είναι $-\frac{\Delta H^0}{R}$, απ' όπου μπορούμε να πάρουμε την αντίδραση θερμότητας ΔH^0.

Τετραγωνική συνάρτηση.

Αυτή έχει τύπο

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

και η γραφική της παράσταση είναι μία παραβολή. Η παραβολή αυτή τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $(0, c)$. Όσο για την τομή της με τον άξονα των x, έχουμε ότι (δείτε το σχήμα):

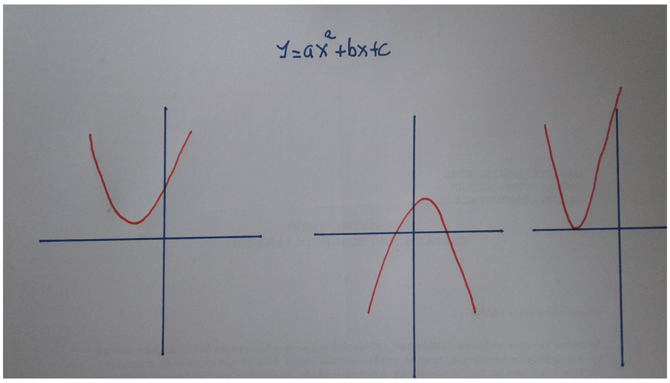
- Εάν $D = b^2 - 4ac > 0$, το΄τε τον τέμνει στα σημεία $(x_1, 0)$ και $(x_2, 0)$, όπου

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

- Εάν $D = 0$, τότε εφάπτεται στον άξονα των x στο σημείο $(x_{12}, 0)$, όπου

$$x_{12} = -\frac{b}{2a}.$$

- Εάν $D < 0$ τότε δεν τέμνει τον άξονα των x.



Η γραφική παράσταση της τετραγωνικής συνάρτησης είναι παραβολή

Σχόλιο 1.1.1. Μονότιμες και πλειότιμες συναρτήσεις. Με τον τρόπο που δώσαμε τον ορισμό της συνάρτησης, όταν $y = y(x)$, τότε για κάθε x_1 από τα x αντιστοιχεί *ένα και μόνο ένα* y_1 από τα y. Ορίσαμε δηλαδή αυτό που στα Μαθηματικά καλούμε *μονότιμη* συνάρτηση. Γραφικά, αυτό μπορούμε να το φανταστούμε και ως εξής: Κάθε κάθετη ευθεία στον άξονα των x τέμνει το πού μία φορά την γραφική παράσταση της συνάρτησης. Γιατί είναι σημαντικές οι μονότιμες συναρτήσεις; Μεταξύ άλλων, στην Κβαντομηχανική απαιτούμε από τις συναρτήσεις κύματος να ορίζονται μονότιμα.

Από την άλλη μεριά, οι πλειότιμες συναρτήσεις προκύπτουν αν αφαιρέσουμε τη φράση *ένα και μόνο ένα* στον ορισμό της μονότιμης συνάρτησης. Παραδείγματα πλειοτίμων συναρτήσεων είναι οι

$$y^2 = x, \quad y^4 = x.$$

Πολυωνυμική συνάρτηση.

Μια πολυωνυμική συνάρτηση (n βαθμού) έχει τύπο

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Σχόλιο 1.1.2. Πεδία ορισμού. Στα προηγούμενα παραδείγματα συναρτήσεων, το x έπαιρνε κάθε τιμή από το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε. Ας πούμε, για να ορίζεται καλώς η

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}},$$

θα πρέπει $x^2 - 16 > 0$. Συνεπώς το πεδίο ορισμού είναι το

$$(-\infty, -4) \cup (4, +\infty).$$

Σχόλιο 1.1.3. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Στη Χημεία, όπως και αλλού, συχνά μία ποσότητα εξαρτάται από δύο ή και περισσότερες μεταβλητές. Λόγου χάρη, η πίεση P ενός αερίου εξαρτάται από τον όγκο V, τη θερμοκρασία T και τον αριθμό των moles n. Σε ένα ιδανικό αέριο, η *καταστατική εξίσωση* είναι η

$$P = P(V, T, n) = \frac{nRT}{V},$$

όπου R είναι η σταθερά του αερίου.

