ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

(για το μάθημα Μ104 Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ)

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Τμήμα Μαθηματικών

2011

Πρόλογος

Οι πρόχειρες αυτές σημειώσεις διαφορικών εξισώσεων γράφτηκαν για τις φοιτήτριες και τους φοιτητές του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης, που παρακολουθούν το μάθημα Μ104 Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ. Σκοπός τους είναι να αποτελέσουν μία *γρήγορη* εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις, ώστε οι ενδιαφερόμενοι να αποκτήσουν την ικανότητα να *επιλύουν* τις εξισώσεις αυτές. Συνεπώς, είναι πέρα από τη στόχευση των σημειώσεων αυτών η οποιαδήποτε εμβάθυνση στην πλούσια θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Προφανώς ομως, η θεωρία δεν μπορεί να παραβλεφθεί· όπου χρειάζεται θα παρατίθεται, ενίοτε και με αποδείξεις.

Ι.Δ. Πλατής
Ηράκλειο Κρήτης, 2011

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή και βασικές έννοιες **1**
1.1 Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 2

2 Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης **5**
2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών 5
2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 6
2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 9
2.4 Διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli 12
2.5 Διαφορικές εξισώσεις του Riccati 13
2.6 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις 14
2.7 Ολοκληρωτικοί παράγοντες 18
2.8 Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 21
2.8.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα 21
2.8.2 Διάστημα ορισμού 22
2.9 Ορισμένες εφαρμογές 23
2.9.1 Ισογώνιες τροχιές 23
2.9.2 Ταχύτητα διαφυγής 24

3 Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης **27**
3.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης 27
3.1.1 Ομογενείς γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές 28
3.1.2 Μη ομογενείς γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές 32
3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης $n > 2$ 38
3.3 Ορισμένες εφαρμογές 42
3.3.1 Αρμονική ταλάντωση εκκρεμούς 42
3.3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του Euler 43

4 Συστήματα διαφορικών εξισώσεων **45**
4.1 Εισαγωγή, ορισμοί, θεωρήμα ύπαρξης και μοναδικότητας 45
4.2 Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης 48
4.2.1 Λύση γραμμικών συστημάτων με απαλοιφή 48
4.2.2 Βασική θεωρία γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων . 49
4.2.3 Γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές 54

4.3 Ορισμένες εφαρμογές 61
4.3.1 Γραμμικά συστήματα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές 61
4.3.2 Μοντέλα μάχης του Lanchestre και εξοπλισμών του Richardson . 62

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή και βασικές έννοιες

Πολλά σημαντικά προβλήματα στην μηχανική, στις θετικές αλλά και στις κοινωνικές επιστήμες, όταν σχηματοποιούνται με μαθηματικούς όρους, απαιτούν τον προσδιορισμό μίας συνάρτησης που ικανοποιεί μία εξίσωση που περιέχει της παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης. Ίσως το πλέον οικείο παράδειγμα είναι ο νόμος του Νεύτωνα

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = F\left(t, u(t), \frac{du(t)}{dt}\right) \tag{1.1}$$

για τη θέση $u(t)$ ενός υλικού σημείου στο οποίο ασκείται δύναμη F, η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου t, της θέσης $u(t)$ και της ταχύτητας $du(t)/dt$. Για να προσδιορίσουμε την κίνηση του υλικού σημείου στο οποίο ασκείται η F, πρέπει να βρούμε μία συνάρτηση $u(t)$ που ικανοποιεί την Εξ.1.1. Όταν η δύναμη είναι λόγω της βαρύτητας, τότε

$$m\frac{d^2u(t)}{dt^2} = -mg. \tag{1.2}$$

Ολοκληρώνοντας την Εξ.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} &= -gt + c_1,\\ u(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2,\end{aligned}$$

όπου c_1, c_2 σταθερές. Για να προσδιορίσουμε πλήρως την $u(t)$ χρειάζονται άλλες δύο επιπρόσθετες συνθήκες, όπως η θέση και η ταχύτητα του σημείου σε κάποιο χρόνο. Αυτές οι συνθήκες αρκούν για να προσδιορίσουμε πλήρως την $u(t)$.

Για να αναπτύξουμε τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με συστηματικό τρόπο, είναι χρήσιμο να κατατάξουμε τους διάφορους τύπους εξισώσεων. Η προφανέστερη κατάταξη βασίζεται στο ως προς το πότε η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται από μία ή περισσότερες μεταβλητές. Στην πρώτη περίπτωση, όπου εμφανίζονται μόνο συνήθεις παράγωγοι στην διαφορική εξίσωση λέμε ότι έχουμε *συνήθη διαφορική εξίσωση*. Στην δεύτερη περίπτωση, όπου εμφανίζονται μερικές παράγωγοι, λέμε ότι έχουμε *διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους*.

Ακολουθούν δύο παραδείγματα επιπρόσθετα στην Εξ.1.1: Η δ.ε.

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$$

για το φορτίο $Q(t)$ σε ένα πυκνωτή ενός κυκλώματος χωρητικότητας C, αντίστασης R, επαγωγής L και τάσης $E(t)$· και η εξίσωση που δίνει τον ρυθμό της μείωσης της ποσότητας $R(t)$ μίας ραδιενεργού ουσίας με τον χρόνο (όπως λ.χ. το ράδιο)

$$\frac{dR(t)}{dt} = -kR(t),$$

όπου k γνωστή σταθερά. Τυπικά παραδείγματα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι η εξίσωση δυναμικού του Laplace

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0,$$

η εξίσωση της θερμότητας

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial t},$$

και η κυματική εξίσωση

$$a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}.$$

1.1 Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης (δ.ε.) είναι η

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.3}$$

Τάξη της δ.ε. είναι η μεγαλύτερη παράγωγος που εμφανίζεται στην Εξ.1.3. Λόγου χάρη η δ.ε.

$$y'' + 8y^2 - 3x = 0$$

είναι δεύτερης τάξης. Όταν η Εξ.1.3 είναι *πολυώνυμο* ως προς τις παραγώγους της ζητούμενης y, τότε η μεγαλύτερη δύναμη των παραγώγων λέγεται *βαθμός* της δ.ε. Λόγου χάρη, η δ.ε.

$$(y')^2 - 2x = 4y''$$

είναι δεύτερης τάξης και δεύτερου βαθμού, ενώ η δ.ε.

$$y''' + y = x^3$$

είναι τρίτης τάξης και πρώτου βαθμού.

Ορισμός 1.1.1 Λέγοντας *λύση*[1] μιας δ.ε. της μορφής Εξ.1.3, εννούμε μία συνάρτηση $y = f(x)$ που την επαληθεύει, δηλαδή

$$F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, b) του $\mathbb{R}$.

Κάτω υπό ορισμένες προϋποθέσεις η δ.ε. Εξ.1.3 τάξης n επιδέχεται ως λύση μία n-*παραμετρική οικογένεια καμπυλών*

$$y = f(x, c_1, \ldots, c_n)$$

όπου c_i είναι αυθαίρετες σταθερές. Η y λέγεται *γενικό ολοκλήρωμα* και οι καμπύλες που προκύπτουν λέγονται *ολοκληρωτικές καμπύλες* της Εξ.1.3.

Ορισμός 1.1.2 Λέγοντας *μερική λύση* της δ.ε. Εξ.1.3 εννοούμε μία συνάρτηση y που λύνει την δ.ε. και δεν εξαρτάται από αυθαίρετες σταθερές. Οι λύσεις της δ.ε. που δεν προκύπτουν από το γενικό της ολοκλήρωμα, ονομάζονται *ιδιάζουσες*.

Για παράδειγμα, η $y' = y + 1$ έχει γενικό ολοκλήρωμα $y = ce^x - 1$, $c \in \mathbb{R}$ και για $c = 1$ παίρνουμε την μερική λύση $y = e^x - 1$. Από την άλλη η δ.ε. $y = xy' + (y')^2$ έχει γενικό ολοκλήρωμα $y = cx + c^2$ απ΄ όπου όμως δεν προκύπτει η ιδιάζουσα λύση $y = -(1/4)x^2$.

Ορισμός 1.1.3 Το γενικό ολοκλήρωμα είναι *γενική λύση* της δ.ε. όταν από αυτό προκύπτουν *όλες* οι λύσεις της δ.ε.

Ορισμός 1.1.4 Λέγοντας *πρόβλημα αρχικών τιμών* ή *πρόβλημα Cauchy* εννούμε την δ.ε. Εξ.1.3 μαζί με τις συνθήκες

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Προφανώς η λύση ενός προβλήματος αρχικών τιμών μας δίνει μία μερική λύση της δ.ε. Εξ.1.3. Για να λύσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, ενεργούμε ως εξής.

α) Εάν η δ.ε. μας είναι πρώτης τάξης, τότε βρίσκουμε πρώτα το γενικό ολοκλήρωμα $y = f(x, c)$ και προσδιορίζουμε τη σταθερα c από την αρχική συνθήκη $y(x_0) = a_0$.

β) Η διαδικάσία για δ.ε. ανώτερης τάξης είναι παραπλήσια. Εντοπίζουμε πρώτα το γενικό ολοκλήρωμα $y = f(x, c_1, \ldots, c_n)$ και κατόπιν, από το σύστημα

$$\begin{aligned} f(x_0, c_1, \ldots, c_n) &= a_0. \\ f'(x_0, c_1, \ldots, c_n) &= a_1, \\ &\vdots \\ f^{(n-1)}(x_0, c_1, \ldots, c_n) &= a_{n-1}, \end{aligned}$$

προσδιορίζουμε τις $c_1, \ldots, c_n$.

[1] Για το πότε υπάρχει λύση μιας οποιαδήποτε δ.ε. δείτε την Παράγραφο 2.8.

Εάν οι αρχικές συνθήκες δίνονται σε περισσότερες της μιας τιμές της μεταβλητής x, τότε λέμε ότι έχουμε *συνοριακό πρόβλημα*, και οι αρχικές συνθήκες λέγονται *συνοριακές συνθήκες*.

Για παράδειγμα, ένα συνοριακό πρόβλημα είναι το

$$y'' + 2y' = e^x, \quad y(\pi) = 1, \ \ y'(1) = 1.$$

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

2.1 Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Ορισμός 2.1.1 Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \tag{2.1}$$

λέγεται *δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών*.

Γράφοντας

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

προκύπτει η λύση της Εξ.2.1 με ολοκλήρωση:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερά.} \tag{2.2}$$

Παράδειγμα 2.1.2 Να λυθεί η δ.ε. $xy' = y - yx$.

Γράφουμε

$$\frac{dy}{y} = \frac{1-x}{x}dx$$

και ολοκληρώνοντας ($y \neq 0$, $x \neq 0$) παίρνουμε

$$\log y = \log x - x + \log c, \quad c \text{ αυθαίρετη σταθερά.}$$

Άρα, $\log(y/c) = \log(xe^{-x})$, απ΄ όπου τελικά

$$y = cxe^{-x}, \quad x \neq 0.$$

Εφαρμογή 2.1.3 Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin x}{1+y^2}, \quad y(0) = 1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις δ.ε.

$$1.\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad 2.\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^2)} \quad 3.\ \frac{dy}{dx}+y^2\sin x=0$$

$$4.\ \frac{dy}{dx}=1+x+y^2+xy^2 \quad 5.\ \frac{dy}{dx}=(\cos^2 x)(\cos^2 2y) \quad 6.\ x\frac{dy}{dx}=(1-y^2)^{1/2}$$

$$7.\ \frac{dy}{dx}=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y} \quad 8.\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{1+y^2}$$

Λύστε τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$9.\ \sin 2x dx+\cos 3y dy=0, \quad y(\pi/2)=\pi/3$$

$$10.\ xdx+ye^{-x}dy=0, \quad y(0)=1$$

$$11.\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{1+2y} \quad y(2)=0$$

12. Δείξτε ότι παρόλο που η δ.ε.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-4x}{x-y}$$

δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών, μπορεί να αναχθεί σε δ.ε χωριζομένων μεταβλητών με την αντικατάσταση $v=y/x$.

2.2 Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.2.1 Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{2.3}$$

λέγεται *ομογενής δ.ε.* εάν οι P,Q ικανοποιούν τις σχέσεις

$$P(tx,ty)=t^m P(x,y) \text{ και } Q(tx,ty)=t^m Q(x,y)$$

για κάθε (x,y), για κάθε $t\in\mathbb{R}_*$ και για κάποιο θετικό ακέραιο m.

Κάθε ομογενής δ.ε. ανάγεται σε δ.ε. της μορφής

$$\frac{dy}{dx}=F(y/x). \tag{2.4}$$

Για να επιλύσουμε την Εξ.2.4 ενεργούμε ως εξής : θέτουμε

$$z=\frac{y}{x}$$

άρα $y = xz$ και έτσι

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}.$$

Αντικαθιστώντας στην Εξ.2.4 προκύπτει η δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dz}{F(z) - z} = \frac{dx}{x}.$$

Παράδειγμα 2.2.2 Να λυθεί η δ.ε. $xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Είναι $P(x, y) = xy$ και $Q(x, y) = x^2 - y^2$. Βλέπουμε ότι

$$P(tx, ty) = t^2 P(x, y) \text{ και } Q(tx, ty) = t^2 Q(x, y).$$

Γράφουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y^2 - x^2} = (\text{διαιρώντας με } x^2) = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y^2}{x^2} - 1}.$$

Θέτουμε $z = y/x$ και καταλήγουμε στην ολοκλήρωση

$$\int \frac{1 - z}{2z^3 - z} dz = \int \frac{dx}{x} = \log(cx).$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι επιλύσιμο αλλά όχι απλό. Εάν όμως γράφαμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{y^2 - x^2} = (\text{διαιρώντας με } y^2) = \frac{\frac{x}{y}}{1 - \frac{x^2}{y^2}},$$

αντιστρέφοντας θα παίρναμε την δ.ε.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - \frac{x^2}{y^2}}{\frac{x}{y}}.$$

Θέτοντας $z = x/y$, θα καταλήγαμε στην ολοκλήρωση

$$\int \frac{zdz}{1 - 2z^2} = \log(cy)$$

που υπολογίζεται ευκολότερα.

Εφαρμογή 2.2.3 Δώστε ένα τρόπο επίλυσης της δ.ε.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}.$$

Πάρτε τις εξής περιπτώσεις :

α) Εάν

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

επιλύστε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Εάν $x = A$, $y = B$ είναι οι λύσεις του συστήματος, προχωρήστε στην αντικατάσταση

$$x = X + A, \quad y = Y + B$$

για να πάρετε την ομογενή δ.ε.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}.$$

β) Εάν

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

θέστε $z = a_1 x + b_1 y$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι ομογενείς και λύστε τις.

$$1.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \quad 2.\ 2y dx - x dy = 0 \quad 3.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

$$4.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy} \quad 5.\ \frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad 6.\ x\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$$

$$7.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y} \quad 8.\ (x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0.$$

Λύστε τιε δ.ε.

$$8.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y - 5}{x - y - 1}$$

$$9.\ \frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y + 15}{2x + y + 7}$$

$$10.\ \frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y + 1}{x - 2y - 1}.$$

2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Ορισμός 2.3.1 Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.5}$$

λέγεται *γραμμική δ.ε.* Εάν $Q(x) = 0$ τότε λέγεται *ομογενής γραμμική δ.ε.*

Η ομογενής γραμμική δ.ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών και έχει γενική λύση την

$$y = ce^{-\int P(x)dx}.$$

Για να λύσουμε την γραμμική δ.ε. 2.5 θέτουμε

$$y = ze^{-\int P(x)dx}.$$

Παραγωγίζοντας προκύπτει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}e^{-\int P(x)dx} - zP(x)e^{-\int P(x)dx}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμες των y και dy/dx παίρνουμε την δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dz}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

απ΄ όπου

$$z = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} + c.$$

Άρα, η γενική λύση της γραμμικής δ.ε. 2.5 είναι

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right). \tag{2.6}$$

Παράδειγμα 2.3.2 Να λυθεί η γραμμική δ.ε. $y' - xy = xe^{x^2}$.

