

Κεφάλαιο 2

Διαφορικός λογισμός

Η Χημεία ενδιαφέρεται για τις μεταβολές, άρα μας χρειάζεται η μέθοδος που χειρίζεται τον ρυθμό μεταβολής με ποσοτικό τρόπο.

2.1 Όρια

Η ιδέα είναι απλή, όσο και θεμελιώδης για τον λογισμό. Ας πάρουμε την $y = x^2$ για τις τιμές του x κοντά στο 3 αλλά όχι για 3:

x	2.9	2.95	2.98	2.999	3.001	3.01
y	8.41	8.70	8.94	8.994	9.006	9.06

Βλέπουμε ότι καθώς το x πλησιάζει το 3 ($x \rightarrow 3$, το x τείνει στο 3), τόσο από τα αριστερά ($x \rightarrow 3^-$) αλλά όσο και από τα δεξιά ($x \rightarrow 3^+$), τότε το y πλησιάζει το 9 όσο επιθυμούμε. Αυτό γράφεται με μαθηματικούς όρους ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 = 9 = \lim_{x \rightarrow 3} x^2.$$

Στη γενική περίπτωση, για τυχούσα $f(x)$ γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

και διαβάζουμε ότι το όριο της $f(x)$ καθώς το x τείνει στο x_0 είναι l .¹

Ας πάρουμε ένα μη τετριμμένο παράδειγμα. Έστω η

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Επειδή το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού, αν απλώς αντικαταστήσουμε για $x = 1$ παίρνουμε

$$\frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0},$$

¹Το x_0 δεν ανήκει κατ' ανάγκη στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Οφείλει όμως να μπορεί να πλησιάζεται όσο περισσότερο γίνεται από σημεία του πεδίου ορισμού. Αν για παράδειγμα το πεδίο ορισμού μιας f είναι το $(-1, 1)$, τότε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ δεν έχει νόημα. Όμως τα $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ έχουν κατ' αρχάς νόημα, παρ' όλο που τα ± 1 δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f .

κάτι που δεν προσδιορίζεται. Το $\frac{0}{0}$ εντός του πλαισίου συμβολίζει ακριβώς την *απροσδιόριστη μορφή* $\frac{0}{0}$. Εδώ όμως, για $x \neq 1$ έχουμε

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

και συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1+1 = 2.$$

Στην περίπτωση αυτή, η απροσδιοριστία *άρθθηκε* και το όριο υπολογίστηκε. Γενικά, το να βρούμε το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l, \quad l \in \mathbb{R}$$

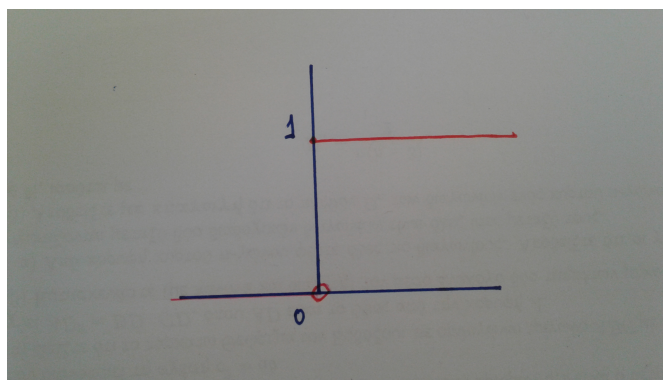
είναι εφικτό είτε α) με απευθείας αντικατάσταση του x με το x_0 , είτε β) στην περίπτωση που κάτι τέτοιο μας δώσει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, να προσπαθήσουμε να άρουμε την απροσδιοριστία χρησιμοποιώντας κάποιες απλές αλγεβρικές πράξεις.

Το τελευταίο όμως και πάλι δεν είναι δυνατόν όταν έχουμε ένα όριο όπως το²

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Μπορεί επίσης μία συνάρτηση να είναι όπως η

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$



Το αριστερό όριο είναι διαφορετικό από το δεξί: το όριο στο 0 δεν υπάρχει

²Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 1. Μία απόδειξη βασίζεται στην έκφραση του $\sin x$ ως την άπειρη σειρά

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Παίρνουμε τότε

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \cdots \rightarrow_{x \rightarrow 0} 1.$$

Βλέπουμε τότε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

Λέμε τότε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Γενικά,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = l.$$

Όταν υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, τότε

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm m$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = lm$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = l/m$, $m \neq 0$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = kl$, $k \in \mathbb{R}$.

Ενδέχεται, να μας παρουσιαστούν απροσδιόριστες μορφές του τύπου

$$\frac{a}{0} \quad a \neq 0.$$

Τότε, αν $a > 0$ έχουμε

$$\frac{a}{0^+} = +\infty, \quad \frac{a}{0^-} = -\infty.$$

Αν $a < 0$,

$$\frac{a}{0^+} = -\infty, \quad \frac{a}{0^-} = +\infty.$$

Εδώ χρειάζεται λίγο προσοχή. Το να γράφουμε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty,$$

δε σημαίνει ότι υπάρχει όριο. Είναι απλώς η ένδειξη συνεχούς αύξησης ή μείωσης της f κοντά στο x_0 .

Τέλος, αν το $+\infty$ ή το $-\infty$ βρίσκονται ως ανοικτά άκρα στο πεδίο ορισμού της f , μπορούμε να θεωρήσουμε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \text{ή/και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Αν η f είναι πολυωνυμική, $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a_n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n.$$

Το αποτέλεσμα είναι κάποιο άπειρο, που βρίσκεται από τους κανόνες

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty & n \text{ άρτιος,} \\ -\infty & n \text{ περιτός,} \end{cases}$$

καθώς και από τους κανόνες

$$a(+\infty) = +\infty, \quad a(-\infty) = -\infty,$$

αν $a > 0$ ενώ

$$a(+\infty) = -\infty, \quad a(-\infty) = +\infty,$$

αν $a < 0$.

Αν η f είναι ρητή,

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m},$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^{n-m},$$

και για να εντοπίσουμε το όριο, ακολουθούμε όλους τους κανόνες που δηλώσαμε ως τώρα.

Σχόλιο 2.1.1. Θα ωφεληθείτε πάρα πολύ εάν ανατρέχοντας τις γραφικές παραστάσεις των στοιχειωδών συναρτήσεων του προηγούμενου κεφαλαίου, κάνετε έναν κατάλογο με τα όριά τους. Ας πούμε βλέποντας την $\ln x$ παίρνουμε αμέσως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Προσέξτε όμως: το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ δεν ορίζεται ούτε ως κάποιο ∞ ! Παρατηρήσετε τη συνάρτηση: η αέναη ταλάντωση της τη φέρνει σε οποιαδήποτε τιμή ανάμεσα στο -1 και στο 1 καθώς το x μεγαλώνει (ή μικραίνει) απεριόριστα.