Σχόλιο 1.1.4. Πεπλεγμένες συναρτήσεις. Ας γράψουμε τον τύπο της πίεσης ως

$$V = \frac{nRT}{P}.$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε επακριβώς να εκφράσουμε το V ως συνάρτηση $V = V(n, T, P)$. Τούτο δεν είναι πάντοτε δυνατόν. Ας δούμε την *καταστατική εξίσωση Van der Waals*

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \quad a, b, \text{ σταθερές.} \tag{1.1}$$

Εάν σε αυτήν την περίπτωση προσπαθήσουμε να λύσουμε ως προς V, μάλλον δε θα τα καταφέρουμε. Εάν όμως επιθυμούμε να θεωρούμε τον όγκο V ως $V(P, T, n)$, τότε θα καλούμε τη V *πεπλεγμένη συνάρτηση* των P, T, n.

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις.

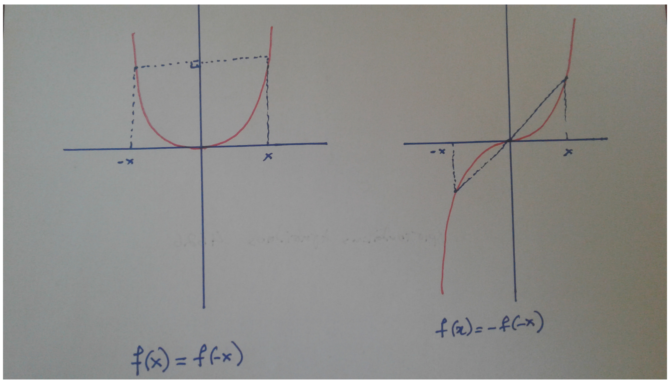
Μία συνάρτηση $y = f(x)$ λέγεται *άρτια* αν

$$f(x) = f(-x)$$

για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Η $y = f(x)$ λέγεται *περιττή* αν

$$f(x) = -f(-x)$$

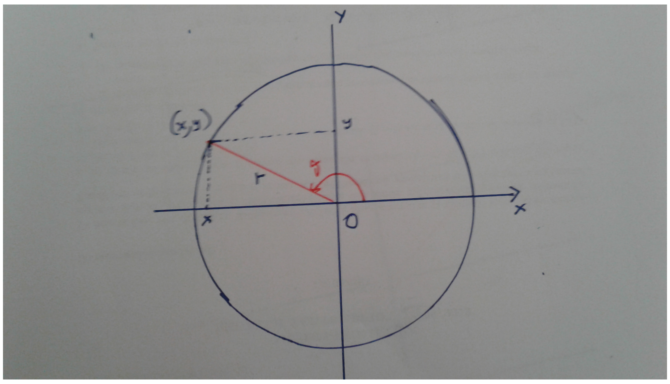
για κάθε x στο πεδίο ορισμού της. Οι άρτιες και οι περιττές συναρτήσεις συνδέονται αντίστοιχα με τίς έννοιες της *συμμετρίας ως προς άξονα* και της *συμμετρίας ως προς σημείο*. Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y ενώ η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.



Άρτια και περιττή συνάρτηση

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Θυμόμαστε ότι το *ακτίνιο* (rad) είναι μέτρο γωνίας. Όπως στο σχήμα,



Τριγωνομετρικός κύκλος

$$\theta = \frac{s}{r}\text{rad}$$

όπου s είναι το μήκος τόξου. Έχουμε ότι $360^\circ = 2\pi\text{rad}$ και γενικά

$$\mu \text{ μοίρες} = \frac{\pi}{180}\text{rad}.$$

Ως γνωστόν,

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x},$$

είναι το *ημίτονο*, το *συνημίτονο* και η *εφαπτομένη* του θ, αντίστοιχα. Για τα πρόσημα των τριγωνομετρικών αριθμών ισχύει ο κανόνας ΟΗΕΣ:

- Στο πρώτο τεταρτημόριο όλα είναι θετικά.
- Στο δεύτερο τεταρτημόριο το ημίτονο είναι θετικό.
- Στο τρίτο τεταρτημόριο η εφαπτομένη είναι θετική.

- Στο τέταρτο τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι θετικό.