Η αντίστοιχη ομογενής γράφεται

$$\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

και έχει λύση την $y = ce^{x^2/2}$. Θέτουμε $y = ze^{x^2/2}$ και παραγωγίζουμε:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2/2}\frac{dz}{dx} + xze^{x^2/2}.$$

Αντικαθιστώντας στην γραμμική δ.ε. παίρνουμε

$$e^{x^2/2}\frac{dz}{dx} = xe^{x^2},$$

άρα $dz = xe^{x^2/2}dx$ που δίνει μετά την ολοκλήρωση $z = e^{x^2/2} + c$. Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y = e^{x^2/2}(e^{x^2/2} + c).$$

Παράδειγμα 2.3.3 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' - 2yx = x, \quad y(0) = 1.$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι $y = ce^{x^2}$. Θέτοντας $y = ze^{x^2}$ παίρνουμε

$$\frac{dz}{dx} = xe^{-x^2}$$

άρα

$$y = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}.$$

Η αρχική συνθήκη δίνει $c = 3/2$.

Για την ύπαρξη λύσης της γραμμικής δ.ε. 2.5 με αρχική συνθήκη $y(x_0) = y_0$, έχουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 2.3.4 Έστω (x_0, y_0) δοθέν σημείο του $\mathbb{R}^2$. Αν οι $P(x)$ και $Q(x)$ είναι *συνεχείς* σε άνα ανοικτό διάστημα (a, b), με $x_0 \in (a, b)$, τότε υπάρχει *μοναδική* λύση $y = y(x)$ της γραμμικής δ.ε. 2.5, με $y(x_0) = y_0$.

Απόδειξη

Υποθέτοντας ότι η Εξ.2.5 έχει λύση, η παραγώγιση που ακολουθεί τον ορισμό 2.3.1 δείχνει ότι αυτή πρέπει να είναι της μορφής 2.6. Παρατηρήστε ότι εφόσον η P είναι συνεχής στο (a, b), η ποσότητα

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη με μη μηδενική παράγωγο στο (a, b). Με αυτό δικαιολογείται η μετατροπή της Εξ.2.5 σε μία εξίσωση της μορφής

$$[\mu(x)y]' = \mu(x)Q(x). \tag{2.7}$$

Η συνάρτηση μQ έχει αντιπαράγωγο εφόσον οι μ και Q είναι συνεχείς, και η Εξ.2.6 προκύπτει από την Εξ.2.7 Η ύπαρξη μίας τουλάχιστον λύσης επιβεβαιώνεται αντικαθιστώντας την λύση y της Εξ.2.6 στην δ.ε. 2.5. Τέλος η αρχική συνθήκη προσδιορίζει με μοναδικό τρόπο τη σταθερά c και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Παράδειγμα 2.3.5 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' + \frac{2}{x}y = 4x$, $y(1) = 2$.

Η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2},$$

οπότε θέτοντας $x = 1$ και $y = 2$ παίρνουμε την λύση του προβλήματος

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Ας παρατηρήσουμε πως αν αφήσουμε το $x \to 0$ (στο σημείο ασυνέχειας της $P(x) = \frac{2}{x^2}$), η λύση απειρίζεται. Από την άλλη, αλλάζοντας την συνθήκη σε $y(1) = 1$, παίρνουμε $c = 0$ και η λύση $y = x^2$ δεν απειρίζεται καθώς το $x \to 0$.

Τι συμπεραίνουμε λοιπόν; Το Θεώρημα 2.3.4 *δεν* μας λέει ότι οι λύσεις στα σημεία ασυνέχειας των P, Q είναι ιδιάζουσες, αλλά το ότι *οι λύσεις δεν είναι ιδιάζουσες στα σημεία συνέχειας*.

Εφαρμογή 2.3.6 Αφού παρατηρήσετε ότι κάθε δ.ε. της μορφής

$$f'(y)\frac{dy}{dx} + f(y)P(x) = Q(x)$$

ανάγεται σε γραμμική δ.ε. με την αντικατάσταση $v = f(y)$, λύστε την

$$\sin y \frac{dy}{dx} = \cos x(2\cos y - \sin^2 x).$$

Κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, κάνουμε ορισμένες χρήσιμες παρατηρήσεις.

α) Εάν $w(x)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής δ.ε. και $y_0(x)$ είναι μία μερική λύση της γραμμικής δ.ε., τότε η γενική λύση της γραμμικής δ.ε. είναι η

$$y(x) = w(x) + y_0(x).$$

β) Από το προηγούμενο προκύπτει ότι αν $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι δύο μερικές λύσεις της γραμμικής δ.ε.. τότε

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1) \text{ ή, ισοδύναμα } \frac{y_2 - y}{y - y_1} = C.$$

Με άλλα λόγια, μία τυχαία ολοκληρωτική καμπύλη της Εξ. 2.5 διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο με τον άξονα y και περιλαμβάνεται μεταξύ δύο ολοκληρωτικών καμπύλων της Εξ. 2.5 σε σταθερό λόγο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις δ.ε. και τα αντίστοιχα προβλήματα αρχικής τιμής.

1. $y' + 3y = x + e^{-2x}$ 2. $y' - 2y = x^2e^{2x}$ 3. $y' + y = xe^{-x} + 1$

4. $y' + (1/x)y = 3\cos(2x)$ 5. $y' - y = 2xe^{2x}$ 6. $y' + 2y = xe^{-2x},\ y(1) = 0$

7. $y' + (2/x)y = \dfrac{\cos x}{x^2},\ y(\pi) = 0,\ x > 0$ 8. $y' + y = \dfrac{1}{1+x^2},\ y(0) = 0.$

9. Λύστε την δ.ε.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}.$$

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την x σαν εξαρτημένη μεταβλητή αντί της y.)

10. Αποδείξτε τους ισχυρισμούς που υπάρχουν στο τέλος της παραγράφου.

2.4 Διαφορικές εξισώσεις του Bernoulli

Ορισμός 2.4.1 Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1, \tag{2.8}$$

λέγεται *δ.ε. του Bernoulli.*

Η παραπάνω δ.ε επιλύεται με την αντικατάσταση $v = y^{-n+1}$. Προκύπτει τότε

$$\frac{dv}{dx} = (-n+1)y^{-n}\frac{dy}{dx}, \text{ δηλαδή } \frac{1}{-n+1}\frac{dv}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Αντικαθιστώντας στην δ.ε., προκύπτει η γραμμική δ.ε.

$$\frac{dv}{dx} + (-n+1)P(x)v = (-n+1)Q(x).$$

Παράδειγμα 2.4.2 Να λυθεί η δ.ε. $y' + y = y^n$, $n \neq 0, 1$.

Θέτουμε $v = y^{-n+1}$, οπότε $\frac{1}{-n+1}\frac{dv}{dx} = y^{-n}\frac{dy}{dx}$ και αντικαθιστώντας στην δ.ε., έχουμε

$$\frac{dv}{dx} + (-n+1)v = (-n+1)$$

που είναι γραμμική. Η γενική της λύση είναι:

$$v = 1 + ce^{(n-1)x}, \text{ άρα } y = \left(1 + ce^{(n-1)x}\right)^{\frac{1}{-n+1}}.$$

Εφαρμογή 2.4.3 Να λυθεί η δ.ε. $6y^3 dx - x(2x^3 + y)dy = 0$.

(Υπόδειξη: Γράψτε την ως

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{6y^2}x = \frac{1}{3y^3}x^4$$

και θέστε $v = x^{-3}$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις δ.ε.

1. $y' = y - xy^3e^{-2x}$ 2. $4y' - y\tan x + y^5\sin(2x) = 0$

3. $y' + xy = \dfrac{x}{y^3}$ 4. $y' - y = xy^5$.

2.5 Διαφορικές εξισώσεις του Riccati

Ορισμός 2.5.1 Μία διαφορική εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \tag{2.9}$$

λέγεται *δ.ε. του Ricatti.*

Η δ.ε. 2.9 έχει την ιδιομορφία ότι *λύνεται μόνο εάν είναι γνωστή μία μερική λύση της* $u(x)$. Όταν συμβαίνει αυτό, θέτουμε

$$y = u(x) + z^{-1}$$

και προκύπτει μία γραμμική δ.ε.

$$\frac{dz}{dx} - (P(x) + 2Q(x)u)z = Q(x).$$

Παράδειγμα 2.5.2 Να λυθεί η δ.ε. $x^2y' = x^2y^2 + xy - 3$.

Μία προφανής λύση της είναι η $u(x) = \frac{1}{x}$. Με την αντικατάσταση

$$y = x^{-1} + z^{-1}$$

αναγόμαστε στην δ.ε.

$$\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = -1,$$

της οποίας η γενική λύση είναι η

$$z = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}.$$

Άρα, η γενική λύση της δοθείσας δ.ε. είναι

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις δ.ε.

1. $x^2y' = x^2y^2 + xy - 3$ 2. $xy' = 2(x - y)^2 + (x - y) + x$
3. $x^2y' = (y - 1)(x + y - 1)$.

(Υπόδειξη: Μερικές λύσεις : 1. $u(x) = 1/x$, 2. $u(x) = x$, 3. $u(x) = 1$.)

2.6 Πλήρεις διαφορικές εξισώσεις

Ας θεωρήσουμε πρώτα την εξίσωση

$$f(x,y)=c$$

όπου c σταθερά. Υποθέτοντας ότι η παραπάνω εξίσωση προσδιορίζει την y πεπλεγμένα ως συνάρτηση του x, παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε

$$f_x(x,y)+f_y(x,y)y'=0.$$

Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι δίνεται η δ.ε.

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0.$$

Εάν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f_x=P(x,y), \quad \text{και} \quad f_y=Q(x,y)$$

και τέτοια ώστε η $f(x,y)=c$ όρίζει την $y=\phi(x)$ ως πεπλεγμένη παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε

$$\begin{aligned} P(x,y)+Q(x,y)y' &= f_x(x,y)+f_y(x,y)y' \\ &= \frac{d}{dx}\left\{f(x,\phi(x))\right\}. \end{aligned}$$

Άρα λοιπόν, η εξίσωση $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ δίνει τότε

$$\frac{d}{dx}\left\{f(x,\phi(x))\right\}=0.$$

και στην περίπτωση αυτή η δ.ε. λέγεται *πλήρης* (ή *ακριβής*).[1]

Παράδειγμα 2.6.1 Έστω η δ.ε.

$$2xy^3+3x^2y^2\frac{dy}{dx}=0.$$

Παρατηροόμε ότι γράφεται και ως

$$\frac{d}{dx}(x^2y^3)=0,$$

άρα η λύση δίνεται πεπλεγμένα από την $x^2y^3=c$.

[1] Παρατηρήστε ότι το να πούμε ότι η δ.ε. $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ είναι πλήρης, είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$F(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

είναι *πεδίο κλίσεων*.

Θεώρημα 2.6.2 Έστω P, Q, P_y, Q_x συνεχείς στο ορθογώνιο[2]

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ c < y < d\}.$$

Τότε η δ.ε.

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2.10}$$

είναι πλήρης αν και μόνο αν

$$P_y = Q_x. \tag{2.11}$$

Το γενικό ολοκλήρωμα της Εξ.2.10 είναι τότε το

$$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)dy = c, \tag{2.12}$$

όπου το $(x_0, y_0) \in R$.[3]

Απόδειξη

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος χωρίζεται σε δύο μέρη. Δείχνουμε πρώτα ότι εάν υπάρχει μία συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f_x = P(x, y), \quad \text{και} \quad f_y = Q(x, y), \tag{2.13}$$

τότε ικανοποιείται η 2.11. Πράγματι, παραγωγίζοντας τις 2.13, είναι

$$f_{yx} = P_y \quad \text{και} \quad f_{xy} = Q_x$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από τις υποθέσεις για τις P_y και Q_x και το Λήμμα του Schwarz.

Θα δείξουμε τώρα ότι εάν οι P και Q ικανοποιούν την 2.11, τότε η δ.ε. 2.10 είναι πλήρης. Στην απόδειξη θα κατασκευάσουμε μία συνάρτηση $f(x, y)$ που θα ικανοποιεί τις σχέσεις 2.13. Ολοκληρώνοντας την αριστερή σχέση ως προς x έχουμε

$$f(x, y) = \int_{x_o}^{x} P(t, y)dt + g(y).$$

Εδώ η g είναι οποιαδήποτε συνάρτηση του y. παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς y και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της παραγώγισης υπό το σύμβολο της ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} P(t, y)dt + g'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} P_y(t, y)dt + g'(y). \end{aligned}$$

[2]Στην πράξη αρκεί το R να είναι ανοικτό και *απλά συνεκτικό*, δηλαδή να μην έχει *οπές*.

[3]Στην περίπτωση όπου το R είναι οποιοσήποτε ανοικτό απλά συνεκτικό σύνολο, το σημείο (x_0, y_0) πρέπει να εκλεγεί κατάλληλα ώστε η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία (x_0, y_0), (x, y_0), (x, y) και (x_0, y) να ανήκει στο R.

Επειδή $f_y = Q$ έχουμε

$$g'(y) = Q(x,y) - \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt. \tag{2.14}$$

Για να προσδιορίσουμε την g, είναι ουσιαστικό το δεξιό μέλος της 2.14 να είναι συνάρτηση μόνο του y (παρ΄ όλο που δεν φαίνεται ως τέτοιο!). Για να το επιβεβαιώσουμε αυτό, παραγωγίζουμε ως προς x για να πάρουμε την ποσότητα

$$Q_x - P_y$$

που μηδενίζεται λόγω της σχέσης 2.11. Άρα πράγματι, το δεξιό σκέλος της 2.14 δεν εξαρτάται από το x και ολοκληρώνοντας προκύπτει η g. Προκύπτει ύστερα απ΄ αυτό ο τύπος της γενικής λύσης 2.12. □

Είναι καλό να λύνετε τις πλήρεις δ.ε. όχι με την βοήθεια του τύπου, αλλά κάνοντας κάθε φορά την διαδικασία εύρεσης της λύσης f. Ουσιαστικά το να επιλύσετε μία πλήρη δ.ε. $Pdx + Qdy = 0$ είναι ισοδύναμο με το να βρείτε την συνάρτηση δυναμικού f του *συντηρητικού* διανυσματικού πεδίου $F = (P, Q)$.