2.2 Συνέχεια

Στο πρώτο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου, είδαμε ότι για την $y = x^2$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} y(x) = 9 = y(3).$$

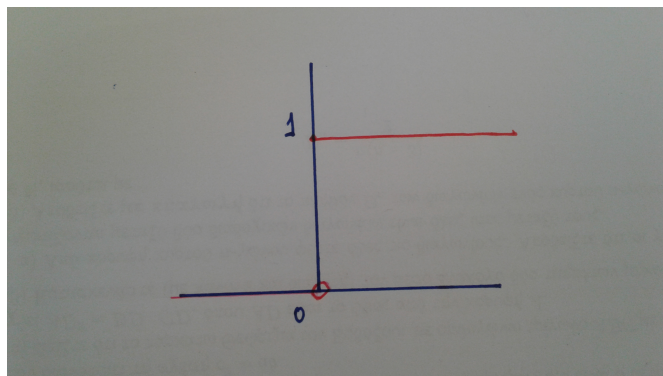
Λέμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι *συνεχής* στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Προσοχή! Η έννοια της συνέχειας δεν έχει νόημα αν το x_0 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f . Έχουμε επίσης

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0).$$

Η συνέχεια μιας f στο x_0 σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f δεν κόβεται στο $(x_0, f(x_0))$, όπως λ.χ. στο παρακάτω σχήμα όπου έχουμε *ασυνέχεια* (άλμα) στο 0:



Μια συνάρτηση λέγεται *συνεχής* αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, άρα μία συνεχής συνάρτηση μπορεί να σχεδιαστεί χωρίς να χρειαστεί να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί. Σε σημεία που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού αλλά μπορεί να οριστεί κάποιο είδος ορίου, λέμε ότι υπάρχει εν γένει ασυνέχεια. Κάποιες φορές, αυτή η ασυνέχεια *αίρεται*: ας πούμε, η $\sin x/x$ δεν ορίζεται στο 0, αλλά από την άλλη είδαμε ότι ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$. Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε την συνάρτηση αυτή στο 0 ως εξής: θεωρούμε τη νέα συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$$

Η f αυτή είναι συνεχής στο 0. Βέβαια, σε άλλες περιπτώσεις κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατόν. Η συνάρτηση $\ln x$ δεν μπορεί να επεκταθεί συνεχώς στο 0 εφ' όσον $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν τις παρακάτω ιδιότητες: αν f, g συνεχείς στο x_0 που ανήκει στο πεδίο ορισμού και των δύο, και $k \in \mathbb{R}$, τότε οι

$$f \pm g, \quad kf, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

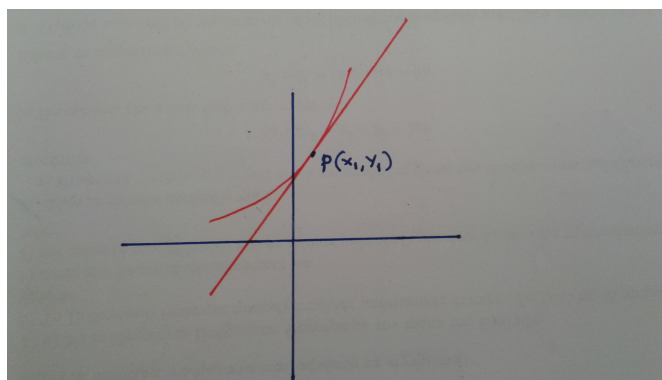
είναι συνεχείς στο x_0 -η τελευταία με την προϋπόθεση $g(x_0) \neq 0$. Όλες οι συναρτήσεις που έχουμε δει είναι ευρέως συνεχείς. Οι όποιες ασυνεχειές τους φαίνονται στα σχήματά τους.

2.3 Παραγώγιση

Θυμηθείτε την κλίση μιας ευθείας:

$$\text{κλίση} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

όπου (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι οποιαδήποτε σημεία της ευθείας. Προφανώς δεν μπορούμε να ορίσουμε κάτι παρόμοιο σε οποιαδήποτε καμπύλη. Ενδέχεται όμως να μπορούμε σε κάποιο σημείο $P(x_0, y_0)$ να φέρουμε την *εφαπτομένη* ευθεία της καμπύλης στο P και να μετρήσουμε την κλίση της.



Εφαπτομένη καμπύλης

Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι καθόλου σίγουρο ότι να αποτελέσει μία ακριβή διαδικασία. Αντ' αυτού, παίρνουμε ένα σημείο Q_1 της καμπύλης της $y = f(x)$ διαφορετικό από το P και έστω $Q_1 = Q(x_1, y_1)$. Τότε,

$$\text{κλίση του } PQ_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Εάν πάρουμε κάποιο άλλο σημείο $Q_2(x_2, y_2)$ μεταξύ των P και Q_1 , η κλίση του PQ_1 θα είναι πιο κοντά στην κλίση της εφαπτομένης στο P . Καταλαβαίνουμε με αυτόν τον τρόπο ότι παίρνουμε βέλτιστη προσέγγιση της κλίσης της εφαπτομένης όσο πιο κοντά στο P παίρνουμε το σημείο Q . Προς τούτο λοιπόν, θεωρούμε ένα μικρό h και το σημείο της καμπύλης $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Η κλίση θα είναι αυτό που ονομάζεται *πηλίκο Νεύτωνα*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

και η βέλτιστη προσέγγιση παίρνεται αφήνοντας το $h \rightarrow 0$:

$$\text{κλίση στο } P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Η κλίση της καμπύλης $y = f(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του y με το x στο x_0 . Η σημαντική αυτή ποσότητα καλείται *παράγωγος* της y ως προς x στο x_0 . Υπάρχουν διάφοροι συμβολισμοί:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \dot{f}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Εάν για κάποια συνάρτηση f υπάρχει η παράγωγός $f'(x_0)$ τότε η f λέγεται *παραγωγίσιμη* στο x_0 . Αν αυτό συμβαίνει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f'(x)$ (dy/dx , $\dot{f}(x)$) που καλείται (*πρώτη*) *παράγωγος* της f .

Σχόλιο 2.3.1. Ενδέχεται σε κάποια καμπύλη να υπάρχει η εφαπτομένη στο (x_0, y_0) , παρ' όλα αυτά η y να μην είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Λόγου χάρη, έστω η $y = \sqrt{x}$, $x_0 = 0$. Είναι για $h > 0$

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \rightarrow_{h \rightarrow 0} +\infty.$$

Σαφέστατα λοιπόν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όμως δέχεται εφαπτομένη, την ευθεία $x = 0$ (που έχει άπειρη κλίση).