Ως συναρτήσεις, οι $\sin x$, $\cos x$ ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}$ μέσω της περιοδικότητάς τους:

$$\sin x = \sin(x + 2k\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε ένα τμήμα τους ορισμένο σε διάστημα μήκους 2π, τότε επαναλαμβάνοντας παντού αυτό το τμήμα παίρνουμε τις πλήρεις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Τα παρακάτω ισχύουν:

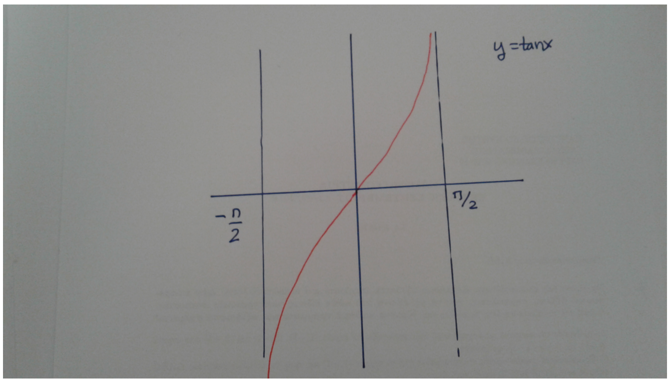
$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1.$$

Η ημιτονοειδής και η συνημιτονοειδής συνάρτηση περιγράφουν συστήματα ταλαντώσεων όπως η κυματική κίνηση, η απλή αρμονική κίνηση, κ.ά.

Η συνάρτηση $\tan x$ δεν ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επειδή

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

και η $\cos x$ μηδενίζεται σε όλα τα $2k\pi \pm \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, το πεδίο ορισμού της $\tan x$ είναι όλο το $\mathbb{R}$ εκτός από αυτά τα σημεία. Στο σχήμα φαίνεται η $\tan x$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$.



Η $y = \tan x$ στο $(-\pi/2, \pi/2)$

Υπάρχουν και άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:[3]

- Η *συνεφαπτομένη*
$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

- Η *τέμνουσα*
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

- Η *συντέμνουσα*
$$\text{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Θυμόμαστε από το σχολείο διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους.

[3]Βρείτε τα πεδία ορισμού τους!

- Της αντίθετης γωνίας:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x.$$

- Της παραπληρωματικής γωνίας:

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

- Της συμπληρωματικής γωνίας:

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos x, \quad \cos(\pi/2 - x) = \sin x, \quad \tan(\pi/2 - x) = \cot x.$$

- Τον θεμελιώδη νόμο της τριγωνομετρίας:[4]

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

- Τους τύπους αθροισμάτων-διαφορών:

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b,\\
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b,\\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b,\\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b.
\end{aligned}$$

- Τους τύπους του διπλασίου τόξου:

$$\begin{aligned}
\sin(2a) &= 2\sin a \cos a,\\
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a\\
&= 2\cos^2 a - 1\\
&= 1 - 2\sin^2 a
\end{aligned}$$

Χρήσιμοι τέλος είναι και οι τύποι:

$$\begin{aligned}
2\cos a \cos b &= \cos(a+b) + \cos(a-b),\\
2\sin a \sin b &= \cos(a+b) - \cos(a-b),\\
2\sin a \cos b &= \sin(a+b) + \sin(a-b).
\end{aligned}$$

Η εκθετική συνάρτηση.

Ένας τρόπος να ορίσουμε την εκθετική συνάρτηση $\exp(x)$ είναι μέσω της άπειρης σειράς

$$\exp(x) = 1 + x\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Εδώ το $n!$ (n παραγοντικό) ορίζεται για κάθε φυσικό n ως $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n$. Η εκθετική συνάρτηση είναι η μοναδική με την ιδιότητα: ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x είναι y.[5]

[4] Ουσιαστικά πρόκειται περί του Πυθαγορείου Θεωρήματος.

[5] Θα δούμε παρακάτω ότι αυτό σημαίνει ότι η *παράγωγος* της exp είναι ο εαυτός της.

Η εκθετική συνάρτηση περιγράφει διάφορα φαινόμενα του πραγματικού κόσμου όπως τη ραδιενεργή μείωση, την αύξηση του πληθυσμού βακτηρίων (νόμος του Malthus), την κατανομή σωματιδίων όπως αυτή εξαρτάται αοπό τα επίπεδα ενέργειας και τη θερμοκρασία, κ.ά. Ως πρός το τελευταίο παράδειγμα, έστω ότι έχουμε N σωματίδια και ας συμβολίσουμε με N_i των αριθμό εκείνων των σωματιδίων που βρίσκονται σε επίπεδο με ενέργεια E_i. Αν T είναι η θερμοκρασία, τότε η *κατανομή Boltzmann* μας λέει ότι