Παράδειγμα 2.6.3 Λύστε την δ.ε.

$$(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y + 2)dy = 0.$$

Εφόσον

$$P_y = \cos x + 2xe^y = Q_x,$$

η δ.ε. είναι πλήρης. Ψάχνουμε συνάρτηση f που να ικανοποιεί τις

$$f_x = y\cos x + 2xe^y, \quad \text{και} \quad f_y = \sin x + x^2e^y + 2.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x την αριστερή σχέση έχουμε

$$f(x,y) = \sin x + x^2e^y + g(y).$$

Παραγωγίζοντας ως προς y και εξισώνοντας με την δεξιά σχέση προκύπτει

$$f_y = x^2e^y + g'(y) = \sin x + x^2e^y + 2 \Rightarrow g(y) = 2y + c.$$

Άρα, το γενικό ολοκλήρωμα της δ.ε. είναι

$$f(x,y) = y\sin x + x^2e^y + 2y = c.$$

Παράδειγμα 2.6.4 Δείξτε ότι η δ.ε.

$$(x - 2xy + e^y)dx + (y - x^2 + xe^y)dy = 0$$

είναι πλήρης και βρείτε την λύση $y(x)$ που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 0$.

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$P_y = -2x + e^y = Q_x$$

άρα η δ.ε. είναι πλήρης. Το χωρίο όπου οι P, Q, P_x, Q_y είναι συνεχείς είναι όλο το $\mathbb{R}^2$, άρα μπορούμε να επιλέξουμε ως (x_0, y_0) το $(0,0)$. Το γενικό ολκλήρωμα 2.12 είναι

$$\int_0^x (t - 2ty + e^y)dt + \int_0^y tdt = c \Rightarrow \frac{x^2}{2} - x^2 y + xe^y + \frac{y^2}{2} = c.$$

Για $x = 1$ και $y = 0$ παίρνουμε (υπό πεπλεγμένη μορφή) τη ζητούμενη λύση

$$x^2 - 2x^2 y + 2xe^y + y^2 = 3.$$

Άλλη μία εναλλακτική μέθοδος εύρεσης της γενικής λύσης μιας πλήρους δ.ε. είναι το να πάρουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

όπου C είναι οποιοσδήποτε προσανατολισμένη καμπύλη που ενώνει ένα $(x_0, y_0) \in R$ με το τυχαίο σημείο (x, y). (Μην ξεχνάτε ότι το R πρέπει να είναι απλά συνεκτικό!). Επειδή το διανυσματικό πεδίο (P, Q) είναι συντηρητικό, το I είναι ανεξάρτητο του δρόμου, έτσι μπορούμε να επιλέξουμε την C να είναι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα (x_0, y_0) και (x, y) δηλαδή

$$t \to (x(t), y(t)) = (x_0, y_0) + t(x - x_0, y - y_0), \quad t \in [0,1].$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 P(x(t), y(t))x'(t)dt + \int_0^1 Q(x(t), y(t))y'(t)dt \\ &= \int_0^1 P(x(t), y(t))(x - x_0)dt + \int_0^1 Q(x(t), y(t))(y - y_0)dt = c \end{aligned}$$

και η σταθερά εδώ είναι ίση με $f(x,y) - f(x_0, y_0)$, όπου f είναι η συνάρτηση δυναμικού του συντηρητικού πεδίου (P, Q).

Στο προηγούμενο παράδειγμα, για $(x_0, y_0) = (0,0)$ παίρνοντας τον δρόμο

$$t \to (tx, ty)$$

έχουμε

$$I = \int_0^1 P(tx, ty)(tx)'dt + \int_0^1 Q(tx, ty)(ty)'dt = \frac{x^2}{2} - x^2 y + xe^y + \frac{y^2}{2} = c.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Προσδιορίστε ποιες από τις παρακάτω δ.ε. είναι πλήρεις. Αν είναι, βρείτε τη λύση τους.

1. $(2x+3)dx + (2y-2)dy = 0$ 2. $(2x+4y) + (2x-2y)y' = 0$

3. $(9x^2 + y - 1)dx - (4y - x)dy = 0$ 4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2 y + 2x)y' = 0.$

5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax+by}{bx+cy}$ 6. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax-by}{bx-cy}$

7. $(e^x \sin y - 2y \sin x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$

8. $(e^x \sin y + 3y)dx - (3x - e^x \sin y)dy = 0$

9. $(ye^{xy}\cos(2x) - 2e^{xy}\sin(2x) + 2x)dx + (xe^{xy}\cos(2x) - 3)dy = 0$

10. $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)dy = 0, \quad x > 0$

11. $(x\ln y + xy)dx + (\ln x - 2)dy = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$

12. $\dfrac{xdx}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \dfrac{ydy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$

13. Βρείτε την τιμή του b για την οποία οι παρακάτω δ.ε. είναι πλήρεις και κατόπιν λύστε τις.

α) $(xy^2 + bx^2y)dx + (x+y)x^2dy = 0$

β) $(ye^{2xy} + x)dx + bxe^{2xy}dy = 0$

14. Θεωρήστε την πλήρη δ.ε.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Βρείτε τύπο για την γενική της λύση ανάλογο με εκείνον της σχέσης 2.12 ολοκληρώνοντας πρώτα την $f_y = Q$ αντί της $f_x = P$.

15. Δείξτε ότι κάθε δ.ε. χωριζομένων μεταβλητών είναι πλήρης.

16. Πότε η γραμμική δ.ε.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

είναι πλήρης; Υποθέστε ότι οι P, Q είναι συνεχώς παραγωγίσιμες σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a,b).

2.7 Ολοκληρωτικοί παράγοντες

Οι μέθοδοι της προηγούμενης παραγράφου επεκτείνονται σε μία κάπως μεγαλύτερη κλάση δ.ε. Έστω η δ.ε.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \tag{2.15}$$

Εάν δεν είναι πλήρης, προσπαθούμε να βρούμε μία συνάρτηση μ ώστε η δ.ε.

$$\mu(Pdx + Qdy) = 0 \tag{2.16}$$

να είναι πλήρης. Αυτή η συνάρτηση μ λέγεται *ολοκληρωτικός παράγοντας* της δ.ε. Εάν μπορούμε να βρούμε ολοκληρωτικό παράγοντα, τότε η δ.ε. επιλύεται με τις μεθόδους της προηγούμενης παραγράφου. Προφανώς κάθε λύση της 2.16 είναι και λύση της 2.15.

Πότε όμως μπορούμε να κάνουμε αυτή τη διαδικασία; Καταρχάς η δ.ε. 2.16 είναι πλήρης αν και μόνο αν

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x. \tag{2.17}$$

Εφόσον δίνονται οι P και Q, ο ολοκληρωτικός παράγοντας μ θα πρέπει να ικανοποιεί την δ.ε. *με μερικές παραγώγους*

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu = 0 \tag{2.18}$$

Υπάρχει ένα θετικό και ένα αρνητικό στην παραπάνω δ.ε. Το αρνητικό είναι ότι είναι τόσο δύσκολο να λυθεί τουλάχιστον όσο είναι η αρχική δ.ε. Το θετικό όμως είναι ότι μπορεί να έχει περισσότερες της μιας λύσεις· εάν έτσι έχουν τα πράγματα, τότε *κάθε λύση* μπορεί να χρησιμεύσει σαν ολοκληρωτικός παράγοντας.

Εφαρμογή 2.7.1 Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mu(x,y) = (xy^2)^{-1}$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας της δ.ε.

$$(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$$

και βρείτε τη λύση της.

Παράδειγμα 2.7.2 Οι δύο σημαντικότερες περιπτώσεις κατά τις οποίες εμφανίζονται απλοί ολοκληρωτικοί παράγοντες, είναι όταν η μ είναι συνάρτηση μόνο μίας από τις μεταβλητές x και y. Ας προσδιορίσουμε τις αναγκαίες συνθήκες για τα P και Q ώστε η δ.ε. 2.15 να έχει ολοκληρωτικό παράγοντα μ που να εξαρτάται μόνο από το x. Με αυτή την υπόθεση η δ.ε. 2.18 γίνεται

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}\mu. \tag{2.19}$$

Άρα, εάν η ποσότητα $(P_y - Q_x)/Q$ είναι σύνάρτηση μόνο του x, τότε η δ.ε. 2.19 είναι χωριζομένων μεταβλητών και μπορεί να λυθεί για να δώσει τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ.

Παράδειγμα 2.7.3 Βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα για την δ.ε.

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

και κατόπιν λύστε την.

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}.$$

Κατά συνέπεια, η δ.ε. 2.19 γίνεται

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}$$

της οποίας μία λύση είναι η $\mu(x) = x$. Πολλαπλασιάζοντας τη δοθείσα δ.ε. με τον ολοκληρωτικό παράγοντα x προκύπτει η πλήρης δ.ε.

$$(3x^2 y + xy^2)dx + (x^3 + x^2 y)dy = 0$$

της οποίας η γενική λύση είναι η

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c.$$

Μπορείτε να βεβαιώσετε ότι ένας άλλος ολοκληρωτικός παράγοντας είναι η

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$$

και η λύση της δ.ε. που προκύπτει είναι η ίδια, με πολύ δυσκολότερους υπολογισμούς βέβαια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Δείξτε ότι οι δ.ε. των ασκήσεων 1–3 δεν είναι πλήρεις, αλλά γίνονται πλήρεις όταν πολλαπλασιαστούν με τον δοσμένο ολοκληρωτικό παράγοντα. Κατόπιν, λύστε τις δ.ε.

1. $x^2y^3dx + x(1+y^2)dy = 0, \quad \mu(x,y) = 1/xy^3$
2. $\left(\dfrac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)dx + \left(\dfrac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy = 0 \quad \mu(x,y) = ye^x$
3. $ydx + (2x - ye^y)dy = 0, \quad \mu(x,y) = y$

Στις παρακάτω ασκήσεις 4–9 βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα και λύστε τις δοθείσες δ.ε.

4. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2+y^2)dy = 0$
5. $y' = e^{2x} + y - 1$
6. $dx + \left(\dfrac{x}{y} - \sin y\right) = 0$
7. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$
8. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y\text{csc}y dy = 0$
9. $\left(3x + \dfrac{6}{y}\right)dx + \left(\dfrac{x^2}{y} + 3\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$

10. Δείξτε ότι εάν $(Q_x - P_y)/P = M$, όπου $M = M(x)$, τότε η δ.ε.

$$Pdx + Qdy = 0$$

έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$\mu(y) = e^{\int Q(y)dy}.$$

2.8 Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Θα θεωρήσουμε τώρα με κάποια επιλέον αυστηρότητα το γενικό πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Η βασική ερώτηση είναι *πότε* το παραπάνω πρόβλημα έχει λύση, και εάν αυτό ισχύει, ποιο είναι το μέγιστο διάστημα ορισμού της; Επιπλέον, είναι η λύση *μοναδική*; Είδαμε στην περίπτωση των γραμμικών δ.ε. $y' + P(x)y = Q(x)$ ότι αυτό πράγματι συμβαίνει εάν οι P και Q είναι συνεχείς συναρτήσεις του x. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος ήταν εύκολη, γιατί για τις γραμμικές δ.ε. έχουμε πλήρη τύπο για την γενική λύση· αυτό όμως δεν ισχύει γενικά όταν η δ.ε. δεν είναι γραμμική. Μπορούν να προκύψουν μη γραμμικές δ.ε. οι οποίες είναι πρακτικά αδύνατο να λυθούν!

2.8.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα

Το ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι ανάλογο του Θεωρήματος 2.3.4 για τις γραμμικές δ.ε. Όμως, η απόδειξή του είναι ιδιαίτερα τεχνική και έξω από το σκοπό αυτών των σημειώσεων.

Θεώρημα 2.8.1 (Peano–Picard) Έστω ότι οι συναρτήσεις f και $\partial f/\partial y$ είναι συνεχείς σε κάποιο ορθογώνιο $R = (a, b) \times (c, d)$ που περιέχει το σημείο (x_0, y_0). Τότε σε κάποιο διάστημα $(x_0 - h, x_0 + h) \subseteq (a, b)$, υπάρχει μοναδική λύση $y = \phi(x)$ του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Λιγα σχόλια για το παραπάνω θεώρημα: οι υποθέσεις του είναι αρκετές για να εξασφαλίσουν την ύπαρξη μοναδικής λύσης του προβλήματος αρχικής τιμής. Όμως, ακόμα και εάν η f δεν ικανοποιεί αυτές τις υποθέσιες, είναι ακόμα δυνατό να υπάρχει μοναδική λύση. Πράγματι, το θεώρημα ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η $f(x, y)$ είναι Lipschitz ως προς y στο R:

$$\exists K > 0,\ \forall (x, y_1), (x, y_2) \in R \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Επιπλέον η ύπαρξη (αλλά όχι η μοναδικότητα) της λύσης εξασφαλίζεται μόνο από την συνέχεια της f.

Στο παρακάτω παράδειγμα δείχνουμε ότι το πρόβλημα αρχικής τιμής μπορεί να έχει περισσότερες της μίας λύσης αν παραβιάσουμε τις συνθήκες του Θεωρήματος 2.8.1.

Παράδειγμα 2.8.2 Βρείτε την λύση του

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Η δ.ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών και μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η

$$y = \phi(x) = \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0$$

είναι λύση του δοθέντος προβλήματος αρχικής τιμής. Από την άλλη όμως λύση είναι και η

$$y = \psi(x) = 0.$$

Αυτό βεβαίως συμβαίνει διότι

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} y^{1/3} = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

η οποία όχι μόνο δεν είναι συνεχής, αλλά ούτε καν ορίζεται στα σημεία όπου $y = 0$. Ας παρατηρήσουμε όμως ότι η λύση ορίζεται με μοναδικό τρόπο για κάθε δοθέν (x_0, y_0) με $y_0 \neq 0$.

2.8.2 Διάστημα ορισμού

Ενώ για το γραμμικό πρόβλημα αρχικής τιμής η λύση υπάρχει σε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 και στο οποίο οι P και Q είναι συνεχείς, για το μη γραμμικό πρόβλημα αρχικής τιμής το διάστημα ορισμού της λύσης μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστεί. Η λύση $y = \phi(x)$ υπάρχει όσο το σημείο $(x, \phi(x))$ παραμένει εντός του χωρίου στο οποίο ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος· από την άλλη όμως, είναι μερικές φορές πολύ δύσκολο να βρούμε τη λύση! Όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα, το διάστημα ορισμού της λύσης μπορεί να μην έχει καμμία σχέση με την συνάρτηση f.