Σχόλιο 2.3.2. Για συνάρτηση $y = f(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 , η εφαπτόμενη ευθεία έχει τύπο

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 είναι και συνεχής στο x_0 . Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Προτού δώσουμε συγκεκριμένο παράδειγμα, ας σκεφτούμε ότι εφ' όσον μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη ευθεία στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ σε μία συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , η γραφική της παράσταση δεν μπορεί να παρουσιάζει *δόντι* εκεί. Τώρα λοιπόν, ας πάρουμε την

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0, \\ x & x > 0. \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο 0 αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 0. (Άσκηση!)

Σχόλιο 2.3.3. Η έννοια της εφαπτομένης είναι κάπως διευρυμένη στις παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Λόγου χάρη, η εφαπτομένη της $y = x^3$ στο 0 είναι η $y = 0$ που διαπερνά τη συνάρτηση! Αν το σκεφτούμε όμως, δεν υπάρχει κατ' αρχάς τίποτα παράξενο αφού κάθε όριο ορίζεται *πλευρικά* και έτσι η εφαπτομένη είναι η ένωση της αριστερής και της δεξιάς εφαπτομένης.

2.4 Κανόνες παραγωγίσης

Αναφέρουμε παρακάτω ορισμένους κανόνες παραγωγίσης που θα μας φανούν πολύ χρήσιμοι σε ό,τι ακολουθεί:

2.4.1 Παράγωγοι δυνάμεων του x

y	$\frac{dy}{dx}$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
$\vdots$	$\vdots$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}

Σημειώνουμε ότι ο τελευταίος τύπος αποδεικνύεται ότι ισχύει και για $n \in \mathbb{R}$.

2.4.2 Παράγωγοι αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου

Έστω f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $k \in \mathbb{R}$. Τότε, οι $f \pm g$, kf , $f \cdot g$ και f/g είναι παραγωγίσιμες (η τελευταία εκεί όπου $g \neq 0$) και ισχύουν οι παρακάτω τύποι:

- Παράγωγος αθροίσματος:

$$\frac{d(f \pm g)}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}.$$

- Παράγωγος βαθμωτού γινομένου:

$$\frac{d(kf)}{dx} = k \frac{df}{dx}.$$

- Παράγωγος γινομένου (κανόνας Leibniz):

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx}.$$

- Παράγωγος πηλίκου:

$$\frac{d(f/g)}{dx} = \frac{g \frac{df}{dx} - f \frac{dg}{dx}}{g^2}.$$

2.4.3 Κανόνας της αλυσίδας

Ο κανόνας της αλυσίδας μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε συνθέσεις παραγωγισίμων συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα την

$$y = (x^2 + 3x + 5)^{5/2}.$$

Αν θέσουμε $u = x^2 + 3x + 5$, μπορούμε να γράψουμε

$$y = u^{5/2},$$

όπου η u είναι μια συνάρτηση $g(x)$ του x . Από την άλλη, αν

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

μπορούμε να θέσουμε

$$u = g(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Τέτοιου είδους καταστάσεις προκύπτουν συχνότατα και εξηγούμε τώρα πώς ο κανόνας της αλυσίδας μας βοηθά για να παραγωγίσουμε τέτοιες συναρτήσεις.

ΚΑΝΟΝΑΣ ΤΗΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ. Αν $y = f(u)$ και $u = g(x)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Στα παραδείγματά μας τώρα: για το πρώτο,

$$\frac{dy}{du} = \frac{5}{2}u^{3/2}, \quad \frac{du}{dx} = 2x + 3.$$

Άρα,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}(x^2 + 3x + 5)^{3/2}(2x + 3).$$

Για το δεύτερο,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2}, \quad \frac{du}{dx} = -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Άρα,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \left(-\frac{2}{(x-1)^2} \right) = -\frac{1}{(x+1)^{1/2}(x-1)^{3/2}}.$$

2.4.4 Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Είναι

y	$\frac{dy}{dx}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

και χρησιμοποιώντας τους κανόνες παραγωγισής παίρνετε επίσης (άσκηση!)

y	$\frac{dy}{dx}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

2.4.5 Παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης

Ας θυμηθούμε ότι

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να παραγωγίσουμε τη σειρά αυτή όρο προς όρο: παίρνουμε

$$\frac{d \exp(x)}{dx} = \exp(x)!$$

Αυτό είναι πολύ σημαντικό: η εκθετική συνάρτηση θα μπορούσε όντως να είχε οριστεί ως η συνάρτηση που έχει παράγωγο τον εαυτό της.

Εάν έχουμε τη συνάρτηση $\exp f(x)$, τότε με τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{d \exp(f(x))}{dx} = \exp(f(x)) \frac{df(x)}{dx}.$$

Δείξτε ως άσκηση:

$$\begin{aligned} \frac{de^{1/x}}{dx} &= -\frac{1}{x^2} e^{1/x}, \\ \frac{de^{4x^2+2x}}{dx} &= (8x+2)e^{4x^2+2x}. \end{aligned}$$

Για $f(x) = a$ σταθερά,

$$\frac{de^{ax}}{dx} = ae^{ax}.$$

Το παραπάνω, παρόλη την απλότητά του, απεικονίζει τη σύνθετη μαθηματική έννοια των ιδιοσυναρτήσεων ενός τελεστή. Εδώ, τελεστής είναι το $\frac{d}{dx}$ που δρά στη συνάρτηση e^{ax} γοα να δώσει την ae^{ax} , δηλαδή, την ίδια τη συνάρτηση πολλαπλασιασμένη με μία σταθερά. Λέμε τότε ότι η e^{ax} είναι ιδιοσυνάρτηση του τελεστή $\frac{d}{dx}$.