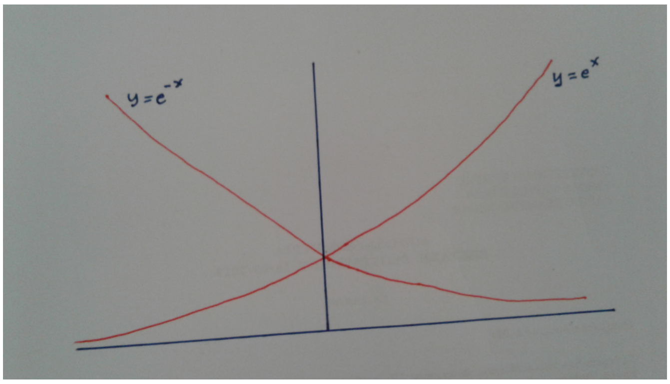
$$\frac{N_i}{N} = \frac{\exp(-E_i/(kT))}{\sum_i \exp(-E_i/(kT))},$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzmann.

Θα θεωρούμε γνωστά τα παρακάτω:

- $\exp(0) = 1$.
- $\exp(1) = e \sim 2.71$, η *βάση των Νεπερείων λογαρίθμων*.
- $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$.
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

Θα γράφουμε επίσης και $y = \exp(x) = e^x$. Στο σχήμα βρίσκονται οι γραφικές παραστάσεις των e^x και e^{-x}.



Η $y = e^x$ και η $y = e^{-x}$

Μπορούμε να ορίσουμε και την συνάρτηση $y = a^x$ για κάθε $a > 0$, $a \neq 1$. Η συνάρτηση αυτή έχει τις ίδιες ιδιότητες με την $\exp(x)$. Όσο για την γραφική της παράσταση, ομοιάζει με της e^x αν $a > 1$ και με της e^{-x} αν $a \in (0, 1)$.

Υπερβολικές συναρτήσεις.

Κατασκευάζονται από την $\exp(x)$:

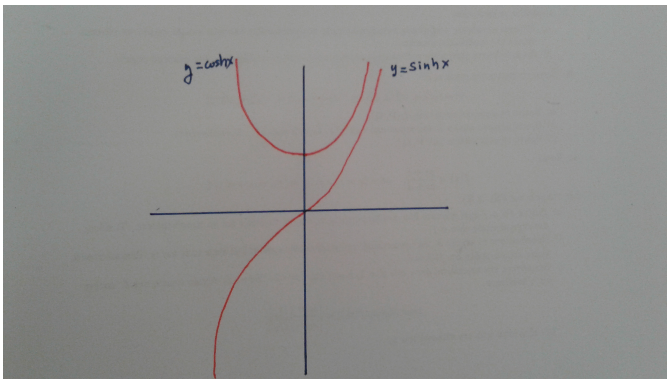
- Το *υπερβολικοό συνημίτονο*:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Το *υπερβολικοό ημίτονο*:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Προσέξτε ότι σε αντίθεση με την συνήθη συνημιτονοειδή και ημιτονεοειδή, αυτές *δεν* είναι περιοδικές συναρτήσεις. Οι γραφικές τους παραστάσεις είναι όπως παρακάτω (η $\cosh x$ είναι άρτια και η $\sinh x$ είναι περιττή).



Η $y = \cosh x$ και η $y = \sinh x$

Έχουμε τον βασικό νόμο

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

και μπορούμε να ορίσουμε σε αναλογία με τις συνήθεις τριγωνομετρικές, τις συναρτήσεις υπερβολικής εφαπτομένης $\tanh x$, υπερβολικής συνεφαπτομένης $\coth x$, υπερβολικής τέμνουσας $\mathrm{sech} x$ και υπερβολικής συντέμνουσας $\mathrm{cosech} x$.

Αντίστροφες συναρτήσεις.