Παράδειγμα 2.8.3 Έστω το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η λύση του προβλήματος είναι η

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Επίσης είναι φανερό ότι η λύση απειρίζεται όπως το $x \to 1$. Από την δ.ε. όμως δεν υπάρχει καμμία ένδεξη ότι το 1 είναι προβληματικό σημείο. Επιπλέον, αν αλλάξουμε την αρχική συνθήκη σε $y(0) = 2$, η λύση είναι η

$$y = \frac{2}{1-2x}$$

που απειρίζεται καθώς το $x \to 1/2$. Βλέπουμε λοιπόν άλλο ένε ενοχλητικό στοιχείο των προβλημάτων αρχικής τιμής : τα ιδιάζοντα σημεία των λύσεων μπορούν να μετακινηθούν ανάλογα με την αρχική συνθήκη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για κάθε μία από τις παρακάτω δ.ε. βρείτε το χωρίο του επιπέδου xy όπου η ύπαρξη μοναδικής λύσης από κάθε σημείο εξασφαλίζεται από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

$$1.\ y' = \frac{x-y}{2x+5y} \quad 2.\ y' = (1-x^2-y^2)^{1/2}$$
$$3.\ y' = \frac{2xyy}{1+y^2} \quad 4.\ y' = 3(x+y)^{-2}$$
$$5.\ y' = \frac{\ln|xy|}{1-x^2+y^2} \quad 6.\ y' = (x^2+y^2)^{3/2}$$

7. Δείξτε ότι η $y = \phi(x) = (1-x^2)^{-1}$ είναι λύση του προβλήματος αρχικής τιμής

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = 1.$$

Σε ποιο διάστημα ορίζεται;

8. Δείξτε ότι η $y = \phi(x) = [2(x+c)]^{-1/2}$, όπου c σταθερά, ικανοποιεί τη δ.ε.

$$y' + y^3 = 0.$$

Ποια λύση ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y(1) = 2$; Σε ποιο διάστημα ορίζεται;

9. Βεβαιώστε ότι οι

$$y = \pm(c^2 - 4x^2)^{1/2}$$

λύνουν τη δ.ε.

$$y' = -4x/y.$$

Σε ποια χωρία του επιπέδου xy ορίζονται οι λύσεις αυτές; Ειδικότερα, βρείτε τη λύση που περνά από το $(0,4)$ και τη λύση που περνά από το $(1,-1)$.

2.9 Ορισμένες εφαρμογές

2.9.1 Ισογώνιες τροχιές

Ορισμός 2.9.1 Αν $F(x,y,c) = 0$ είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών (με παράμετρο c), τότε μία καμπύλη που τέμνει τις καμπύλες τις οικογένειας υπό γωνία $a \neq \pi/2$ καλείται *ισογώνιος τροχιά* της οικογένειας.

Αν η δ.ε. που δίνει την F είναι η

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

τότε μία ολοκληρωτική καμπύλη της δ.ε. που περνά από το (x,y) έχει κλίση $f(x,y)$. Κατά συνέπεια η εφαπτόμενη της ισογώνιας τροχιάς θα έχει γωνία κλίσης

$$\arctan(f(x,y)) + a$$

και η κλίση της ισογώνιας τροχιάς θα είναι

$$\tan(\arctan(f(x,y)) + a) = \frac{f(x,y) + \tan a}{1 - f(x,y)\tan a}.$$

Η δ.ε. λοιπόν των ισογωνίων τροχιών είναι η

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y) + \tan a}{1 - f(x,y)\tan a}. \tag{2.20}$$

Στην περίπτωση όπου $a = \pi/2$,

$$\tan(\arctan(f(x,y)) + \pi/2) = -\frac{1}{f(x,y)}$$

και η δ.ε. των *ορθογωνίων τροχιών* είναι η

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{2.21}$$

Παράδειγμα 2.9.2 Οι ορθογώνιες τροχιές των ομόκεντρων κύκλων $x^2 + y^2 = c^2$ βρίσκονται ως εξής : Η δ.ε. της οικογένειας είναι η

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Άρα, οι ορθογώνιες τροχιές είναι οι λύσεις της δ.ε.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

δηλαδή οι ευθείες $y = kx$ (μαζί με την ευθεία $x = 0$).

Εφαρμογή 2.9.3 Βρείτε τις ισογώνιες τροχιές γωνία a των ισοσκελών υπερβολών με ασύμπτωτες τους άξονες x και y που δίνονται από τη σχέση $xy = c$.

2.9.2 Ταχύτητα διαφυγής

Ένα σώμα σταθερής μάζας m εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα v_0. Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει τριβή από τον αέρα, αλλά λαμβάνοντας υπόψη την μεταβολή του βαρυτικού πεδίου της Γης με το ύψος, θα βρούμε την μικρότερη αρχική ταχύτητα που πρέπει να έχει το σώμα για να μην επιστρέψει στη Γη. Αυτή η ταχύτητα λέγεται *ταχύτητα διαφυγής*.

Παίρνουμε τον θετικό ημιάξονα x προς τα επάνω, με την αρχή στην επιφάνεια. Η μόνη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι το βάρος του

$$w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

όπου g η βαρυτική σταθερά και R η ακτίνα της Γης. Από τον Νόμο του Νεύτωνα, η δ.ε. της κίνησης του σώματος είναι

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2} \text{ με αρχική συνθήκη } v(0) = v_0.$$

Υπάρχει ένα μικρό πρόβλημα στην παραπάνω δ.ε. Η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου t και όχι της απόστασης x από το έδαφος. Το πρόβλημα όμως διορθώνεται εύκολα εφόσον

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v.$$

Παίρνουμε λοιπόν το πρόβλημα αρχικής τιμής

$$v\frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(x+R)^2}, \quad v(0) = 0.$$

Η δ.ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών και εύκολα βλέπουμε ότι η λύση του προβλήματος είναι η

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R}.$$

Η ταχύτητα διαφυγής βρίσκεται από την παραπάνω σχέση απαιτώντας την v να παραμένει θετική για όλες τις τιμές του (θετικού) x. Δηλαδή,

$$v_0^2 \geq 2gR - \frac{2gR^2}{x+R} \text{ για κάθε } x$$

οπότε παίρνοντας $x \to +\infty$ προκύπτει ότι η ταχύτητα διαφυγής v_e είναι η

$$v_e = (2gR)^{1/2}$$

Εννοείται, εφόσον δεν λάβαμε υπόψη την τριβή που προκαλέι ο αέρας, ότι η πραγματική ταχύτητα διαφυγής είναι κάπως μεγαλύτερη από αυτήν που βρήκαμε πιο πάνω. Από την άλλη, ας παρατηρήσουμε ότι η ταχύτητα διαφυγής μπορεί να γίνει μικρότερη αν το σώμα μας εκτοξευθεί από κάποιο μεγάλο ύψος πάνω από τη Γη. Σε εκείνη την περίπτωση, τόσο οι βαρυτικές όσο και οι δυνάμεις τριβής μειώνονται κατά πολύ· ειδικότερα, η αντίσταση του αέρα μειώνεται σημαντικά με την αύξηση του υψομέτρου.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $y' = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$ 2. $(x+y)dx - (x-y)dy = 0$

3. $y' = \dfrac{2x+y}{3+3y^2-x}$ 4. $(x+e^y)dy - dx = 0$

5. $y' = -\dfrac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$ 6. $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{x^2y + y^3}$ 8. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\sin x}{x}, \quad y(2) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$ 10. $(3y^2 + 2xy)dx - (2xy + x^2)dy = 0$

11. $(x^2 + y)dx + (x + e^y)dy = 0,$ 12. $\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{1}{1 + e^x}$

13. $xdy - ydx = (xy)^{1/2}$ 14. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0, \quad y(2) = 3$

15. $(e^x + 1)\dfrac{dy}{dx} = y - ye^x$ 16. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$

17. $\dfrac{dy}{dx} = e^2x + 3y$ 18. $(2y + 3x)dx = -xdy$

19. $xdy - ydx = 2x^2y^2dy \quad y(1) = -2$ 20. $y' = e^{x+y}$

21. $xy' = y + xe^{y/x}$ 22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 1}{y^2 + 1} \quad y(-1) = 1$

23. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0$ 24. $2\sin y \cos x dx + \cos y \sin x dy = 0$

25. $\left(2\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

26. $(2y + 1)dx + \left(\dfrac{x^2 - y^2}{x}\right)dy = 0$

27. $(\cos(2y) - \sin x)dx - 2\tan x \sin(2y)dy = 0$

28. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 - 2y - y^2}{2x + 3xy^2}$ 29. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y + \sqrt{x^2 - y^2}}{2x}$

30. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{1 - 2xy^2} \quad y(0) = 1$

31. $(x^2y + xy - y)dx + (x^2y - 2x^2)dy = 0$

32. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy} \quad y(1) = -2$

Κεφάλαιο 3

Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης

3.1 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Οι *γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης* είναι οι δ.ε. της μορφής

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = R(x). \tag{3.1}$$

Όταν η $R \equiv 0$ η δ.ε. 3.1 λέγεται *ομογενής*. Σε αναλογία με το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για γραμμικές δ.ε. πρώτης τάξης έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.1.1 Ας είναι x_0 σημείο του (a, b) στο οποίο οι συναρτήσεις P, Q, R είναι συνεχείς, και έστω y_0 και y_0' δοθέντες αριθμοί. Τότε υπάρχει μοναδική λύση $y = y(x)$ της δ.ε. 3.1 που επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'.$$

Σε αντίθεση με ότι συμβαίνει στις γραμμικές δ.ε. πρώτης τάξης, η εύρεση λύσης της 3.1 δεν είναι πάντοτε δυνατή αν οι P, Q δεν είναι σταθερές συναρτήσεις.

Στ εξής θα ασχολούμαστε με γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές.

Πρόταση 3.1.2 Έστω η γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = R(x). \tag{3.2}$$

Η γενική της λύση είναι το άθροισμα μίας οποιασδήποτε μερικής λύσης της $w(x)$ και της γενικής λύσης $z(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0. \tag{3.3}$$

Απόδειξη

Αν $y(x)$ είναι λύση της 3.2, γράφουμε την $y(x)$ ως άθροισμα δύο συναρτήσεων

$$y(x) = z(x) + w(x)$$

και αντικαθιστώντας στη δ.ε. έχουμε

$$(z'' + pz' + qz) + (w'' + pw' + qw - R) = 0.$$

Άρα, αν η w είναι *κάποια* λύση της μη ομογενούς 3.2, τότε η δεύτερη παρένθεση μηδενίζεται, άρα μηδενίζεται και η πρώτη, συνεπώς η $z(x) = y(x) - w(x)$ είναι μία λύση της αντίστοιχης ομογενούς 3.3.

Αν τώρα κρατήσουμε τη μερική λύση $w(x)$ σταθερή, οποιαδήποτε λύση $z(x)$ της ομογενούς, επιφέρει τον μηδενισμό και των δύο παρενθέσεων της παραπάνω σχέσης, άρα η $y(x) = z(x) + w(x)$ είναι λύση της δ.ε. 3.2. □

Άρα λοιπόν για να λύσουμε την δ.ε. 3.2 πρέπει να κάνουμε τα παρακάτω βήματα.

1. Να βρούμε τη *γενική* λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. 3.3 και
2. να βρούμε μία *μερική* λύση της 3.2.

3.1.1 Ομογενείς γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η παρακάτω πρόταση είναι θεμελιώδης για ότι ακολουθεί.

Πρόταση 3.1.3 Αν $\phi_1(x), \phi_2(x)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς δ.ε. 3.3 τότε η γενική λύση της δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x), \quad c_1, c_2 \text{ σταθερές.} \tag{3.4}$$

Απόδειξη

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση του τύπου 3.4 είναι λύση της δ.ε. 3.3. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι κάποια $y(x)$ λύνει στο ανοικτό (a, b) την δ.ε. 3.3 με αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \ \text{ όπου } \ x_0 \in (a, b).$$

Τότε έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1\phi_1(x_0) + c_2\phi_2(x_0) &= y_0 \\ c_1\phi_1'(x_0) + c_2\phi_2'(x_0) &= y_0'. \end{aligned}$$

Για να επιλύεται το σύστημα αυτό ως προς c_1 και c_2, θα πρέπει η ορίζουσα

$$W(\phi_1, \phi_2)(x_0) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ας δεχθούμε προς το παρόν τον εξής ισχυρισμό:

Δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ ορισμένες στο (a, b) είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν

$$W(\phi_1, \phi_2)(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

Με την βοήθεια του παραπάνω ισχυρισμού, και επειδή οι ϕ_1 και ϕ_2 υποτέθηκαν γραμμικά ανεξάρτητες, προκύπτει ότι το γραμμικό μας σύστημα λύνεται ως προς c_1 και c_2 και άρα η $c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)$ είναι λύση της δ.ε. 3.3 στο (a, b). Λόγω όμως του θεωρήματος 3.1.1, οφείλει να ταυτίζεται με την $y(x)$ στο (a, b).

Μένει να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι οι $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες στο (a, b). Τότε, υπάρχουν c_1 και c_2 με $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ τέτοιες ώστε

$$c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) \equiv 0, \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

Γράφοντας $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$ έχουμε τότε

$$W(x) = W(\phi_1, \phi_2)(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & c\phi_1(x) \\ \phi_1'(x) & c\phi_1'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $W(x) \equiv 0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\phi_1(x)$ είναι παντού διάφορη του μηδενός στο (a, b). Τότε

$$\frac{W(x)}{\phi_1^2(x)} = \frac{\phi_1(x)\phi_2'(x) - \phi_2(x)\phi_1'(x)}{\phi^1(x)} = \left(\frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}\right)' = 0 \quad \text{για κάθε } x \in (a, b).$$

Άρα $\phi_2(x) = c\phi_1(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα που μας δίνει την γενική λύση της ομογενούς δ.ε. 3.3

Θεώρημα 3.1.4 Η ομογενής γραμμική δ.ε. 3.3 έχει λύσεις της μορφής $y = e^{rx}$, όπου το r είναι ρίζα της *χαρακτηριστικής εξίσωσης*

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{3.5}$$

Η γενική της λύση είναι η

α) Η $y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$, αν $r_1 \neq r_2$ είναι δύο πραγματικές ρίζες της 3.5.

β) Η $y(x) = (c_1x + c_2)e^{rx}$, αν r είναι διπλή ρίζα της 3.5.

γ) Η $y(x) = (c_1\cos(mx) + c_2\sin(mx))e^{lx}$ αν $l \pm im$ είναι μιγαδικές ρίζες της 3.5.

Απόδειξη

Αναζητούμε λύσεις της μορφής $y(x) = e^{rx}$. Αντικαθιστώντας στην δ.ε. παίρνουμε

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0.$$

Άρα, εκλέγοντας το r ώστε να είναι ρίζα της τριωνυμικής εξίσωσης 3.5, έχουμε ότι η $y = e^{rx}$ είναι λύση της δ.ε.

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις.

(i) *Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο διάφορες μεταξύ τους πραγματικές ρίζες* r_1, r_2.

Είναι τότε εύκολο να δούμε ότι οι $\phi_1(x) = e^{r_1 x}$ και $\phi_2(x) = e^{r_2 x}$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε. και από την πρόταση 3.1.3 προκύπτει ότι η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

(ii) *Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα* r.

Θέτουμε $y = e^{rx} Y$ και η δ.ε. 3.3 γίνεται

$$e^{rx}(Y'' + (2r + p)Y' + (r^2 + pr + q)Y) = 0.$$

Επειδή η r είναι διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, είναι

$$2r + p = r^2 + pr + q = 0 \Rightarrow Y'' = 0.$$

Οπότε $Y = c_1 x + c_2$ και επομένως

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{rx}, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

(iii) *Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες* $l \pm im$.