2.4.6 Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης

Αν και η παράγωγος της $\ln x$ υπολογίζεται με τον κανόνα εύρεσης της παραγώγου της αντίστροφης συνάρτησης, θα την υπολογίσουμε εδώ ανεξάρτητα από τον κανόνα αυτόν. Έχουμε

$$y = \ln x \iff x = e^{\ln y}.$$

Ιδίως δε,

$$x = e^{\ln x},$$

και παίρνοντας παραγώγους και στα δύο μέλη προκύπτει

$$1 = \frac{de^{\ln x}}{dx} = e^{\ln x} \frac{d \ln x}{dx} = x \frac{d \ln x}{dx}.$$

Οπότε

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Για διάφορες λογαριθμικές παραστάσεις, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\frac{d \ln(f(x))}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}.$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω έκφρασης λέγεται *λογαριθμική παράγωγος* της f και πάρα πολλές φορές είναι χρήσιμη σε υπολογισμούς παραγώγων συναρτήσεων όπως η παρακάτω:

$$y = (x-1)^{12}(x+1)^{50}.$$

Η παράγωγος εδώ μπορεί να υπολογιστεί με τους μέχρι τώρα γνωστούς κανόνες, αλλά η διαδικασία είναι μάλλον χρονοβόρα. Παίρνοντας λογαρίθμους,³ έχουμε

$$\ln y = 12 \ln(x-1) + 50 \ln(x+1).$$

Παραγωγίζοντας,

$$\frac{y'}{y} = \frac{12}{x-1} + \frac{50}{x+1}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (x-1)^{12}(x+1)^{50} \left(\frac{12}{x-1} + \frac{50}{x+1} \right) \\ &= 12(x-1)^{11}(x+1)^{50} + 50(x-1)^{12}(x+1)^{49} \\ &= 12(x^2-1)^{11}(x+1)^{39} + 50(x^2-1)^{12}(x+1)^{37} \\ &= (x^2-1)^{11}(x+1)^{37}(12(x+1)^2 + 50(x^2-1)). \end{aligned}$$

Εφαρμογή: Υπολογίστε χρησιμοποιώντας λογαριθμική παράγωγο την παράγωγο της

$$y = \frac{(3x^2 + 2x + 4)^{3/2}}{(x^4 + 5x^2 + 3x)^2(x+1)}.$$

2.4.7 Παράγωγος της a^x

Μπορούμε πάντοτε να γράψουμε

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}.$$

Οπότε,

$$\frac{da^x}{dx} = a^x \cdot \ln a.$$

2.4.8 Παράγωγοι υπερβολικών συναρτήσεων

Δείξτε ως άσκηση (και συμπληρώστε τα κενά)

y	$\frac{dy}{dx}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	
$\coth x$	
$\operatorname{sech} x$	
$\operatorname{cosech} x$	

³Παρατηρήστε ότι δεν παίρνουμε περιορισμούς για το αν οι λογαριθμίσιμες ποσότητες είναι θετικές, ως οφείλαμε. Αποδεικνύεται ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο, σε κάθε περίπτωση.

2.4.9 Παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης

Έστω ότι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση αντιστρέφεται. Έχουμε εξ ορισμού

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Παίρνουμε παράγωγο ως προς y στο δεξί μέλος:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df^{-1}(y)}{dy}.$$

Οπότε, αν $dy/dx \neq 0$,

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}.$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τον κανόνα αυτόν για να βρούμε την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης. Θα τον εφαρμόσουμε εδώ για να βρούμε την παράγωγο του τόξου ημιτόνου.

$$y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad y \in [-\pi/2, \pi/2].$$

παραγωγίσουμε δεξιά ως προς y :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d \sin y}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}.$$

Αντιστρέφουμε:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{1 - \sin^2 y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείξτε:

$$\begin{aligned} \frac{d \arccos x}{dx} &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \frac{d \arctan x}{dx} &= \frac{1}{1 + x^2}, \\ \frac{d \operatorname{arccot} x}{dx} &= -\frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

2.5 Παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Εάν η παράγωγος dy/dx μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης $y = f(x)$ είναι η ίδια παραγωγίσιμη, τότε ορίζεται η δεύτερη παράγωγος της f ως η παράγωγος της παραγώγου:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

και συμβολίζεται και με $f''(x)$ (όπως και με $\ddot{f}(x)$).

Αναλόγως, αν η δεύτερη παράγωγος είναι παραγωγίσιμη, ορίζεται η τρίτη παράγωγος της f

$$\frac{d^3 y}{dx^3} \quad \text{ή} \quad f'''(x),$$

και με την ίδια συλλογιστική ορίζεται η *τέταρτη* παράγωγος της f

$$\frac{d^4 y}{dx^4} \quad \text{ή} \quad f^{(iv)}(x),$$

και γενικότερα, η n -οστή παράγωγος της f

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{ή} \quad f^n(x).$$

Μία εφαρμογή των παραπάνω, την οποία καλείστε να δείξετε ως άσκηση, είναι η εξής: έστω

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

πολυώνυμο n -βαθμού. Τότε

$$p^{(n+1)}(x) = 0.$$

Σχόλιο 2.5.1. Προσοχή! Υπάρχει κίνδυνος με τις παραγώγους υψηλότερης τάξης των αντιστρώφων. Ενώ έχουμε δει ότι

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

δεν ισχύει εν γένει ότι λ.χ.

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

2.6 Εφαρμογές της παραγωγίσης

2.6.1 Ρυθμός μεταβολής

Η παράγωγος συνάρτηση dy/dx μιας $y = f(x)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του y με το x . Άρα, η παράγωγος περιγράφει κάθε μη στάσιμο σύστημα, όπως λ.χ., τα παρακάτω:

- *Ραδιενεργή μείωση*: Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \quad k \text{ σταθερά},$$

είναι η εξίσωση που δίνει το ρυθμό μείωσης της ραδιενεργής ποσότητας x με τον χρόνο t .

- *Θέση, ταχύτητα, επιτάχυνση*: Αν η $x = x(t)$ είναι η συνάρτηση θέσης ενός σωματιδίου που κινείται πάνω σε έναν άξονα τότε η

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

είναι η *ταχύτητα* του σωματιδίου και η

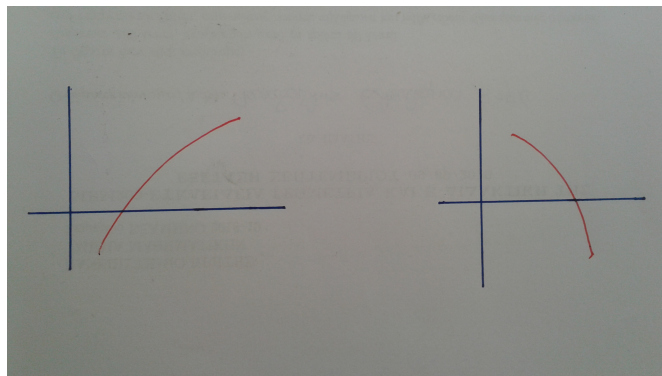
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

είναι η *επιτάχυνση* του σωματιδίου.