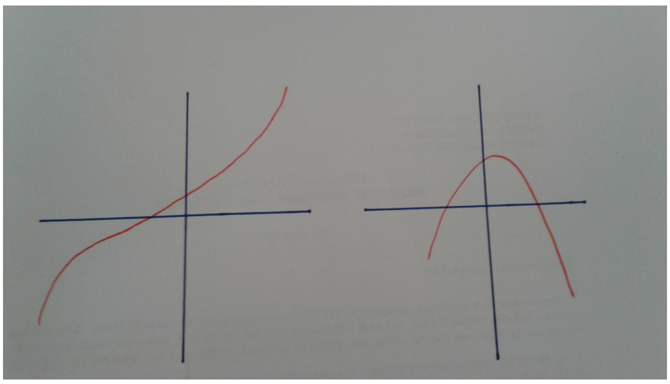
Η απλή αφφινική συνάρτηση $y = 5x + 1$ λύνεται ως προς x:

$$x = \frac{y-1}{3}.$$

Η x είναι τότε η *αντίστροφη* της y. Προφανώς, κάτι τέτοιο δεν είναι πάντοτε δυνατόν για τυχαία $y = f(x)$, παρά μόνο αν η y είναι 1–1:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2 \implies y_1 \neq y_2.$$

Σχηματικά αυτό σημαίνει πως κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα των x τέμνει το γράφημα της $y = f(x)$ το πολύ σε ένα σημείο.



Αντιστρέψιμη (αριστερά) και μη αντιστρέψιμη (δεξιά) συνάρτηση

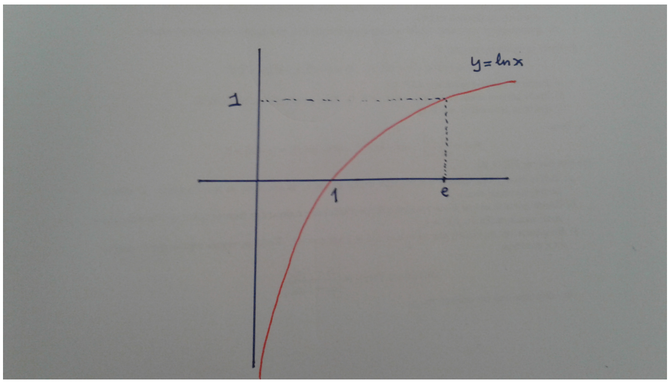
Τότε, η $y = f(x)$ λέγεται *αντιστρέψιμη* και η *αντίστροφή* f^{-1} *της* f δίνεται από τον τύπο

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Η συνάρτηση του κανονικού λογαρίθμου $y = \ln x$ ορίζεται ως η αντίστροφη της εκθετικής exp:

$$y = \ln x \iff x = e^y.$$

Η γραφική της παράσταση είναι όπως στο σχήμα:



Η $y = \ln x$

Έχουμε τις ιδιότητες για x, x_1, x_2 θετικά και n πραγματικό

- $\ln(1) = 0$.
- $\ln(e) = 1$.
- $\ln(x_1 x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.
- $\ln(x_1/x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.
- $\ln(x^n) = n \ln(x)$.

Σε πλήρη αναλογία με την ln ορίζεται και η $\log_a$ (λογαριθμική με βάση a) ως η αντίστροφη της a^x:

$$y = \log_a x \iff x = a^y.$$

Η συνάρτηση του δεκαδικού λογαρίθμου $\log_{10} x$ θα συμβολίζεται απλά με $\log x$. Οι δεκαδικοί λογάριθμοι βρίσκουν στη Χημεία εφαρμογή για παράδειγμα στο

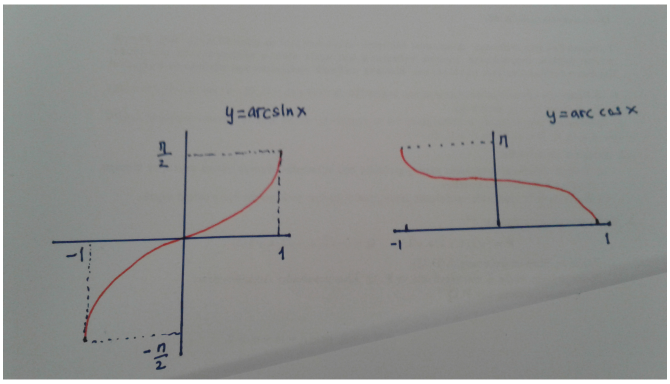
$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+],$$

όπου $[\mathrm{H}^+]$ είναι η συγκέντρωση των ιόντων υδρογόνου.