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι *μιγαδικές* συναρτήσεις

$$\begin{aligned} y_(x) &= e^{(l+im)x} = e^{lx}(\cos(mx) + i\sin(mx)) \\ \overline{y}(x) &= e^{(l-im)x} = e^{lx}(\cos(mx) - i\sin(mx)) \end{aligned}$$

είναι λύσεις της δ.ε. 3.3. Αφήνουμε σαν άσκηση στον αναγνώστη να βεβαιώσει ότι αν κάποια μιγαδική συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση της δ.ε. 3.3, τότε το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι επίσης λύσεις της δ.ε. Στην περίπτωση που

$$y(x) = \left(e^{lx}\cos(mx)\right) + i\left(e^{lx}\sin(mx)\right) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$$

δείξτε ότι έχουμε $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0$.

□

Παράδειγμα 3.1.5 Να λυθεί η δ.ε. $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 - 5r + 6 = 0$ και έχει ρίζες τις $r_1 = 2$ και $r_2 = 3$. Άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Παράδειγμα 3.1.6 Να λυθεί η δ.ε. $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 - 4r + 29 = 0$ και έχει τις μιγαδικές ρίζες $2 \pm i5$. Άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y(x) = e^{2x}(c_1\cos(5x) + c_2\sin(5x)), \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Παράδειγμα 3.1.7 Να λυθεί η δ.ε. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $r^2 - 4r + 4 = 0$ και έχει διλή ρίζα την $r = 2$. Άρα η γενική λύση της δ.ε. είναι η

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{2x}, \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

Εφαρμογή 3.1.8 Βρείτε την λύση της $y'' + 5y' + 4y = 0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 3$ και $y'(0) = 0$.

(*Υπόδειξη:* Βρείτε πρώτα την γενική λύση $y(x)$ και την παράγωγό της $y'(x)$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε τις αρχικές συνθήκες για να πάρετε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα με αγνώστους c_1 και c_2. Η λύση που ζητάτε είναι η

$$y(x) = 4e^{-x} - e^{-4x}.)$$

Σημειώνουμε κλείνοντας αυτήν την παράγραφο, ότι οι λύσεις της δ.ε. 3.3 ορίζονται σε όλη την πραγματική ευθεία (βλ. Θεώρημα 3.1.1).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις παρακάτω δ.ε. και τα προβλήματα αρχικών τιμών.

1. $y'' - 5y + 6y = 0$ 2. $y'' + 2y' + y = 0$
3. $y'' - y' = 0$ 4. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
5. $y'' + 4y' + 13y = 0$ 6. $y'' - 4y' + 20y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 1.$

7. Ακολουθώντας τη μέθοδο της Πρότασης 3.1.3 αποδείξτε ότι εάν οι $p(x)$ και $q(x)$ είναι συνεχείς στο (a, b) και οι $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

τότε η $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0$ στο (a, b) και άρα η γενική της λύση είναι της μορφής

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x), \quad c_1, c_2 \text{ αυθαίρετες σταθερές.}$$

8.(*) Αναπτύξτε τη μέθοδο *υποβιβασμού της τάξης* του D' Alembert. Γνωρίζοντας μία λύση y_1 της

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

βρείτε δεύτερη, γραμμικά ανεξάρτητη της y_1 λύση $v(x)$ (και άρα την γενική λύση) της δ.ε.

(Υπόδειξη: θέστε $y = v(x)y_1(x)$ και αντικαταστήστε στην δ.ε. Δικαιολογήστε πως καταλήγετε στη γραμμική δ.ε. *πρώτης τάξης*

$$(v')' + \left(p + 2\frac{y_1'}{y_1}\right)v' = 0.$$

και βρείτε την v.)

3.1.2 Μη ομογενείς γραμμικές δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Θα περιγράψουμε τώρα δύο μεθόδους για την εύρεση μερικής λύσης της δεύτερης τάξης γραμμικής μη ομογενούς δ.ε.

$$y'' + py' + qy = R(x)$$

Ι. Μέθοδος των προσδιοριστέων συνετελεστών

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται *μόνο* όταν η $R(x)$ είναι ειδικής μορφής. Συγκεκριμένα:

α) Αν $R(x) = (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)e^{rx}$, αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$w(x) = x^n(c_m x^m + \cdots + c_1 x + c_0)e^{rx},$$

εάν το r είναι ρίζα πολλαπλότητας n της χαρακτηριστικής εξίσωσης 3.5. Αν ο r δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης, θέτουμε $n = 0$.

β) Αν $R(x) = (P_1(x)\cos(mx) + P_2(x)\sin(mx))e^{lx}$, όπου P_1 και P_2 πολυώνυμα βαθμού m_1 και m_2 αντίστοιχα, τότε αναζητούμε μερική λύση της μορφής

$$w(x) = x^n(Q_1(x)\cos(mx) + Q_2(x)\sin(mx)e^{lx}$$

όπου Q_1 και Q_2 αυθαίρετα πολώνυμα βαθμού $\max\{m_1, m_2\}$ αν ο $l+im$ είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης 3.5 πολλαπλότητας n. Αν ο $l + im$ δεν είναι ρίζα της 3.5, θέτουμε $n = 0$.

γ) Αν $R(x) = \sum_{i=1}^{m} R_i(x)$ όπου R_i της μορφης α) ή β), τότε χωρίζουμε την δ.ε. στις

$$y'' + py' + qy = R_1(x)$$
$$\vdots$$
$$y'' + py' + qy = R_m(x)$$

και βρίσκουμε τις αντίστοιχες μερικές λύσεις $w_i(x)$ $i = 1, \ldots, m$. Προφανώς, η

$$w(x) = \sum_{i=1}^{m} R_i(x)$$

είναι μερική λύση της αρχικής δ.ε. (γιατί;)

Παράδειγμα 3.1.9 Να βρεθεί μία μερική λύση της δ.ε. $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 3$.

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$w(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

αφού το $r = 0$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - 4r + 4 = 0$. Έχουμε:

$$w'(x) = 2c_2x + c_1 \quad w''(x) = 2c_2$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει μετά τις πράξεις

$$4c_2x^2 + (4c_1 - 8c_2)x + (2c_2 - 4c_1 + 4c_0) \equiv 2x^2 + 3.$$

Οπότε από το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 4c_2 &= 2 \\ 4c_1 - 8c_2 &= 0 \\ 2c_2 - 4c_1 + 4c_2 &= 3 \end{aligned}$$

παίρνουμε $c_2 = 1/2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3/2$ και η μερική λύση είναι η

$$w(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}.$$

Παράδειγμα 3.1.10 Να βρεθεί μία μερική λύση της δ.ε. $y'' - y' = x$.

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$w(x) = x(c_1x + c_0)$$

αφού το $r = 0$ είναι απλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 - r = 0$. Έχουμε:

$$w'(x) = 2c_1x + c_0 \quad w''(x) = 2c_1$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει μετά τις πράξεις

$$-c_1x + c_0 + 2c_1 \equiv x.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} -2c_1 &= 1 \\ c_0 + 2c_1 &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή, $c_1 = -1/2$, $c_0 = 1$ και η μερική λύση είναι η

$$w(x) = -\frac{1}{2}x + x.$$

Εφαρμογή 3.1.11 Βρείτε μία μερική λύση της $y'' + 4y' + 4y = 3xe^{-2x}$.

(Υπόδειξη: Αναζητήστε μερική λύση της μορφής

$$w(x) = x^2(c_1x + c - 0)e^{-2x}. \text{ (γιατί;)}$$

Θα καταλήξετε στην

$$w(x) = \frac{1}{2}x^3e^{-2x}.)$$

Παράδειγμα 3.1.12 Να βρεθεί μία μερική λύση της δ.ε. $y'' + 4y = 2e^x \sin(2x)$.

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$w(x) = (a\sin(2x) + b\cos(2x))e^x$$

αφού ο $l + im = 1 + 2i$ δεν είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης $r^2 + 4 = 0$. Βρίσκοντας τις $w'(x)$ και $w''(x)$ και αντικαθιστώντας προκύπτει μετά τις πράξεις

$$(a\sin(2x) + b\cos(2x))e^x + 2(2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)e^x \equiv 2\sin(2x)e^x$$

ή

$$(a - 4b)\sin(2x) + (4a + b)\cos(2x) \equiv 2\sin(2x).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} a - 4b &= 2 \\ 4a + b &= 0 \end{aligned}$$

και παίρνουμε $a = 2/17, b = -8/17$, και η μερική λύση είναι η

$$w(x) = \left(\frac{2}{17}\sin(2x) - \frac{8}{17}\cos(2x)\right)e^x.$$

Εφαρμογή 3.1.13 Να βρεθεί μερική λύση της δ.ε. $y'' - y = xe^{2x} + \cos(2x)$.

(Υπόδειξη: χωρίστε την δ.ε. στις

$$\begin{aligned} &y'' - y = xe^{2x} \\ &y'' - y = \cos(2x).) \end{aligned}$$

Εφαρμογή 3.1.14 Βρείτε μερική λύση της δ.ε. $y'' + y = \cos^3 x$.

(Υπόδειξη: Κατ΄ αρχάς δεν φαίνεται η παραπάνω δ.ε. να εμπίπτει στις κατηγορίες που μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. Ας θυμηθούμε όμως ότι

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4}\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos x.$$

Χωρίστε τώρα τις δ.ε.)

II. Μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

.

Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται ακόμα και σε μή γραμμικές δ.ε., χρειάζεται όμως να γνωρίζουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς $\phi_1(x)$ και $\phi_2(x)$.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x).$$

Εντοπίζουμε *συναρτήσεις* $c_1 = v_1(x)$ και $c_2 = v_2(x)$ ώστε η

$$w(x) = v_1(x)\phi_1(x) + v_2(x)\phi_2(x)$$

να είναι μερική λύση της μη ομογενούς δ.ε. Ισχυριζόμαστε ότι:

Αν οι συναρτήσεις $c_1 = v_1(x)$ και $c_2 = v_2(x)$ επαληθεύουν το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) &= 0 \\ c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) &= R(x), \end{aligned}$$

τότε η $w(x) = v_1(x)\phi_1(x) + v_2(x)\phi_2(x)$ είναι μερική λύση της δ.ε.

Δεχόμενοι αυτόν τον ισχυρισμό, και επειδή η ορίζουσα $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ (ή για όλα τα $x \in (a, b)$), το παραπάνω σύστημα έχει πάντοτε λύση

$$c_1'(x) = \psi_1(x), \quad c_2'(x) = \psi_2(x).$$

Οπότε, ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$c_1(x) = v_1(x) = \int \psi_1(x)dx, \quad c_2(x) = v_2(x) = \int \psi_2(x)dx$$

και η μερική λύση που αναζητούμε είναι η

$$w(x) = v_1(x)\phi_1(x) + v_2(x)\phi_2(x).$$

Αν μας δοθούν αρχικές συνθήκες $w(x_0) = 0, w'(x_0) = 0$, τότε χρησιμοποιούμε ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$c_1(x) = v_1(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_1(t)dt, \quad c_2(x) = v_2(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_2(t)dt.$$

Απομένει να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας. Έχουμε:

$$\begin{aligned} w(x) &= c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x) \\ w'(x) &= c_1(x)\phi_1''(x) + c_2(x)\phi_2''(x) + \\ &\quad c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$c_1'(x)\phi_1(x) + c_2'(x)\phi_2(x) = 0$$

και παραγωγίζοντας ξανά, έχουμε

$$\begin{aligned} w''(x) &= c_1(x)\phi_1''(x) + c_2(x)\phi_2''(x) + \\ &\quad c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην δ.ε. παίρνουμε

$$\begin{aligned} c_1(x)\phi_1''(x) + c_2(x)\phi_2''(x) + c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) + \\ p(c_1(x)\phi_1'(x) + c_2(x)\phi_2'(x)) + q(c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x)) &= R(x). \end{aligned}$$

Επειδή οι ϕ_1, ϕ_2 είναι λύσεις της δ.ε., παίρνουμε την

$$c_1'(x)\phi_1'(x) + c_2'(x)\phi_2'(x) = R(x).$$

Παράδειγμα 3.1.15 Να λυθεί με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων η

$$y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 3.$$

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι

$$z(x) = (d_1 x + d_2)e^{2x}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Θεωρούμε τις $\phi_1(x) = e^{2x}$ και $\phi_2(x) = xe^{2x}$. και το σύστημα

$$\begin{aligned} & e^{2x}c_1' + xe^{2x}c_2' = 0 \\ & 2e^{2x}c_1' + (2x+1)e^{2x}c_2' = 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

που έχει λύσεις $c_1'(x) = -(2x^3 + 3x)e^{-2x}$, $c_2'(x) = (2x^2 + 3)e^{-2x}$. Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$\begin{aligned} c_1(x) = v_1(x) &= \frac{e^{-2x}}{2}\left(2x^3 + 3x^2 + 6x + \frac{3}{2}\right), \\ c_2(x) = v_2(x) &= -\frac{e^{-2x}}{2}\left(2x^3 + 2x + 4\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς, μία μερική λύση της μη ομογενούς είναι η

$$w(x) = v_1(x)e^{2x} + v_2(x)xe^{2x} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

ενώ η γενική της λύση είναι η

$$y(x) = z(x) + w(x) = (d_1 x + d_2)e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 3.1.16 Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{9},\ y'(0) = \frac{2}{9}.$$

Απάντηση: $y(x) = (2/9)x + 1/9$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για να εντοπίσετε μία μερική λύση της μη ομογενούς δ.ε., βρείτε την γενική λύση των ακόλουθων δ.ε. και προβλημάτων αρχικών τιμών.

$$\begin{aligned} & 1,\ y'' + y' - 2y = 2x, \quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1 \\ & 2.\ 2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x} \end{aligned}$$

3. $y'' + 4y = x^2 + 3e^x, \quad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 2$
4. $y'' + 2y' = 3 + 4\sin(2x)$
5. $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$
6. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, \quad y(0) = 1. \;\; y'(0) = 1$
7. $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$
8. $y'' + y = 3\sin(2x) + x\cos(2x)$
9. $y'' + 2y' + y = e^x \cos x$
10. $y'' + y' + y = \sin^2 x$

Το ίδιο όπως παραπάνω, αλλά αυτή την φορά χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για να εντοπίσετε τη μερική λύση της μη ομογενούς δ.ε.

11. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$, 12. $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$
13. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$, 14. $y'' + y = \tan x, \;\; x \in (0, \pi/2)$
15. $y'' + 9y = 9\sec^2(3x), \quad x \in (0, \pi/6)$
16. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{1}{x^2 e^{2x}}, \quad x > 0$
17. $y'' + 4y = 3\csc(2x), \quad x \in (0, \pi/2)$

18. Θεωρούμε τη δ.ε. του Bessel

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 3x^{3/2} \sin x, \quad x > 0.$$

α) Δείξτε ότι οι $x^{-1/2}\sin x$ και $x^{-1/2}\cos x$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε.

β) Βρείτε την γενική λύση της δ.ε.

γ) Βρείτε τύπο για την γενική λύση της δ.ε.