2.6.2 Μέγιστα και ελάχιστα, σημεία καμπής

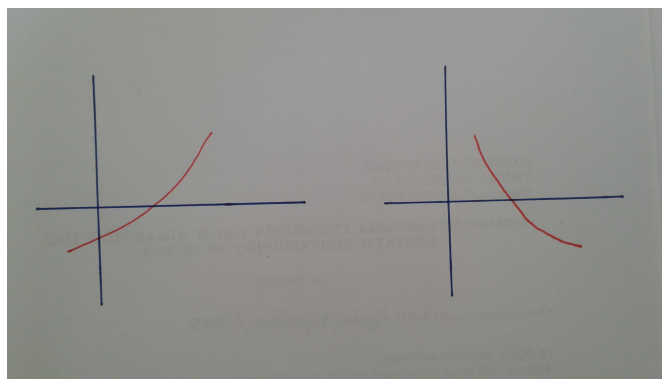
Στην παράγραφο αυτή θα υποθέσουμε ότι η $y = y(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τη δεύτερη παράγωγο και με τα παρακάτω σχήματα θα θυμηθούμε πράγματα γνωστά από το σχολείο:

$$A. \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$



Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η y είναι *κοίλη* ($\curvearrowright$), ή, ότι *στρέφει τα κοίλα άνω*. Στο αριστερό σχήμα, η y είναι *γνησίως αύξουσα* ($\nearrow$) ($dy/dx > 0$), ενώ στο δεξί είναι *γνησίως φθίνουσα* ($\searrow$) ($dy/dx < 0$).

$$B. \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$



Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι η y είναι *κυρτή* ($\curvearrowleft$), ή, ότι *στρέφει τα κοίλα κάτω*. Στο αριστερό σχήμα, η y είναι *γνησίως αύξουσα* ενώ στο δεξί είναι *γνησίως φθίνουσα*.

Στην περίπτωση όπου $\frac{dy}{dx}(x_0) = 0$ σε κάποιο x_0 του πεδίου ορισμού, τότε το (x_0, y_0) καλείται *κρίσιμο σημείο* της y . Στα κρίσιμα σημεία, η εφαπτομένη ευθεία είναι πάντοτε παράλληλη με τον άξονα των x .

Εάν, το πρόσημο της παραγώγου αλλάζει *εκατέρωθεν* του x_0 , τότε λέμε ότι η y παρουσιάζει *τοπικό ακρότατο* στο x_0 . Στους παρακάτω πίνακες φαίνονται οι δύο περιπτώσεις: α) του *τοπικού μεγίστου* (τ.μ.)

dy/dx	+	0	-
y	$\nearrow$	τ.μ.	$\searrow$

και β) του τοπικού ελαχίστου (τ.ε.)

dy/dx	-	0	+
y	↘	τ.ε.	↗

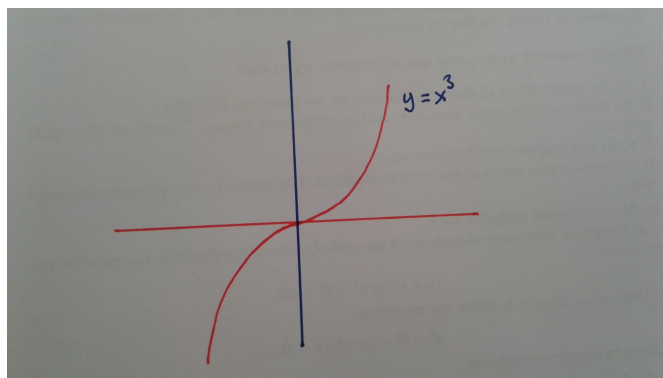
Σχόλιο 2.6.1. Προσοχή! Οι παραπάνω είναι και οι μόνες περιπτώσεις ύπαρξης τοπικού ακροτάτου. Αν η παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο, τότε δεν έχουμε τοπικό ακρότατο. Επίσης, όπως μας εξασφαλίζει ένα θεώρημα του Fermat, τα δυνητικά τοπικά ακρότατα ευρίσκονται μόνο ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία. Δεν υπάρχει κανένα νόημα να ψάχνουμε τοπικά ακρότατα σε σημεία x_0 όπου δεν μηδενίζεται η παράγωγος.

Τα τοπικά ακρότατα μπορούν να εντοπιστούν και με το

Κριτήριο της δευτέρας παραγώγου. Έστω x_0 κρίσιμο σημείο της y . Τότε, αν:

- $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) < 0$, η y παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 .
- $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) > 0$, η y παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .

Θυμηθείτε τώρα τη γραφική παράσταση της $y = x^3$.



Σημείο καμπής στο $(0,0)$

Στο $(0,0)$ παρουσιάζεται η ιδιομορφία όπου η εφαπτομένη διαπερνά τη γραφική παράσταση. Επίσης, $\frac{d^2x^3}{dx^2}(0) = 0$ και η κυρτότητα αλλάζει εκατέρωθεν του 0. Έτσι λοιπόν, λέμε ότι η y παρουσιάζει σημείο καμπής στο x_0 αν $\frac{d^2y}{dx^2}(x_0) = 0$ και το πρόσημο της δευτέρας παραγώγου αλλάζει εκατέρωθεν του x_0 . Οι παρακάτω είναι οι μόνες δυνατές περιπτώσεις σημείου καμπής (σκ.):

d^2y/dx^2	+	0	-
y	↪	σκ.	↩

και

d^2y/dx^2	-	0	+
y	↩	σκ.	↪

Σχόλιο 2.6.2. Προσοχή! Οι παραπάνω είναι και οι μόνες περιπτώσεις ύπαρξης σημείου καμπής. Αν η δεύτερη παράγωγος δεν αλλάζει πρόσημο, τότε δεν έχουμε σημείο καμπής. Επίσης, τα δυνητικά σημεία καμπής ευρίσκονται μόνο ανάμεσα στις ρίζες της δευτέρας παραγώγου.

Παράδειγμα 2.6.3. Έστω η συνάρτηση

$$y = \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Είναι

$$\frac{dy}{dx} = x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} = \frac{(x-1)^3}{x^2}.$$

Η μόνη ρίζα είναι το 1 και το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται μόνο από το $x - 1$. Έχουμε λοιπόν ότι η y είναι

- ↘ στο $(0, 1)$ και
- ↗ στο $(1, +\infty)$.

Άρα παρουσιάζει τ.ε. στο 1, το $y(1) = -3/2$. Όσον αφορά τη δεύτερη παράγωγο, έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3}.$$

Ο αριθμητής έχει ρίζα το 1. Με σχήμα Horner, έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{x^3} = \frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η δεύτερη παράγωγος είναι παντού θετική στο πεδίο ορισμού της, εκτός από το 1 στο οποίο μηδενίζεται. Οπότε, δεν έχουμε σημείο καμπής το 1 και η y είναι παντού ↗.

