

Κεφάλαιο 3

Ολοκληρωτικός λογισμός

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε το ρυθμό μεταβολής, δηλαδή την παράγωγο μιας συνάρτησης. Εδώ θα ασχοληθούμε με το αντίστροφο πρόβλημα: εάν μας δίνεται μια συνάρτηση $f(x)$, υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $F(x)$ τέτοια ώστε

$$\frac{dF}{dx} = f(x); \quad (3.1)$$

Τιθέμενο με αυτόν τον απλό τρόπο, το πρόβλημα δεν έχει εν γένει εύκολη απάντηση. Μία τυχαία f μπορεί να είναι πάρα πολύ κακή και δεν μπορούμε να περιμένουμε την ύπαρξη τέτοιας F . Παρ' όλα αυτά, θα δούμε ότι για τις περισσότερες, αν όχι όλες τις συναρτήσεις που έχουμε συναντήσει ως τώρα, καθώς και για τις συνθέσεις τους, η ύπαρξη τέτοιας F είναι εξασφαλισμένη.

3.1 Το αόριστο ολοκλήρωμα

Θα υποθέσουμε την ύπαρξη παραγωγίσιμης F που ικανοποιεί την (3.1) και θα την καλούμε *παράγουσα* (ή, *αντιπαράγωγο*) της f . Ας παρατηρήσουμε αρχικά ότι και κάθε συνάρτηση της μορφής $F(x) + c$ όπου c είναι τυχούσα σταθερά, είναι επίσης παράγουσα της f .¹

Το *αόριστο ολοκλήρωμα*

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

είναι ακριβώς η μονοπαραμετρική οικογένεια των παραγουσών της f . Το αόριστο ολοκλήρωμα έχει μόνο μία ιδιότητα, η οποία όμως είναι σημαντική: αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx.$$

¹ Αποδεικνύεται ότι όλες οι παράγουσες είναι αυτής της μορφής. Αυτό γίνεται ως εξής: έστω G μία παράγουσα της f . Τότε

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dF}{dx} = f(x)$$

και άρα

$$\frac{d(F - G)}{dx} = 0.$$

Από το *Θεώρημα Μέσης Τιμής* τότε, συνάγεται ότι $G(x) = F(x) + c$.

3.2 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Η αόριστη ολοκλήρωση είναι όπως είπαμε η αντίστροφη διαδικασία της παραγώγισης. Για να βρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ σκεφτόμαστε ως εξής:

ποιά συνάρτηση F , αν παραγωγιστεί, θα μας δώσει την f ;

Για πολλές συναρτήσεις, η ερώτηση αυτή έχει απλή απάντηση, δείτε τους παρακάτω πίνακες. Για κάποια ολοκληρώματα όμως, όπως το

$$\int e^{-x^2} dx,$$

που απαντάται σχεδόν παντού, στη στατιστική θερμοδυναμική, στην κινητική θεωρία αερίων, στη στατιστική κ.λ.π., δεν υπάρχει (απλή τουλάχιστον) απάντηση.

3.2.1 Στοιχειώδη ολοκληρώματα

Στους παρακάτω πίνακες περιέχονται ορισμένες στοιχειώδεις συναρτήσεις, οι παράγουσές τους και τα αόριστα ολοκληρώματά τους. Κατ' αρχάς έχουμε τις μονωνυμικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
a σταθ.	ax	$ax + c$
$x^n, n \in \mathbb{R}, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\ln x + c$

Ακολουθούν οι τριγωνομετρικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$-\cot x + c$

Για τις εκθετικές έχουμε:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
e^x	e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$

Ορισμένες υπερβολικές τριγωνομετρικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\cosh x + c$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\sinh x + c$

Τέλος, κάποιες αντίστροφες τριγωνομετρικές:

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$\arcsin x + c$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\arccos x$	$\arccos x + c$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\arctan x + c$

3.2.2 Μέθοδος αντικατάστασης

Κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής, μπορούμε να φέρουμε ένα ολοκλήρωμα σε μία από τις τυπικές μορφές των παραπάνω πινάκων.