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = g(x), \quad x > 0.$$

19. Βρείτε τύπο για μία μερική λύση της δ.ε.

$$y'' - 5y' + 6y = g(x).$$

3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξης $n > 2$

Η φιλοσοφία πίσω από την μελέτη της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης ανώτερης τάξης

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_0(x)y = R(x), \quad n > 2, \tag{3.6}$$

είναι ουσιαστικά η ίδια με αυτήν της μελέτης της γραμμικής δ.ε. δεύτερης τάξης. Για τον λόγο αυτό, αφού θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα που χρειάζονται, θα περάσουμε κατευθείαν στα παραδείγματα και στις εφαρμογές, συστήνοντας στον αναγνώστη να προσέξει τις ομοιότητες με αυτά που ισχύουν στην περίπτωση $n = 2$.

Θεώρημα 3.2.1 Ας είναι x_0 σημείο του (a, b) στο οποίο οι συναρτήσεις $P_0, \ldots, P_{n-1}, R$ είναι συνεχείς, και έστω $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ δοθέντες αριθμοί. Τότε υπάρχει μοναδική λύση $y = y(x)$ της δ.ε. 3.6 που επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Ας είναι τώρα η δ.ε με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_0 y = R(x) \tag{3.7}$$

και

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_0 y = 0 \tag{3.8}$$

η αντίστοιχη ομογενής της. Έχουμε τις παρακάτω γενικεύσεις των αποτελεσμάτων που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο:

α) Η γενική λύση $y(x)$ της μη ομογενούς δ.ε. 3.7 είναι άθροισμα μίας μερικής της λύσης $w(x)$ και της γενικής λύσης $z(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. 3.8.

β) Όταν οι $\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της 3.8, η γενική της λύση είναι η

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x), \quad c_i \text{ αυθαίρετες σταθερές } i = 1, \ldots n.$$

Σημειώνουμε ότι η γραμμική ανεξαρτησία των $\phi_1, \ldots, \phi_n$ είναι ισοδύναμη με τον μη μηδενισμό της ορίζουσας

$$W(\phi_1, \ldots, \phi_n)(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \ldots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \ldots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \quad \forall x \in (a, b).$$

Επιπλέον τα α) και β) ισχύουν και για την 3.6.

Το παρακάτω θεώρημα μας περιγράφει την γενική λύση της ομογενούς δ.ε. 3.8.

Θεώρημα 3.2.2 Η ομογενής γραμμική δ.ε. 3.8 έχει λύσεις της μορφής $y = e^{rx}$, όπου το r είναι ρίζα της *χαρακτηριστικής εξίσωσης*

$$r^n + p_{n-1}r^{n-1} + \cdots + p_1 r + p_0 = 0. \tag{3.9}$$

Η γενική της λύση είναι:

α) Η

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i x}$$

αν οι r_i είναι n διακεκριμένες ρίζες της 3.9.

β) Η

$$y(x) = \sum_{i=1}^{k} Q_{n_i-1}(x) e^{r_i x},$$

αν οι r_i, $i = 1, \dots k$, $k < n$ είναι k διακεκριμένες ρίζες της της 3.9 με αντίστοιχες πολλαπλότητες n_i, όπου $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Τα $Q_{n_i-1}(x)$, $i = 1, \dots k$ είναι αυθαίρετα πολυώνυμα με $\deg(Q_{n_i-1}) = n_i - 1$, δηλαδή

$$Q_{n_i-1}(x) = c_{i_0} + c_{i_1}x + \cdots + c_{i_{n_i}} x^{n_i-1}.$$

γ) Στην περίπτωση που έχουμε $l + im$ μιγαδική ρίζα πολλαπλότητας ν, τότε, στη θέση δύο όρων του αθροίσματος της β) βάζουμε το

$$e^{lx} \left(Q_1(x) \cos(mx) + Q_2(x) \sin(mx) \right)$$

όπου Q_1 και Q_2 είναι αυθαίρετα πολυώνυμα βαθμού ν.

Παράδειγμα 3.2.3 Να λυθεί η δ.ε. $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$ έχει ρίζες τις $r_1 = -1$, $r_2 = 2$ και $r_3 = 3$. Άρα, η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 3.2.4 Να λυθεί η δ.ε. $y^{(iv)} - 7y''' + 18y'' - 20y' + 8y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^4 - 7r^3 + 18r^2 - 20r + 8 = 0$ έχει ρίζες τις $r_1 = 1$, και $r_2 = 2$ που ειναι πολλαπλότητας 3. Άρα, η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{x} + (c_2 + c_3 x + c_4 x^2) e^{2x}, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 3.2.5 Να λυθεί η δ.ε. $y^{(iv)} + 8y'' + 16y = 0$.

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^4 + 8r^2 + 16 = 0$ έχει τις διπλές ρίζες $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$. Άρα, η γενική λύση είναι η

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) \cos(2x) + (c_3 + c_4 x) \sin(2x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμογή 3.2.6 Να λυθεί η δ.ε. $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε δύο μεθόδους για να εντοπίζουμε μία μερική λύση της μη ομογενούς δ.ε.

I. Μέθοδος των προσδιοριστέων συνετελεστών

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται *μόνο* όταν η $R(x)$ είναι της ειδικής μορφής που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η αναζήτηση της μερικής λύσης γίνεται *ακριβώς* με τον ίδιο τρόπο.

II. Μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

Και εδώ, η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται ακόμα και σε μή γραμμικές δ.ε., εάν όμως γνωρίζουμε n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $\phi_1(x), \ldots,$ $\phi_n(x)$ της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε.

Εντοπίζουμε συναρτήσεις $c_i = v_i(x)$ $i = 1, \ldots, n$ ώστε η

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\phi_i(x)$$

να είναι μερική λύση της μη ομογενούς δ.ε. Καταλήγουμε στην επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned}
c_1'(x)\phi_1(x) + \cdots + c_n'(x)\phi_n(x) &= 0 \\
c_1'(x)\phi_1'(x) + \cdots + c_n'(x)\phi_n'(x) &= 0 \\
&\vdots \\
c_1'(x)\phi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\phi_n^{(n-1)}(x) &= R(x)
\end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση

$$c_i'(x) = \psi_i(x) \quad i = 1, \ldots, n,$$

λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $\phi_i(x)$.

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$c_i(x) = v_i(x) = \int \psi_i(x)dx, i = 1, \ldots, n,$$

και η μερική λύση που αναζητούμε είναι η

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\phi_i(x).$$

Αν μας δοθούν αρχικές συνθήκες $w(x_0) = 0$, $w'(x_0) = 0$, $\ldots$ $w^{(n-1)}(x_0) = 0$, τότε χρησιμοποιούμε ορισμένο ολοκλήρωμα:

$$c_i(x) = v_i(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Παράδειγμα 3.2.7 Να βρεθεί μερική λύση της $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \ln x$.

Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η

$$z(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{4x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Άρα τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις είναι οι e^x, e^{2x} και e^{3x}. Σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1' e^x + c_2' e^{2x} + c_3' e^{4x} &= 0, \\ c_1' e^x + 2c_2' e^{2x} + 4c_3' e^{4x} &= 0, \\ c_1' e^x + 4c_2' e^{2x} + 16c_3' e^{4x} &= \ln x, \end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε:

$$c_1' = \frac{e^{-x}\ln x}{3}, \quad c_2' = -\frac{e^{-2x}\ln x}{2}, \quad c_3' = \frac{e^{-4x}\ln x}{6}.$$

Ολοκληρώνοντας, προκύπτει η μερική λύση $w(x)$. (Ποια είναι;)

Εφαρμογή 3.2.8 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''' + 4y' = x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1.$$

(Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε. είναι η

$$z(x) = c_1 + c_2 \cos(2x) + c_3 \sin(2x).$$

Βρείτε κατόπιν με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων μία μερική λύση της δ.ε. και τέλος, με τη βοήθεια των αρχικών συνθηκών προσδιορίστε τις c_1, c_2 και c_3.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Λύστε τις

1. $y''' - 8y'' + 22y' - 20y = 0,$
2. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \quad y(\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0,\ y''(\pi) = 1.$

Με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών λύστε την δ.ε.

$$4.\ y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$$

και με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, βρείτε μία μερική λύση της

$$5.\ y''' + y' = \sec x.$$

Λύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$6.\ y^{(iv)} - y = 3x + \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1.$$

3.3 Ορισμένες εφαρμογές

3.3.1 Αρμονική ταλάντωση εκκρεμούς

Ένα απλό εκκρεμές μήκους l, με προσαρτημένο βάρος $W = mg$, εκτελεί ταλαντώσεις. Θα εξετάσουμε την κίνηση του εκκρεμούς όταν η γωνία θ που σχηματίζει το εκκρεμές με την κατακόρυφο είναι πολύ μικρή.

Η δύναμη F που κινεί το εκκρεμές, είναι η συνιστώσα του βάρους που εφάπτεται στο τόξο της τροχιάς, δηλαδή

$$F = W \sin\theta = mg\sin\theta.$$

Από την άλλη, ο νόμος του Νεύτωνα δίνει

$$F = m\frac{dv}{dt} = -mg\sin\theta \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g\sin\theta.$$

Το μήκος του τόξου της τροχιάς είναι $s = l\theta$, άρα $\frac{ds}{dt} = l\frac{d\theta}{dt}$. Αλλά,

$$v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στην δ.ε.

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + g\sin\theta = 0. \tag{3.10}$$

Σε μία μικρή περιοχή του μηδενός, είναι $\sin\theta \simeq \theta$, οπότε αντί της 3.10 θεωρούμε την

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0. \tag{3.11}$$

Η γενική της λύση είναι

$$\theta(t) = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

που ονομάζεται *απλή αρμονική ταλάντωση.*

Σημειώνουμε ότι η επίλυση της δ.ε. 3.10 δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη, τουλάχιστον ως προς το μέρος του υποβιβασμού της τάξης της. Διαφορικές εξισώσεις σαν και αυτή, *όπου λείπει η ανεξάρτητη μεταβλητή,* λύνονται με τον παρακάτω τρόπο. Θέτουμε

$$\phi = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\phi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\phi}{d\theta}\phi.$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει η χωριζομένων μεταβλητών δ.ε. πρώτης τάξης

$$l\phi\frac{d\phi}{d\theta} + g\sin\theta = 0,$$

που δίνει

$$\phi^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\theta + c.$$

3.3.2 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις του Euler

Ορισμός 3.3.1 Οι δ.ε. της μορφής

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + p_0 y = R(x) \tag{3.12}$$

λέγονται *γραμμικές δ.ε. του Euler*.

Με τον μετασχηματισμό $x = e^t$, έχουμε (γιατί;)

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}, \quad x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}, \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}, \quad \text{κλπ.}$$

και κατά αυτόν τον τρόπο η δ.ε. του Euler γίνεται γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές.

Σημειώνουμε ότι η γενική λύση της ομογενούς δ.ε του Euler ορίζεται στο $(0, +\infty)$, αλλά επεκτείνεται σε οποιοδήποτε διάστημα που δεν περιέχει το 0 θέτοντας αντί του x το $-x$ στην έκφραση της γενικής λύσης.

Παράδειγμα 3.3.2 Να λυθεί η δ.ε. $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$. Κατόπιν δώστε μία έκφραση για την γενική λύση της δ.ε. στο $\mathbb{R}_*$.

Θέτουμε $x = e^t$ και χρησιμοποιούμε τις

$$xy' = \dot{y}, \quad x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$$

όπου η τελεία συμβολίζει παραγώγιση ως προς t. Προκύπτει μετά την αμτικατάσταση και τις πράξεις, η γραμμική δ.ε. με σταθερούς συντελεστές ως προς t:

$$2\ddot{y} + \dot{y} - y = 0.$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής της εξίσωσης είναι $r_1 = -1$ και $r_2 = 1/2$. Άρα η γενική της λύση στο $(0, +\infty)$ είναι η

$$\begin{aligned} y &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{t/2} \\ &= \frac{c_1}{x} + c_2\sqrt{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της στο $\mathbb{R}_*$ είναι η

$$y(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{x} + c_2\sqrt{x} & x > 0 \\ \frac{d_1}{x} + d_2\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases} \quad c_1, d_1, c_2, d_2 \in \mathbb{R}.$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λυθούν οι παρακάτω δ.ε και τα προβλήματα αρχικών τιμών.

1. $y'' - y = 0$ 2. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

3. $y'' + 4y' + 13y = 0$ 4. $y'' - 4y' + 20y = 0, \quad y(\pi/2) = 0,\ y'(\pi/2) = 1$

Για τις παρακάτω δ.ε. και προβλήματα αρχικών τιμών, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών για τον εντοπισμό μίας μερικής λύσης.

$$5.\ y'' - 2y' + 5y = e^x \cos x \quad 6.\ y'' - y' - 2y = 5\sin x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$
$$7.\ y'' - 4y' + 4y = 2e^x + \frac{x}{2} \quad 8.\ y'' - 3y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1$$

Για τις παρακάτω δ.ε. και προβλήμτα αρχικών τιμών, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για τον εντοπισμό μίας μερικής λύσης.

$$9.\ y'' - y = 2(e^x + 1)^{-1} \quad 10.\ y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = 1$$
$$11.\ y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \tan^2 x \quad 12.\ y'' - 3y' + 2y = \cos(e^{-x})$$

Λύστε τις δ.ε. του Euler

$$13.\ x^2y'' - xy' + y = x \quad 14.\ x^2y'' + xy' - 4y = x^2e^{-x}$$
$$15.\ 2x^2y'' + 3xy' - y = \frac{1}{x} \quad 16.\ x^2y'' + xy' - 4y = x^3$$

Λύστε τις δ.ε. και τα προβλήματα αρχικών τιμών

$$17.\ y''' + y'' + y' + y = 4x + e^{-x} \quad 18.\ y^{(iv)} - y = 3x + \cos x$$
$$19.\ y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{1}{4},\ y''(0) = -\frac{3}{2}$$
$$20.\ y''' + 2y'' + 2y' + 2y = x^3, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

21. Βρείτε την καμπύλη $y = f(x)$ με την ιδιότητα: η δεύτερη παράγωγος είναι ίση με το άθροισμα των δύο συντεταγμένων, και η κλίση στο $(0, 0)$ είναι μηδενική.

22. Δείξτε ότι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y'' + y = g(x), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

είναι η

$$y = \phi(x) = \int_0^x g(t)\sin(x - t)dt.$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι η *συνέλιξη* (convolution) $(g * \sin)(x)$ των $g(x)$ και $\sin x$.

Κεφάλαιο 4

Συστήματα διαφορικών εξισώσεων

4.1 Εισαγωγή, ορισμοί, θεωρήμα ύπαρξης και μοναδικότητας

Τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων προκύπτουν φυσιολογικά από προβλήματα στα οποία εμφανίζονται διάφορες εξαρτημένες μεταβλητές, κάθε μία από τις οποίες είναι συνάρτηση μίας συγκεκριμένης ανεξάρτητης μεταβλητής. Θα δηλώνουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή με t και την παραγώγιση ως προς t με τελεία.