Παράδειγμα 2.6.4. Η ταχύτητα μιας αυτοκαταλυτικής αντίδρασης δίνεται από την

$$v = kx(a - x),$$

όπου a είναι η αρχική συγκέντρωση του αντιδρώντος υλικού, x είναι η ποσότητα που αποσυντίθεται σε χρόνο t και k είναι μία θετική σταθερά. Η πρώτη παράγωγος

$$\frac{dv}{dx} = k(a - 2x).$$

μηδενίζεται όταν $x = a/2$, όταν δηλαδή ήδη το μισό του υλικού έχει αποσυντεθεί. Επειδή

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -2k < 0,$$

έχουμε σύμφωνα με το κριτήριο της δευτέρας παραγώγου μέγιστη αποσύνθεση στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα 2.6.5. Σε σταθερή πίεση, ο όγκος V ενός γραμμαρίου νερού περιγράφεται ως συνάρτηση της θερμοκρασίας T από την

$$V(T) = a + bT + cT^2 + dT^3,$$

όπου a, b, c, d $b < 0, d > 0$, είναι σταθερές. Η παράγωγος είναι

$$\frac{dV}{dT} = b + 2cT + 3dT^2$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{d^2V}{dT^2} = 2c + 6dT.$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ρίζα T_0 της πρώτης παραγώγου, τότε

$$\frac{d^2V}{dT^2}(T_0) = 2c + 6dT_0 = \frac{cT_0 + 3dT_0^2 + 3dT_0^2}{T_0} = \frac{3dT_0^2 - b}{T_0} > 0.$$

Έχουμε λοιπόν ελαχιστοποίηση του όγκου.

2.6.3 Σχεδίαση καμπύλης

Είναι συχνά χρήσιμο να είμαστε σε θέση να κάνουμε ώνα πρόχειρο σχέδιο μιας καμπύλης δείχνοντας τα βασικά χαρακτηριστικά της, χωρίς κατ' ανάγκη να είμαστε απόλυτα ακριβείς. Με ένα παράδειγμα, δείχνουμε τη διαδικασία. Έστω η

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}, \quad x \neq -1, -2.$$

1. Βρίσκουμε τις τιμές μηδενισμού της y , δηλαδή, τα σημεία τομής της με τον άξονα των x . Εδώ είναι $x = 1, x = 2$.
2. Βρίσκουμε την $y(0)$, δηλαδή, το σημείο τομής με τον άξονα των y . Εδώ, $y(0) = 1$.
3. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της y στο $\pm\infty$, δηλαδή, ψάχνουμε για οριζόντιες ασυμπτώτες. Εδώ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1,$$

και όντως, η $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη.

4. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της y στα σημεία που δεν ορίζεται. Εδώ είναι τα $x = -1, x = -2$. Δείτε τώρα ότι

$$\lim_{x \rightarrow -1} y = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0}.$$

Οπότε,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0^-} = -\infty,$$

ενώ,

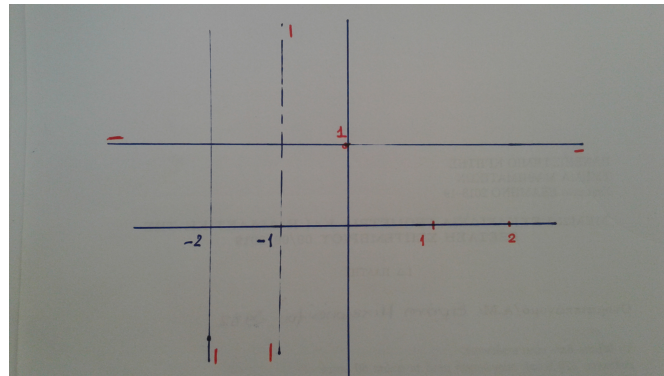
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{6}{x+1} = \frac{6}{0^+} = +\infty.$$

Δεν έχει καμμία σημασία που τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά. Σε κάθε περίπτωση, η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη. Με τον ίδιο τρόπο, μπορείτε να δείξετε ότι

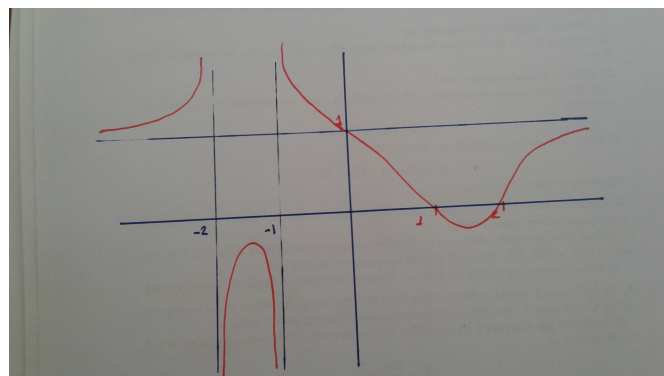
$$\lim_{x \rightarrow -2} y = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-12}{x+2} = \begin{cases} +\infty & \text{αν } x \rightarrow -2^-, \\ -\infty & \text{αν } x \rightarrow -2^+. \end{cases}$$

Άρα, και η $x = -2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Οι έως εδώ πληροφορίες για την y βρίσκονται τώρα στο παρακάτω σχήμα:



Οπότε, μπορεί κανείς από τις πληροφορίες αυτές και μόνο να συμπληρώσει το σχήμα της y ως εξής:

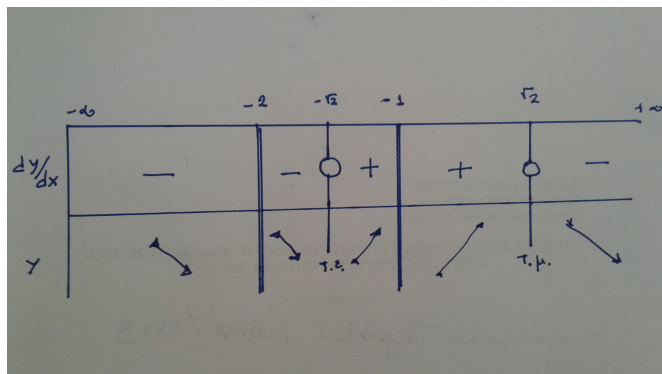


Αυτό το σχήμα είναι σχεδόν ακριβές και δείτε ότι δεν χρησιμοποιήσαμε πουθενά τα κριτήρια της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου. Κι αυτό γιατί τα κριτήρια αυτά είναι τοπικής σημασίας, μας προσδιορίζουν τοπικά ακρότατα και σημεία καμπής. Ουσιαστικά λοιπόν, το παρακάτω σχέδιο έγινε με τη χρήση ορίων και της συνέχειας της y .