Παράδειγμα 3.2.1. Έστω το

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}.$$

Θέτουμε $y = ax + b$ και άρα $dy = adx$. Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{1}{a} \int y^{-1/2} dy \\ &= \frac{1}{a} \cdot \frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\ &= -\frac{2}{a} \sqrt{ax+b} + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.2. Έστω το

$$I = \int \frac{dx}{(a-x)^2}.$$

Θέτουμε $y = a - x$ και άρα $dy = -dx$. Άρα,

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{dy}{y^2} \\ &= \frac{1}{y} + c \\ &= \frac{1}{a-x} + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.3. Στη στατική θερμοδυναμική, εμφανίζεται το ολοκλήρωμα

$$I_0 = \int (2J+1) \exp\left(\frac{-BJ(J+1)}{kT}\right) dJ.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{d}{dJ} \left(\frac{-BJ(J+1)}{kT} \right) = -\frac{B}{kT} \cdot (2J+1).$$

Με άλλα λόγια, μας εμφανίζεται η ιδανική κατάσταση όπου η ολοκληρωτέα παοσότητα είναι της μορφής

$$I = k \int f(g(x))g'(x)dx, \quad k \text{ σταθερά.}$$

Στην περίπτωση αυτή, η αντικατάσταση

$$y = g(x), \quad dy = g'(x)dx$$

δίνει

$$I = k \int f(y)dy.$$

Στο παράδειγμά μας, η αντικατάσταση

$$y = -\frac{BJ(J+1)}{kT}, \quad dy = -\frac{B}{kT} \cdot (2J+1)dJ$$

συνεπάγεται ότι

$$I_0 = -\frac{kT}{B} \int \exp(y)dy = -\frac{kT}{B} \exp\left(\frac{-BJ(J+1)}{kT}\right) + c.$$

Τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

Χρησιμοποιούμε ευρέως τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις σε ολοκληρώματα των παρακάτω μορφών (δεξιά φαίνονται οι αντικαταστάσεις):

•

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad x = a \cosh y.$$

•

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad x = a \sin y.$$

•

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad x = a \sinh y.$$

Ενδεικτικά, υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα. Είναι για $a > 0$:

$$x = a \sinh y \implies dx = a \cosh y dy.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{a \cosh y dy}{\sqrt{a^2 \sinh^2 y + a^2}} \\ &= \frac{a}{a} \int \frac{\cosh y dy}{\sqrt{\sinh^2 y + 1}} \\ (\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1) &= \int \frac{\cosh y dy}{\sqrt{\cosh^2 y}} \\ (\cosh y > 0) &= \int dy = y + c \\ &= \operatorname{arcsinh} \left(\frac{x}{a} \right) + c. \end{aligned}$$

Αλγεβρικές αντικαταστάσεις

Κάποιες φορές, ολοκληρώματα τα οποία περιέχουν ρίζες, ενδέχεται να απλοποιηθούν θέτοντας τη ρίζα ως τη νέα μεταβλητή.

Παράδειγμα 3.2.4. Για το ολοκλήρωμα

$$I = \int x \sqrt{4x+1} dx$$

θέτουμε $y = \sqrt{4x+1}$, οπότε

$$x = \frac{y^2 - 1}{4}, \quad dx = \frac{1}{2} y dy.$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int y^2 (y^2 - 1) dy \\ &= \frac{1}{8} \int (y^4 - y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{3} \right) + c \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{(4x+1)^{5/2}}{5} - \frac{(4x+1)^{3/2}}{3} \right) + c. \end{aligned}$$

Άσκηση: Υπολογίστε το

$$I = \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$$

Μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών ολοκληρωτέων ποσοτήτων

Μερικές φορές οι απλοί τριγωνομετρικοί τύποι μας βοηθούν να υπολογίσουμε ολοκληρώματα που περιέχουν παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Παράδειγμα 3.2.5. • Το ολοκλήρωμα της $\tan x$ (αναλόγως προκύπτει και το ολοκλήρωμα της $\cot x$):

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c.$$

• Το ολοκλήρωμα της $\sin^2 x$ (αναλόγως προκύπτει και το ολοκλήρωμα της $\cos^2 x$):

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = -\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c.$$

• Το ολοκλήρωμα της $\cos^3 x$ (όπως και αυτό της $\sin^3 x$) είναι ελαφρώς πιο περίπλοκο:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int \cos x - \int \sin^2 x (\sin x)' dx \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c. \end{aligned}$$

3.2.3 Μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες

Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες είναι η δεύτερη (μετά τη μέθοδο της αντικατάστασης) εξαιρετικά χρήσιμη μέθοδος ολοκλήρωσης που βλέπουμε. Σημειώνουμε ότι για τον υπολογισμό κάποιων ολοκληρωμάτων απαιτείται συνδυασμός των δύο μεθόδων, ή ακόμα και κάποιο τέχνασμα. Η μέθοδος της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες συνίσταται στο να γράψουμε τον κανόνα του Leibniz της παραγώγισης του γινομένου συναρτήσεων στην ολοκληρωτική του μορφή:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx. \quad (3.2)$$

Κάποιες ευρείες κατηγορίες ολοκληρωμάτων που υπολογίζονται με ολοκλήρωση κατά παράγοντες είναι οι παρακάτω:

• Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \sin(ax + b) dx \quad \text{και} \quad \int P(x) \cos(ax + b) dx,$$

όπου $P(x)$ είναι πολυώνυμο.