Για παράδειγμα. η κίνηση ενός υλικού σημείου στον χώρο περιγράφεται από τον Νόμο του Νεύτωνα στις τρεις διαστάσεις

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \\ m\ddot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \\ m\ddot{x}_3 &= F_3(t, x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) \end{aligned}$$

όπου m η μάζα του υλικού σημείου, x_1, x_2 και x_3 οι συντεταγμένες του στον χώρο και F_1, F_2 και F_3 οι δυνάμεις που ασκούνται στο υλικό σημείο στις κατευθύνσεις των x_1, x_2 και x_3 αντίστοιχα.

Συστήματα δ.ε. εμφανίζονται επίσης σε πολλές άλλες εφαρμογές, όπως στον ηλεκτρισμό, στην χημεία και τη βιολογία. Από θεωρητική άποψη, υπάρχει μία σημαντική σύνδεση των συστημάτων δ.ε. και εξισώσεων οποιασδήποτε τάξης. Πράγματι η δ.ε. τάξης n

$$y^{(n)} = F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$$

ανάγεται πάντοτε σε ένα σύστημα n πρώτης τάξης εξισώσεων ειδικής μορφής. Θέτουμε

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \ldots$$

και προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= F(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο, και *όλα* τα συστήματα δ.ε. οποιασδήποτε τάξης (αρκεί να έχουν τόσες εξισώσεις όσες και αγνώστους) μπορούν να αναχθούν σε ένα *πρώτης τάξης σύστημα διαφορικών εξισώσεων* της μορφής

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\dot{x}_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= F_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n).
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Το σύστημα 4.1 λέγεται ότι έχει *λύση* στο (a, b) εάν υπάρχουν n συναρτήσεις

$$x_1 = \phi_1(t),\ x_2 = \phi_2(t), \quad \ldots \quad x_n = \phi_n(t)$$

που το ικανοποιούν σε όλα τα σημεία του (a, b). Επιπρόσθετα με το παραπάνω σύστημα, μπορούν επιπλέον να δοθούν αρχικές συνθήκες της μορφής

$$x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0, \quad \ldots \quad x_n(t_0) = x_n^0. \tag{4.2}$$

όπου $t \in (a, b)$ και $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ δοθέντες αριθμοί (πρόβλημα αρχικών τιμών).[1]

Έχουμε το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας, ανάλογο του Θεωρήματος 2.8.1 Peano–Picard:

Θεώρημα 4.1.1 Έστω ότι οι συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_n$ και όλες οι μερικές παράγωγοι τους $\partial F_i/\partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$ είναι συνεχείς σε ένα ανοικό χωρίο Ω του $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ που περιέχει το $(t_0, \mathbf{x}_0)$. Τότε υπάρχει ανοική περιοχή του t_0 στο $\mathbb{R}$ στην οποία ορίζεται με μοναδικό τρόπο λύση

$$x_1 = \phi_1(t),\ x_2 = \phi_2(t), \quad \ldots \quad x_n = \phi_n(t)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες 4.2.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στην απόδειξη του θεωρήματος 2.8.1 και είναι πέρα από τους σκοπούς αυτών των σημειώσεων.

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις $F_1, \ldots, F_n$ στο σύστημα 4.1 είναι γραμμικές ώς προς τις εξαρτημένες μεταβλητές, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= P_{11}(t)x_1 + \cdots + P_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= P_{n1}(t)x_1 + \cdots + P_{nn}(t)x_n + g_1(t)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

[1] Παρατηρήστε ότι η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής είναι η εύρεση ολοκληρωτικής καμπύλης του διανυσματικού πεδίου $F = (F_1, \ldots, F_n)$ που περνά από το $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

τότε το σύστημα λέγεται γραμμικό. Θέτοντας

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P_{11}(t) & \dots & P_{1n}(t) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ P_{n1}(t) & \dots & P_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix},$$

το γραμμικό σύστημα 4.3 γράφεται και ως

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{g}(t). \tag{4.4}$$

Εάν ο $\mathbf{g}$ είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε το σύστημα λέγεται *ομογενές*· ειδάλλως, λέγεται *μη ομογενές*. Εδώ, το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι απλούστερο και έχει ισχυρότερα συμπεράσματα· αναλογεί στο Θεώρημα 2.3.4:

Θεώρημα 4.1.2 Εάν οι συναρτήσεις P_{ij} και g_i, $i, j = 1, \dots n$ είναι συνεχείς στο (a, b) που περιέχει το σημείο t_0, τότε ορίζεται με μοναδικό τρόπο λύση

$$x_1 = \phi_1(t),\ x_2 = \phi_2(t), \quad \dots \quad x_n = \phi_n(t)$$

που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες 4.2. Η λύση ορίζεται για κάθε $t \in (a, b)$.

Σο εξής θα ασχοληθούμε με γραμμικά συστήματα δ.ε. πρώτης τάξης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μετασχηματίστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u} + p(t)\dot{u} + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0,\ u'(0) = u_0',$$

σε πρόβλημα αρχικών τιμών δύο γραμμικών δ.ε. πρώτης τάξης.

2. Δείξτε ότι αν $\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & y_1(t) \end{pmatrix}^T$ και $\mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) & y_2(t) \end{pmatrix}^T$ είναι δύο λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_{11}(t)x + P_{12}(t)y \\ \dot{y} &= P_{21}(t)x + P_{22}(t)y, \end{aligned}$$

τότε και η $\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}_1(t) + c_2\mathbf{X}_2(t)$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, είναι επίσης λύση. Αυτή είναι η *αρχή της εναπόθεσης*.

3. Έστω $x = x_1(t)$ $y = y_1(t)$ και $x' = x_2(t)$ $y' = y_2(t)$ δύο λύσεις του γραμμικού μη ομογενούς συστήματος

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P_{11}(t)x + P_{12}(t)y + g_1(t) \\ \dot{y} &= P_{21}(t)x + P_{22}(t)y + g_2(t). \end{aligned}$$

Δείξτε ότι η $(x_1(t) - x_2(t), y_1(t) - y_2(t))$ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

4.2 Γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

4.2.1 Λύση γραμμικών συστημάτων με απαλοιφή

Ο στοιχειωδέστερος τρόπος επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος δ.ε. με σταθερούς συντελεστές, είναι με την ευθεία μέθοδο της απαλοιφής. Αν και δεν οδηγεί σε κάποια θεωρητικά συμπεράσματα, συνίσταται για συστήματα δύο ή και τριών δ.ε. Το πλεονέκτημά του είναι ότι εφαρμόζεται σε κάθε σύστημα της μορφής

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots n$$

αλλά το μειονέκτημά του είναι ότι συνήθως οδηγεί σε περίπλοκες δ.ε. Στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων, και ιδίως αυτών με σταθερούς συντελεστώς, τα πράγματα είναι κάπως απλούστερα.

Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο μέσα από ένα απλό παράδειγμα· ο αναγνώστης ας προσπαθήσει να αναπτύξει την γενικότερη μέθοδο.

Παράδειγμα 4.2.1 Να επιλυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε την πρώτη εξίσωση:

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 + \dot{x}_2.$$

Αντικαθιστούμε τις τιμές των $\dot{x}_1$ και $\dot{x}_2$ από τις εξισώσεις του δοσμένου συστήματος :

$$\ddot{x}_1 = (x_1 + x_2) + (4x_1 + x_2) = 5x_1 + 2x_2.$$

Το σύστημά μας τώρα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2, \\ \ddot{x}_1 &= 5x_1 + 2x_2. \end{aligned}$$

Από τη δεύτερη εξίσωση απαλείφουμε το x_2:

$$\ddot{x}_1 = 5x_1 + 2(\dot{x}_1 - x_1),$$

και προκύπτει η γραμμική δ.ε. δεύτερης τάξης

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_1 - 3x_1 = 0.$$

Η γενική της λύση είναι

$$x_1 = \phi_1(t) = c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}.$$

Από την $x_2 = \dot{x}_1 - x_1$ προκύπτει αμέσως ότι

$$x_2 = \phi_2(t) = 2c_1 e^{3t} - 2c_2 e^{-t}.$$

Εφαρμογή 4.2.2 Εφαρμόστε την ίδια διαδικασία για να λύσετε το μη ομογενές σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + g_1(t), \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 + g_2(t). \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Με τη μέθοδο της απαλοιφής λύστε τα παρακάτω συστήματα δ.ε.

$$\begin{aligned} 1.\ \dot{x}_1 &= x_1 - 5x_2, \quad x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 5x_2, \quad x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.\ \dot{x}_1 &= 3x_1 - 2x_2 - e^{-t}\sin t \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - x_2 + 2e^{-t}\cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.\ \dot{x}_1 &= 3x_1 - 4x_2 + e^{t}, \quad x_1(0) = 1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - e^{t}, \quad x_2(0) = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4.\ \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \sqrt{2}x_3 \\ \dot{x}_3 &= \sqrt{2}x_2 \end{aligned}$$

4.2.2 Βασική θεωρία γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων

Η γενική θεωρία των συστημάτων n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης 4.3

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= P_{11}(t)x_1 + \cdots + P_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= P_{n1}(t)x_1 + \cdots + P_{nn}(t)x_n + g_1(t) \end{aligned}$$

το οποίο γράφεται και υπό μορφή εξίσωσης πινάκων ως (βλ. 4.4)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{g}(t),$$

είναι στενά συνδεδεμένη με την θεωρία των γραμμικών δ.ε. πρώτης τάξης. Θα προτιμήσουμε την μορφή των πινάκων για το σύστημα, αφ΄ ενός γιατί τονίζει αυτή τη σύνδεση, αφ΄ ετέρου διότι γίνεται έτσι μεγάλη οικονομία χώρου.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)$ λέγεται *λύση* του συστήματος 4.4, αν οι συνιστώσες του $\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)$ ικανοποιούν το σύστημα 4.3. Θα υποθέτουμε στο εξής ότι οι $\mathbf{P}$ και $\mathbf{g}$ είναι συνεχείς σε κάποιο (a, b) (δηλαδή όλες οι συνιστώσες τους είναι συνεχείς στο (a, b)), ώστε από το Θεώρημα 4.1.2 να εξασφαλίζεται η ύπαρξη λύσεων στο (a, b).

Αρχίζουμε από την ομογενή εξίσωση

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t), \tag{4.5}$$

και υιοθετούμε τον συμβολισμό

$$\mathbf{X}^j(t) = \begin{pmatrix} x_{1j}(t) \\ x_{2j}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, k, \ldots$$

για να καθορίζουμε συγκεκριμένες λύσεις του συστήματος. Προσέξτε ότι η $x_{ij}(t) = \mathbf{X}_i^j(t)$ είναι η $i-$συνιστώσα της $j-$λύσης $\mathbf{X}^j(t)$.

Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι απλή και αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

Θεώρημα 4.2.3 Αν οι $\mathbf{X}$ και $\mathbf{X}'$ είναι λύσεις του συστήματος 4.5, τότε και κάθε γραμμικός συνδυασμός τους $c_1\mathbf{X} + c_2\mathbf{X}'$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, είναι επίσης λύση του συστήματος.

Συμπεραίνουμε αμέσως ότι αν $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^k$ είναι λύσεις του συστήματος, τότε και η

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}^1(t) + \cdots + c_k\mathbf{X}^k(t), \quad c_1, \ldots c_k \in \mathbb{R}$$

είναι λύση του συστήματος. Ποιο είναι όμως το k σε σχέση με το n; Το παρακάτω θεώρημα αντιστοιχεί στην Πρόταση 3.1.3

Θεώρημα 4.2.4 Εάν οι $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος 4.5 σε κάθε σημείο του διαστήματος (a, b), τότε κάθε λύση $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)$ του συστήματος μπορεί να εκφραστεί με μοναδικό τρόπο ως γραμικός συνδυασμός των $\mathbf{X}^i$, $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή

$$\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{X}^i(t), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}. \tag{4.6}$$

Προτού αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα, ας παρατηρήσουμε ότι σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.3 όλες οι εκφράσεις της μορφής 4.6 είναι λύσεις του συστήματος 4.5, ενώ από το Θεώρημα 4.2.4 όλες οι λύσεις μπορούν να γραφούν με την μορφή 4.6. Εάν οι σταθερές $c_1, \ldots, c_n$ θεωρηθούν αυθαίρετες, τότε η Εξ. 4.6 περιλαμβαάνει *όλες* τις λύσεις του συστήματος και για αυτό την λέμε *γενική λύση*. Επιπλέον, κάθε $n-$άδα γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ του συστήματος στο (a, b), λέγεται *θεμελιώδες σύνολο λύσεων* στο (a, b).

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι οποιαδήποτε λύση $\mathbf{\Phi}$ του συστήματος 4.5 γράφεται ως

$$\mathbf{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{X}^i(t)$$

για κατάλληλες σταθερές $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Έστω $t_0 \in (a, b)$ και $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{\Phi}(t_0)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει λύση της μορφής

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} c_i\mathbf{X}^i(t)$$

που επιπλέον ικανοποιεί τις αρχικές συνθ·ηκες $\mathbf{X}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $c_1, \ldots, c_n$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}^i(t_0) = \boldsymbol{\xi},$$

ή αναλυτικώτερα, το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} &c_1 x_{11}(t_0) + \cdots + c_n x_{1n}(t_0) = \xi_1, \\ &\vdots \\ &c_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + c_n x_{nn}(t_0) = \xi_n \end{aligned} \tag{4.7}$$

έχι λύση. Το τελευταίο συμβαίνει τότε και μόνον τότε όταν η ορίζουσα

$$W(\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)(t_0) = \begin{vmatrix} x_{11}(t_0) & \ldots & x_{1n}(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t_0) & \ldots & x_{nn}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τη γραμμική ανεξαρτησία των $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ στο t_0. (Γιατί;) Άρα, όντως υπάρχει (μοναδική) λύση που να ικανοποιεί τις δοθείσες αρχικές συνθήκες, και το ζητούμενο αποτέλεσμα προκύπτει από το θεώρημα μοναδικότητας 4.1.1. □

Έστω τώρα το μη ομογενές σύστημα 4.4

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}(t)\mathbf{X} + \mathbf{g}(t).$$

Θεώρημα 4.2.5 Η γενική λύση του μη ομογενούς γραμμικού συστήματος 4.4 είναι της μορφής

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{X}^i(t) + \boldsymbol{\Psi}(t), \tag{4.8}$$

όπου $\mathbf{X}^1(t), \ldots, \mathbf{X}^n(t)$ είναι ένα θεμελιώδες σύστημα λύσεων του ομογενούς συστήματος και $\boldsymbol{\Psi}(t)$ μία λύση του μη ομογενούς συστήματος.