Δείτε τώρα τη δυσκολία να υπολογίσουμε ακριβώς τα ακρότατα και τα σημεία καμπής. Ήδη, η πρώτη παράγωγος έχει κάποιους υπολογισμούς:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6(x^2 - 2)}{(x^2 + 3x + 2)^2}.$$

Το πρόσημο της πρώτης παραγώγου εξαρτάται μόνο από το πρόσημο του αριθμητή, καθώς ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός. Έτσι, έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:



Καταλαβαίνουμε ότι η y έχει τοπικό ελάχιστο στο $-\sqrt{2}$, το -34 και τοπικό μέγιστο στο $\sqrt{2}$, το -0.029 (περίπου).

Το μόνο που μας απέμεινε είναι η κυρτότητα και τα σημεία καμπής. Η δεύτερη παράγωγος είναι:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-12(x^3 - 6x - 6)}{(x^2 + 3x + 2)^3}$$

και μηδενίζεται όταν $x^3 - 6x - 6 = 0$. Προσέξτε ότι έχουμε μία πολυωνυμική εξίσωση τρίτου βαθμού και δεν υπάρχουν εύκολες ρίζες (δηλαδή, ακέραιες). Για την ακρίβεια, υπάρχει μόνο μία πραγματική ρίζα, η 2.87 (περίπου). Για το πρόσημο τώρα της δευτέρας παραγώγου, πρέπει να εξετάσουμε και το πρόσημο του αριθμητή, αλλά και του παρονομαστή. (Άσκηση!)

Συμπεραίνουμε λοιπόν κατόπιν όλων αυτών ότι η πιο πάνω υπολογιστική πληροφορία συνέβαλε μάλλον λίγο στη σχεδίαση της γραφικής παράστασης της y . Αυτός είναι μάλλον ο κανόνας στην περίπτωση απλών συναρτήσεων, όπως οι πολυωνυμικές και οι ρητές.

Παράδειγμα 2.6.6. Η εξίσωση van der Waals

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

δεν αντιπροσωπεύει ακριβώς την PVT συμπεριφορά ενός αερίου κοντά στο σημείο υγροποίησης αλλά χρησιμοποιείται για να ορίσουμε τις κρίσιμες σταθερές των P , V και T , τις οποίες και συμβολίζουμε με P_c , V_c και T_c , για τις οποίες ισχύει $dP/dV = 0$ και $d^2P/dV^2 = 0$. Δηλαδή, το σημείο εκείνο για το οποίο το μέγιστο και το ελάχιστο συγχωνεύονται στο σημείο καμπής. Λύνοντας την εξίσωση έχουμε

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{n^2a}{V^2}.$$

Οπότε

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{(V - nb)^2} + \frac{2n^2a}{V^3}.$$

Επίσης,

$$\frac{d^2P}{dV^2} = \frac{2nRT}{(V - nb)^3} - \frac{6n^2a}{V^4}.$$

Ο μηδενισμός των δύο παραπάνω εξισώσεων δίνει:

$$V_c = 3b, \quad T_c = \frac{8a}{27bR}, \quad P_c = \frac{a}{27b^2}.$$

2.6.4 Διαφορικά

Θυμηθείτε τον ορισμό της παραγώγου:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ας τον γράψουμε ισοδύναμα ως

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{h} = 0.$$

Για να έχει νόημα το όριο, πρέπει η διαφορά $f(x+h) - f(x)$ να είναι περίπου ίση με $hf'(x)$ όταν το h είναι αρκούντως μικρό, δηλαδή,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \phi(h),$$

όπου $\phi(h) \rightarrow 0$ καθώς $h \rightarrow 0$.

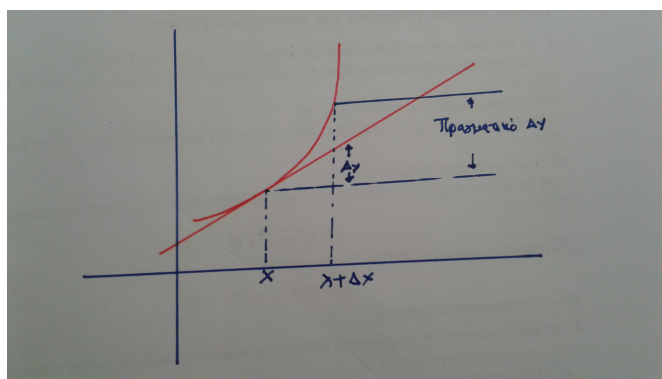
Η μεταβολή της f στο x είναι η

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

και έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta y = f'(x)\Delta x, \quad \text{όπου } \Delta x = (x+h) - x = h.$$

Πρακτικά, αυτό που κάνουμε είναι μία γραμμικοποίηση της f κοντά στο x και αντί να μελετάμε τις πραγματικές μεταβολές, μελετάμε τις μεταβολές στην εφαπτομένη (που είναι η ίδια η γραμμικοποίηση).



Σύγκριση μεταβολής και πραγματικής μεταβολής

Πού χρησιμοποιείται αυτό; Ας δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο καλούμαστε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός λεπτού σφαιρικού κελύφους εσωτερικής ακτίνας r και πάχους Δr . Ο όγκος σφαίρας ακτίνας r είναι

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

οπότε

$$\Delta V \sim \frac{dV}{dr} \Delta r = 4\pi r^2 \Delta r.$$

Από την άλλη, ο πραγματικός όγκος είναι:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= 4\pi r^2 \Delta r + 4\pi r(\Delta r)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta r)^3,\end{aligned}$$

ώστε οι δυνάμεις που είναι ανώτερες ή ίσες της δευτέρας αγνοούνται στη γραμμικοποίηση.

Η σχέση

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x$$

είναι πάντοτε προσεγγιστική, σε αντίθεση με την

$$dy = f'(x)dx,$$

που ορίζει το διαφορικό της f στο x , και είναι η προηγούμενη σχέση αλλά στο όριο. Για να γίνει αυτό σαφές, δείτε ότι

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

(και όξι $\sim$ όπως στη σχέση της μεταβολής). Στη Χημεία, αλλά και στη Φυσική, είναι σύνηθες να προκύπτει μία σχέση της μορφής

$$\Delta y \sim f'(x)\Delta x$$

και κατόπιν, περνώντας στο όριο να συνάγουμε

$$dy = f'(x)dx,$$

παίρνοντας έτσι έκφραση για την παράγωγο.