Εδώ, γράφουμε στο αριστερό ολοκλήρωμα

$$\sin(ax + b) = -\frac{(\cos(ax + b))'}{a},$$

ενώ στο δεξιό γράφουμε

$$\cos(ax+b) = \frac{(\sin(ax+b))'}{a}.$$

Για παράδειγμα

$$\int x \sin x dx = - \int x (\cos x)' dx = -x \cos x + \int (x)' \cos x dx = -x \cos x + x + c.$$

Άσκηση: Υπολογίστε το

$$\int x^2 \cos x dx.$$

Θα χρειαστεί να κάνετε δύο φορές παραγοντική ολοκλήρωση. Γενικά για τέτοια ολοκληρώματα κάνουμε n φορές παραγοντική ολοκλήρωση, όπου n είναι ο βαθμός του $P(x)$.

- Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \exp(ax+b) dx,$$

όπου $P(x)$ είναι πολυώνυμο.

Εδώ γράφουμε

$$\exp(ax+b) = \frac{(\exp(ax+b))'}{a}.$$

Για παράδειγμα

$$\int x e^x dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx = x e^x - e^x + c.$$

Άσκηση: Υπολογίστε το

$$\int (x^2 - 1) e^{2x} dx.$$

- Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int P(x) \ln(ax+b) dx,$$

όπου $P(x)$ είναι πολυώνυμο.

Εδώ, σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσεις, γράφουμε

$$P(x) = Q'(x)$$

όπου Q είναι παράγουσα του P . Για παράδειγμα

$$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int x (\ln x)' dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c.$$

Άσκηση: Υπολογίστε το

$$\int (x+1) \ln(3x) dx.$$

- Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \exp(dx+f) \sin(ax+b) dx \quad \text{και} \quad \int \exp(dx+f) \cos(ax+b) dx.$$

Με ένα παράδειγμα δείχνουμε πώς υπολογίζουμε τέτοια ολοκληρώματα. Έστω το

$$I = \int e^x \sin x dx.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} I &= \int (e^x)' \sin x dx \\ &= e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \text{κάνουμε δεύτερη φορά κατά παράγοντες ολοκλήρωση!} \\ &= e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Παίρνουμε συνεπώς

$$I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c.$$

Σημειώνουμε ότι θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$I = - \int e^x (\cos x)' dx$$

και να κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση. Θα έπρεπε απλώς να είμαστε προσεκτικοί την δεύτερη φορά που θα κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και να γράψουμε πάλι τον τριγωνομετρικό παράγοντα σαν παράγωγο και όχι τον εκθετικό.

Άσκηση: Υπολογίστε το

$$\int e^{-x} \cos(3x) dx.$$

Αναδρομικοί τύποι

Δίνουμε παρακάτω δύο παραδείγματα ολοκληρωμάτων τα οποία υπολογίζονται μέσω αναδρομικού τύπου:

Παράδειγμα 3.2.6. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int x^n e^x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} I_n &= \int x^n (e^x)' dx \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \\ &= x^n e^x - n I_{n-1}. \end{aligned}$$

Μπορούμε συνεπώς από τον αναδρομικό τύπο

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1}$$

να υπολογίσουμε οποιοδήποτε τέτοιο ολοκλήρωμα. Λόγου χάρη

$$\begin{aligned} I_3 = \int x^3 e^x dx &= x^3 e^x - 3I_2 \\ &= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2I_1) \\ &= x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6(xe^x - I_0) \\ &= (x^3 - 3x^2 + 6x - 1)e^x + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.7. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I_n = \int \sin^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-1} x \sin x dx = - \int \sin^{n-1} x (\cos x)' dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} + (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2}.$$

Άσκηση: Βρείτε αναδρομικό τύπο για το

$$J_n = \int \cos^n x dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Υπολογίστε κατόπιν το J_4 .

3.2.4 Ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων

Στη γενική του μορφή, ένα ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης είναι της μορφής

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

όπου $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα. Ίσως η πιο εύκολη μορφή ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης είναι εκείνη στην οποία ο αριθμητής είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της παραγώγου του παρονομαστή.

$$I = \int \frac{kQ'(x)}{Q(x)} dx = k \ln |Q(x)| + c.$$

Εάν ο βαθμός $\deg P$ του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού $\deg Q$ του παρονομαστή, πρέπει να κάνουμε διαίρεση πολυωνύμων:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = D(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}.$$

Εδώ, $D(x)$ είναι πολυώνυμο, $\deg r < \deg Q$ και έτσι

$$I = \int D(x)dx + \int \frac{p(x)}{Q(x)}dx.$$

Η διαίρεση πολυωνύμων μπορεί πολλές φορές να είναι μία μακροσκελής διαδικασία. Για κάποιες περιπτώσεις όμως απλουστεύεται, όπως στα παρακάτω παραδείγματα όπου ο βαθμός του αριθμητή είναι ίσος με τον βαθμό του παρονομαστή.