Τέλος σημειώνουμε ότι μπορούμε να περνάμε από τη μία λογαριθμική συνάρτηση στην άλλη, χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής βάσης

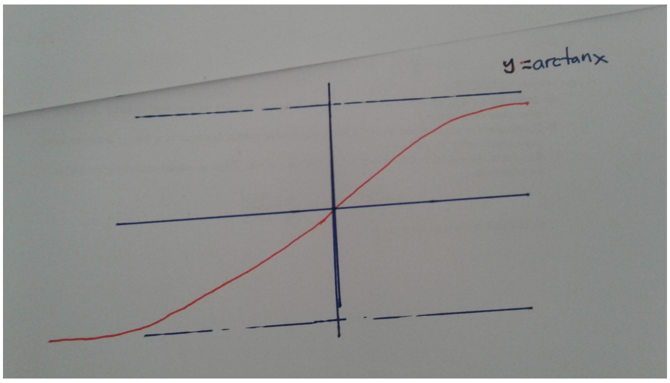
$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}.$$

Εάν θέλουμε να θεωρήσουμε τις αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, τότε θα πρέπει κατ' αρχάς να τις παριορίσουμε στα τμήματα εκείνα του πεδίου ορισμού τους στα οποία είναι 1–1. Έτσι, περορίζοντας την $\sin x$ στο $[-\pi/2, \pi/2]$ παίρνουμε την αντίστροφή της $\arcsin x$ (τόξο ημιτόνου), $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Παρομοίως, περιορίζοντας την $\cos x$ στο $[0, \pi]$ παίρνουμε την αντίστροφή της $\arccos x$ (τόξο συνημιτόνου), $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.



Η $y = \arcsin x$ και η $y = \arccos x$

Για την αντίστροφη της $\tan x$, την περιορίζουμε πρώτα στο $(-\pi/2, \pi/2)$ και παίρνουμε την αντίστροφή της $\arctan x$ (τόξο εφαπτομένης), $\arctan : \mathbb{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$.



Η $y = \arctan x$

Ασκήσεις

1. Βρείτε τις κλίσεις των ευθειών που περνούν αντίστοιχα από τα σημεία:

i) $(-5, 1)$ και $(3, -2)$,

ii) $(3, 2)$ και $(11, -1)$,

iii) $(4, 2)$ και $(8, 5)$.

2. Σχεδιάστε **σαν ευθείες** (κάνοντας κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών) τις παρακάτω:

i) $y = x^2$,

ii) $y = \sqrt{x}$,

iii) $\ln K = \ln K_0 + A\sqrt{u}$, όπου $K + 0, A$ σταθερές,

iv) $\ln y = \ln a + b \ln x$ όπου a, b σταθερές.

3. Θυμηθείτε τα τριώνυμα! Λύστε τις εξισώσεις:

i) $2x^2 - 3x - 4 = 0$,

ii) $3x^2 + 4x - 9 = 0$,

iii) $x^2 + 3x + 5 = 0$.

4. Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπους

$$\text{i) } y = \frac{x-3}{3x^2-1}, \quad \text{ii) } y = \sqrt{(x-1)(x-3)}, \quad \text{iii) } y = \frac{x+3}{(x-2)(x+1)(x-2)}.$$

5. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες καί ποιες είναι περιττές;

i) $y = x^3 + 6x$,

ii) $y = \tan(x)$,

iii) $y = x \sin(x)$,

iv) $y = \arcsin(x)$.

6. Εκφράστε τις παρακάτω ποσότητες με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

i) $\sin(3a) \cdot \cos(3a)$,

ii) $\sin(2a) \cdot \sin(7a)$,

iii) $\cos(4a) \cdot \cos(5a)$.

7. Στη φασματοσκόπηση Raman εμφανίζεται το γινόμενο

$$\cos(2\pi\nu_k t) \cdot \cos(2\pi\nu t)$$

όπου ν_k και ν είναι συχνότητες. Εκφράστε την σαν αθροισμα συνημιτόνων.

8. Ένα στάσιμο κύμα είναι το άθροισμα των δύο κυμάτων

$$\psi_1(x,t) = a_0 \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)\right)$$

και

$$\psi_2(x,t) = a_0 \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \nu t\right)\right)$$

που ταξιδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις. Εκφράστε το άθροισμα

$$\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$$

σαν γινόμενο μιας συνημιτονοειδούς συνάρτησης που εξαρτάται μόνο απο το x και μιας συνημιτονοειδούς συνάρτησης που εξαρτάται μόνο απο το t.

9. Βρείτε όπου και αν αντιστρέφονται τις αντίστροφες των