Παράδειγμα 2.6.7. Η ποσότητα ενός αερίου σε πίεση P βρίσκεται εντός κυλίνδρου διατομής A . Πιέζοντας εσωτερικό πιστόνι κατά Δl και υποθέτοντας ότι η P παραμένει περίπου σταθερή, αν συμβολίσουμε με W το έργο που παράγει το αέριο, τότε

$$\Delta W \sim PA \cdot \Delta l.$$

Επειδή $A \cdot \Delta l = \Delta V$, η μεταβολή του όγκου V , έχουμε

$$\Delta W \sim P \cdot \Delta V.$$

Αφήνοντας το $\Delta V \rightarrow 0$,

$$dW = PdV$$

και εκφράσαμε το φυσικό μας πρόβλημα με μία εξίσωση διαφορικών. Θα δούμε στο παρακάτω κεφάλαιο πώς από την έκφραση αυτή μπορεί να προσδιοριστεί το έργο W .

Παράδειγμα 2.6.8. Η εξίσωση *Clapeyron-Clausius* είναι η

$$V_1 dP - S_1 dT = V_2 dP - S_2 dT,$$

όπου V_1, V_2, S_1, S_2 είναι ο μοριακός όγκος και η μοριακή εντροπία σε δύο φάσεις, ενώ dP και dT είναι τα διαφορικά της πίεσης και της θερμοκρασίας, αντίστοιχα. Μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta V \cdot dP = \Delta S \cdot dT.$$

Εδώ όμως, οι ΔV και ΔS παριστάνουν μεταβολές όγκου και εντροπίας, αντίστοιχα, που δεν είναι κατ' ανάγκη μικρές. Κατά συνέπεια **δεν** μπορούμε να πάρουμε όρια και να συμπεράνουμε ότι $dV \cdot dP = dS \cdot dT$ (!)

2.7 Παραγωγήιση πεπλεγμένων συναρτήσεων

Εάν θέλαμε να βρούμε την παράγωγο της πεπλεγμένης συνάρτησης

$$y^2 - 2xy + 1 = 0,$$

θα μπορούσαμε, για $x^2 - 1 > 0$ να γράφαμε ισοδύναμα

$$y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

και κατόπιν να παραγωγίσουμε. Υπάρχουν πολλά *στραβά* εδώ. Εκτός της προϋπόθεσης $x^2 - 1 > 0$, έχουμε **δύο** συναρτήσεις. Ακόμα και έτσι όμως, αυτό δε θα μπορούσαμε να το κάνουμε (εύκολα τουλάχιστον) για την έκφραση

$$x^5 + 4xy^3 - 3y^5 = 2. \quad (2.1)$$

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε εδώ είναι να θεωρήσουμε ότι (τουλάχιστον τοπικά) η y είναι συνάρτηση του x και να παραγωγίσουμε ως προς x την (2.1). Επίσης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η x είναι συνάρτηση του y και να παραγωγίσουμε την (2.1) ως προς y .

Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε

$$2y \frac{dy}{dx} - 2y + 2x \frac{dy}{dx} = 0,$$

οπότε, αν $y \neq x$ παίρνουμε την παράγωγο σε πεπλεγμένη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - x}.$$

Στη δεύτερη περίπτωση παίρνουμε

$$2y - 2x - 2y \frac{dx}{dy} = 0,$$

οπότε, πάλι για $y \neq x$ παίρνουμε το αναμενόμενο

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y - x}{y}.$$

Σε κάθε περίπτωση, λέμε ότι η παράγωγος δίνεται υπό *πεπλεγμένη μορφή*.

2.8 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x + 2}.$$

2. Υπάρχουν τα παρακάτω όρια;

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x + 3}.$$

3. Βρείτε χρησιμοποιώντας *μόνο* τον ορισμό, τις παραγώγους των:

i) $x^2 + 1$,

- ii) x^3 ,
- iii) $2x^2 - 3x$,
- iv) $\frac{1}{x+1}$.

4. Βρείτε τις κλίσεις των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται:

$$\text{i) } y = x^{2/3}, (8, 4) \quad \text{ii) } y = \frac{3x^2}{5} - 2x^8, (1, -7/5).$$

5. Παραγωγίστε τις παρακάτω ως προς x :

- i) $7x^3 + 4x^2$,
- ii) $2x^{1/3}$,
- iii) $x^{-3/4}/2$,
- iv) $(2x^2 - 1)(x^2 + 4)$.
- v) $\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 4}$.
- vi) $(1 - 5x^2)^6$.
- vii) $\sqrt{x/(1-x)}$.
- viii) $\sin(3x) + \cos^3(x)$.
- ix) $\ln(\cos(x)) + e^{5-3x}$.

6. Σχεδιάστε τις

$$a) y = \frac{x-3}{(x-2)^2}, \quad b) y = \frac{x^2-9}{x(x-1)}, \quad c) y = \frac{x^2(2-x)}{x+2}.$$

7. Ένα σωματίδιο κινούμενο στο χρόνο t διανύει απόσταση

$$s(t) = t^3 - 2t + 1.$$

Σε ποια χρονική στιγμή έχει μηδενική επιτάχυνση;

8. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα ακρότατα σημεία και τα σημεία καμπής των

$$y = x^3 - 5x^2 + 3x, \quad y = \frac{x}{1+x^2}.$$

9. Η συγκέντρωση b του B στις διαδοχικές αντιδράσεις

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

δίνεται από την

$$b = b(t) = a_0 \left(\frac{k_1}{k_2 - k_1} \right) \cdot (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}).$$

Βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 στην οποία η συγκέντρωση μεγιστοποιείται.

10. Η πιθανότητα P να βρεθεί ηλεκτρόνιο στην πρώτη στοιβάδα του ατόμου τού υδρογόνου σε απόσταση r από τον πυρήνα, δίνεται από την

$$P = P(r) = 4\pi r^2 \left(\frac{e^{-2r/a_0}}{\pi a_0^2} \right),$$

όπου a_0 είναι σταθερά. Σε ποια απόσταση μεγιστοποιείται η P ;

11. Η πιθανότητα P ενός μορίου μάζας m σε ένα αέριο σε θερμοκρασία T να έχει ταχύτητα c δίνεται από την

$$P = P(T) = c^2 \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot e^{-mc^2/2kT},$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzmann. Δείξτε ότι η μέγιστη πιθανότητα είναι για $c = \sqrt{2kT/m}$.

12. Βρείτε τις dy/dx και dx/dy στις παρακάτω:

1. $3x^2 + 7xy + 9y^2 = 6$,
2. $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$,
3. $x^3 + y^3 = 3xy$.

13. Με λογαριθμική παραγωγήιση υπολογίστε τις παραγώγους των παρακάτω:

$$(i) \quad y = \sqrt{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}},$$

$$(ii) \quad y = (\sin(x))^{\tan(x)},$$

$$(iii) \quad y = \frac{x(x^2+1)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}.$$