Παράδειγμα 3.2.8. Για το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{3x+1}{2x-3}dx,$$

προσπαθούμε να παρουσιάσουμε τον παρονομαστή στον αριθμητή:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-3) + \frac{11}{2}}{2x-3}dx \\ &= \frac{3}{2} \int dx + \frac{11}{2} \int \frac{dx}{2x-3} \\ &= \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln|2x-3| + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.9.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-x-2}dx \\ &= \int \frac{(x^2-x-2) + (4x-2)}{x^2-x-2}dx \\ &= \int dx + 2 \int \frac{2x-1}{x^2-x-2}dx \\ &= x + 2 \ln|x^2-x-2| + c. \end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση βεβαίως, όταν έχουμε αναγάγει το αρχικό ολοκλήρωμα σε κάποιο της μορφής

$$I = \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx,$$

με $\deg r < \deg Q$, δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι $r = kQ'$. Τότε, θα χρησιμοποιούμε την τεχνική της *ανάλυσης σε απλά κλάσματα*, που περιγράφεται στα παρακάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα 3.2.10. Έστω το ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}.$$

Βλέπουμε ότι ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή και ότι ο παρονομαστής είναι γινόμενο μονωνύμων υψωμένων στην πρώτη δύναμη. Τότε υπάρχουν αριθμοί A, B τέτοιοι ώστε:

$$\frac{xdx}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}.$$

Υπολογίζουμε τους A, B με το τέχνασμα του *Heaviside*: Απαλείφουμε πρώτα τους παρονομαστές:

$$x = A(x+2) + B(x+1).$$

Για $x = -1$ παίρνουμε $A = -1$ και για $x = -2$ παίρνουμε $B = 2$. Άρα,

$$I = - \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{dx}{x+2} = -\ln|x+1| + 2\ln|x+2| + c.$$

Άσκηση. Στην άσκηση αυτή καλέστε να λύσετε τη διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x),$$

όπου k, a, b είναι σταθερές, κάνοντας τα εξής βήματα: χωρίζετε πρώτα τις μεταβλητές

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k dt$$

και κατόπιν παίρνετε ολοκληρώματα και στα δύο μέλη:

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = k \int dt = kt + c.$$

Υπολογίστε τώρα το αριστερό ολοκλήρωμα με την τεχνική της ανάλυσης σε απλά κλάσματα. Η λύση είναι (υπό πεπλεγμένη μορφή)

$$\frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right| = kt + c.$$

Παράδειγμα 3.2.11. Ενδέχεται να έχουμε ολοκλήρωμα της μορφής

$$I = \int \frac{x dx}{(x-1)^2}.$$

Γράφουμε

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

και απαλείφοντας τους παρονομαστές,

$$x = A(x-1) + B.$$

Για $x = 1$, παίρνουμε $B = 1$. Θέτουμε τώρα οποιαδήποτε τιμή για το x . αρκεί να είναι διαφορετική του 1. Η απλούστερη είναι η $x = 0$ και παίρνουμε έτσι

$$0 = -A + 1 \implies A = 1.$$

Άρα,

$$I = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c.$$

Παράδειγμα 3.2.12. Για το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$I = \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2+1)}$$

λέτουμε

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

και απαλείφοντας τους παρονομαστές

$$x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1).$$

Για $x = 1$ παίρνουμε $A = 1/2$. Για να βρούμε τώρα τα B, C θέτουμε δύο τυχαίες τιμές για το x , διαφορετικές του 1. Για $x = 0$ παίρνουμε $c = 1/2$ και για $x = -1$ παίρνουμε $B = 1/2$. Οπότε,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctan x + c. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.13. Τέλος, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου ο παρονομαστής είναι τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα, όπως στο

$$I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Στην περίπτωση αυτή, συμπληρώνουμε το τετράγωνο στον παρονομαστή:

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα

$$y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, \quad dy = \frac{2}{\sqrt{3}} dx$$

και έτσι

$$I = \frac{8}{\sqrt{3}} \int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c.$$

Σημειώνουμε ότι η μέθοδος του τελευταίου παραδείγματος χρησιμοποιείται για να φέρουμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

σε κάποια από τις μορφές

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$