Απόδειξη

Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\boldsymbol{\Psi}(t)$ και $\boldsymbol{\Psi}'(t)$ είναι δύο λύσεις του μη ομογενούς συστήματος 4.4, τότε η διαφορά τους είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος 4.5. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Psi}}(t) - \dot{\boldsymbol{\Psi}}'(t) &= \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}(t) + \mathbf{g}(t) - \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}'(t) - \mathbf{g}(t) \\ &= \mathbf{P}(t)\left(\boldsymbol{\Psi}(t) - \boldsymbol{\Psi}'(t)\right). \end{aligned}$$

Εφόσον κάθε λύση του ομογενούς συστήματος εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός του θεμελιώδους συνόλου λύσεων $\mathbf{X}^1(t), \ldots, \mathbf{X}^n(t)$, προκύπτει ότι κάθε λύση $\boldsymbol{\Phi}(t)$ μπορεί να γραφεί με την μορφή 4.8, όπου η $\boldsymbol{\Psi}$ είναι *μερική* λύση του συστήματος 4.4 και

$c_1, \ldots, c_n$ κατάλληλα επιλεγμένες σταθερές. Εάν οι σταθερές αυτές θεωρηθούν αυθαίρετες, η έκφραση 4.8 λέγεται *γενική λύση* του μή ομογενούς συστήματος 4.4. $\square$

Εάν έχει προσδιοριστεί ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος, τότε χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για να εντοπίσουμε μία μερική λύση του μη ομογενούς συστήματος. Περιγράφουμε την μέθοδο αυτή στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.2.6 Δίνεται το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 + e^{-t} \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 + e^{3t} \end{aligned}$$

και δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος

$$\mathbf{\Phi}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Προσδιορίζουμε μία μερική λύση $\mathbf{\Psi}(t)$ του μη ομογενούς συστήματος ως εξής. Θέτουμε

$$\mathbf{\Psi}(t) = u_1(t)\mathbf{\Phi}_1(t) + u_2(t)\mathbf{\Phi}_2(t),$$

όπου u_1 και u_2 είναι αριθμητικές συναρτήσεις που πρέπει να προσδιορίσουμε. Είναι τότε προφανές (γιατί;) ότι

$$\dot{u}_1(t)\mathbf{\Phi}_1(t) + \dot{u}_2(t)\mathbf{\Phi}_2(t) = \mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{3t} \end{pmatrix},$$

ή αναλυτικώτερα,

$$\begin{aligned} e^{-t}\dot{u}_1(t) + e^{3t}\dot{u}_2(t) &= e^{-t} \\ -e^{-t}\dot{u}_1(t) + e^{3t}\dot{u}_2(t) &= e^{3t}. \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς $\dot{u}_1$ και $\dot{u}_2$ (πράγμα που μπορούμε να κάνουμε *πάντοτε* εφόσον οι $\mathbf{\Phi}_1$ και $\mathbf{\Phi}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες), παίρνουμε

$$\dot{u}_1(t) = \frac{1 - e^{4t}}{2}, \quad \dot{u}_2(t) = \frac{1 + e^{-4t}}{2}.$$

Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$u_1(t) = \frac{t}{2} - \frac{e^{4t}}{8}, \quad u_2(t) = \frac{t}{2} - \frac{e^{-4t}}{8}.$$

Συνεπώς η μερική λύση είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{\Psi}(t) &= u_1(t)\mathbf{\Phi}_1(t) + u_2(t)\mathbf{\Phi}_2(t) \\ &= \left(\frac{t}{2} - \frac{e^{4t}}{8}\right)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} - \frac{e^{-4t}}{8}\right)\begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right)\begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ e^{-t} - e^{3t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\begin{aligned}\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) \begin{pmatrix} e^{3t} + e^{-t} \\ e^{-t} - e^{3t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \left(c_1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) e^{-t} + \left(c_2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) e^{3t} \\ \left(-c_1 + \frac{t}{2} - \frac{1}{8}\right) e^{-t} + \left(c_2 - \frac{t}{2} + \frac{1}{8}\right) e^{3t} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Εάν επιπλέον μας δίνονταν αρχικές συνθήκες, λόγου χάρη οι $x_1(0) = 0$ και $x_2(0) = 0$, τότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{8}$$

και η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι η

$$x_1(t) = \frac{t}{2}(e^{-t} + e^{3t}), \quad x_2(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\right)(e^{-t} - e^{3t}).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω δύο λύσεις $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2$ στο (a, b) του ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)$$

όπου $P(t)$ είναι 2×2 πίνακας. Εάν $W = W(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2)$, δείξτε ότι

$$\frac{dW}{dt} = \mathrm{tr}(P(t))W$$

και υπολογίστε την W κύνοντας την παραπάνω δ.ε.

2. Χρησιμοποιήστε τη γενίκευση του αποτελέσματος της Άσκησης 1 για να δείξετε το εξής Θεώρημα του Abel: εάν $\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n$ είναι λύσεις του ομογενούς $n \times n$ συστήματος $\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)$ στο (a, b), τότε εκεί η ορίζουσα $W(\mathbf{X}^1, \ldots, \mathbf{X}^n)$ είτε είναι ταυτοτικά μηδέν είτε πάντοτε διαφορετική του μηδενός.

3. Θεωρήστε τα διανύσματα

$$\mathbf{X}^1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^2(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}.$$

α) Υπολογίστε την ορίζουσα $W(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2)$. Σε ποια διαστήματα είναι τα $\mathbf{X}^1$ και $\mathbf{X}^2$ γραμμικά ανεξάρτητα;

β) Βρείτε το ομογενές γραμμικό σύστημα δ.ε. που ικανοποιούν οι $\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2$.

4. Απαντήστε τα ίδια ερωτήματα όπως στην Άσκηση 3 για τα διανύσματα

$$\mathbf{X}^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}^2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

4.2.3 Γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές

Θα δείξουμε σε αυτήν την παράγραφο πως βρίσκουμε την γενική λύση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος με σταθερούς συντελεστές

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{X}(t), \tag{4.9}$$

όπου $\mathbf{P}$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας και ως συνήθως

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}^T.$$

Σε αναλογία με τη μέθοδο που ακολουθήσαμε για να βρούμε τη γενική λύση της ομογενούς γραμμικής δ.ε. δεύτερης τάξης, αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$\mathbf{X}(t) = e^{rt}\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^n.$$

Αντικαθιστώντας στο σύστημα 4.9 έχουμε:

$$re^{rt}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}e^{rt}\boldsymbol{\xi} \Rightarrow (\mathbf{P} - r\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}.$$

Συμπεραίνουμε ότι εάν υπάρχουν λύσεις της μορφής $\mathbf{X}(t) = e^{rt}\boldsymbol{\xi}$, τότε το $\boldsymbol{\xi}$ είναι *ιδιοδιάνυσμα* του πίνακα $\mathbf{P}$ που αντιστοιχεί στην *ιδιοτιμή* r. Αντιστρόφως, εάν το $\boldsymbol{\xi}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $\mathbf{P}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή r, τότε εύκολα βλέπουμε ότι η $e^{rt}\boldsymbol{\xi}$ είναι λύση του συστήματος 4.9.

Βλέπουμε λοιπόν ότι τελικά, η εύρεση ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος δ.ε. 4.9 ανάγεται στην εύρεση των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα $\mathbf{P}$.

Ως γνωστόν, οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{P}$ δίνονται από την εξίσωση

$$\det(\mathbf{P} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{4.10}$$

Θα διακρίνουμε δύο γενικές περιπτώσεις.

I. Οι ιδιοτιμές είναι διάφορες μεταξύ τους

Έστω ότι ο $\mathbf{P}$ έχει τις διάφορες μεταξύ τους ιδιοτιμές r_i με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\xi}^i$, $i = 1, \dots, n$. Τότε οι

$$\mathbf{X}^1(t) = e^{r_1 t}\boldsymbol{\xi}^1, \dots, \mathbf{X}^n(t) = e^{r_n t}\boldsymbol{\xi}^n$$

αποτελούν ένα θεμελιώδες λύσεων του συστήματος 4.9 και η γενική λύση είναι η

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{r_i t}\boldsymbol{\xi}^i \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Για να το επιβεβαιώσουμε αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$W(\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^n)(t) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^n e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^1 e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^n e^{r_n t} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^1 & \dots & \xi_n^n \end{vmatrix}.$$

Η παραπάνω ορίζουσα είναι διάφορη του μηδενός· γνωρίζουμε ότι εάν ένας πίνακας έχει διάφορες μεταξύ τους ιδιοτιμές, τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Ας παρατηρήσουμε ότι δεν κάναμε καμμία διάκριση σε πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές. Στην τελευταία περίπτωση, προκύπτουν *μιγαδικές* λύσεις του συστήματος 4.9. Όμως μπορούμε πάντοτε να αντικαταστήσουμε τις μιγαδικές λύσεις με πραγματικές. Πράγματι, αν

$$\mathbf{X}(t) = e^{(l+im)t}\boldsymbol{\xi} \quad \text{και} \quad \bar{\mathbf{X}}(t) = e^{l-im)t}\bar{\boldsymbol{\xi}}, \quad \boldsymbol{\xi}^T \in \mathbb{C}^n$$

είναι ένα ζεύγος μιγαδικών λύσεων, τότε οι

$$\frac{1}{2}(\mathbf{X}(t) + \bar{\mathbf{X}}(t)) \quad \text{και} \quad \frac{1}{2i}(\mathbf{X}(t) - \bar{\mathbf{X}}(t))$$

είναι ένα ζεύγος πραγματικών, γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων του συστήματος 4.9. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού είναι εύκολη και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 4.2.7 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Γράφουμε το σύστημα υπό μορφή πινάκων: $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X}$ όπου

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα $\mathbf{P}$ είναι η[2]

$$r^2 - 2r - 3 = 0$$

απ΄ όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $r_1 = -1$ και $r_2 = 3$.

Για να βρούμε ένα ιδιοδιάνυσμα ξ^1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $r_1 = -1$,επιλύουμε την εξίσωση

$$(\mathbf{P} + \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 \end{pmatrix}^T,$$

που μας οδηγεί στο ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + \xi_2 &= 0 \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

[2] Για 2×2 πίνακες

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

η χαρακτηριστική εξίσωση μπορεί να γραφεί και ως

$$r^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{P})r + \det(\mathbf{P}) = 0,$$

όπου $\mathrm{tr}(\mathbf{P}) = a + d$ και $\det(\mathbf{P}) = ad - bc$.

Οι μη μηδενικές λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι της μορφής $c\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}^T$, $c \neq 0$, και θέτοντας $c = 1$ παίρνουμε

$$\boldsymbol{\xi}^1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Όμοια για την ιδιοτιμή $r_2 = 3$, από την εξίσωση $(\mathbf{P} - 3\mathbf{I}) \cdot \xi = \mathbf{0}$ παίρνουμε το

$$\begin{aligned} -2\xi_1 + \xi_2 &= 0 \\ 4\xi_1 - 2\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Εδώ οι μη μηδενικές λύσεις του παραπάνω συστήματος είναι της μορφής $c\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}^T$, $c \neq 0$, και θέτοντας $c = 1$ παίρνουμε

$$\boldsymbol{\xi}^2 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix} = c_1 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Παράδειγμα 4.2.8 Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix}1 & -1\\5 & -3\end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\det(\mathbf{P} - r\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow r^2 + 2r + 2 = 0$$

που δίνει τις μιγαδικές ιδιοτιμές $r_1 = -1 + i$ και $r_2 = -1 - i$.
Μετά από στοιχειώδεις πράξεις βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{\xi}^1 = \begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^2 = \begin{pmatrix}1\\2+i\end{pmatrix}$$

και άρα ένα θεμελιώδες σύνολο (μιγαδικών) λύσεων είναι το

$$\mathbf{X}^1(t) = \begin{pmatrix}1\\2-i\end{pmatrix}e^{(-1+i)t}, \quad \mathbf{X}^2(t) = \begin{pmatrix}1\\2+i\end{pmatrix}e^{(-1+i)t}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι $\bar{\mathbf{X}}^1 = \mathbf{X}^2$. Παίρνοντας λοιπόν το πραγματικό μέρος $\mathbf{U}(t)$ και το φανταστικό μέρος $\mathbf{V}(t)$ της $\mathbf{X}^1(t)$ βρίσκουμε ένα πραγματικό θεμελιώδες σύνολο λύσεων

$$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\2\cos t + \sin t\end{pmatrix}e^{-t}, \quad \mathbf{V}(t) = \begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t + 2\sin t\end{pmatrix}e^{-t},$$

άρα και τη γενική λύση του συστήματος

$$\mathbf{X}(t) = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\2\cos t + \sin t\end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t + 2\sin t\end{pmatrix}e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

II. Υπάρχουν επαναλαμβανόμενες ιδιοτιμές

Υπάρχουν δύο υποπεριπτώσεις όταν εμφανίζεται μία ιδιοτιμή r πολλαπλότητας $k < n$. Στην πρώτη υποπερίπτωση παίρνουμε k γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.[3]

Παράδειγμα 4.2.9 Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$r^3 - 6r^2 - 15r - 8 = (r+1)^2(r-8) = 0,$$

απ΄ όπου παίρνουμε τις ιδιοτιμές $r_1 = 8$ (απλή) και $r_2 = r_3 = -1$ (διπλή). Για την απλή ιδιοτιμή r_1 εύκολα υπολογίζουμε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το

$$\boldsymbol{\xi}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Για την διπλή ιδιοτιμή -1, το σύστημα $(\mathbf{P} + \mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ ανάγεται τελικά στην μία εξίσωση

$$2\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 0.$$

Τα διανύσματα $\boldsymbol{\xi}$ που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση αποτελούν ένα διανυσματικό χώρο που παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα

$$\boldsymbol{\xi}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\xi}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό το υπολογίζουμε εύκολα από την ίδια την εξίσωση ως εξής. Θέτουμε την πρώτη φορά $\xi_1 = 1$ και $\xi_2 = 0$ και παίρνουμε το $\boldsymbol{\xi}^2$, ενώ θέτοντας $\xi_1 = 0$ και $\xi_2 = 1$ παίρνουμε το $\boldsymbol{\xi}^3$. Γενικά έχουμε απόλυτη ελευθερία στην επιλογή των αρχικών ξ_i, *αρκεί όμως τα διανύσματα που προκύπτουν να είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων είναι το

$$\mathbf{X}^1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}, \quad \mathbf{X}^2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{X}^3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

και άρα η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + \left[c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{-t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

[3]Με άλλα λόγια η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής r, δηλαδή η διάσταση του ιδιοχώρου $V(r)$ που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην r, είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της r που είναι k.

Στην δεύτερη υποπερίπτωση, όταν δηλαδή *δεν* προκύπτουν k γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα από την ιδιοτιμή r πολλαπλότητας $k < n$, μπορούν να προκύψουν διαφόρων ειδών καταστάσεις. Η απλούστερη είναι αυτή της *διπλής* ρίζας. Ας είναι τότε $\boldsymbol{\xi}$ το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην r και

$$\mathbf{X}^1(t) = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$$

η λύση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή αυτή. Πώς μπορούμε να βρούμε μία άλλη λύση, γραμμικά ανεξάρτητη της $\mathbf{X}^1(t)$; Ανακαλώντας το πως εργαστήκαμε στην περίπτωση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης ανώτερης τάξης, αναζητούμε λύση της μορφής

$$\mathbf{X}^2(t) = (t\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})e^{rt},$$

όπου μένει να προσδιορίσουμε το διάνυσμα $\boldsymbol{\eta}$. Είναι εύκολο να δούμε, ότι αν η $\mathbf{X}^2(t)$ είναι λύση, τότε

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}^2(t) &= \boldsymbol{\xi} e^{rt} + tr\boldsymbol{\xi} e^{rt} + r\boldsymbol{\eta} e^{rt} \\ &= \mathbf{P}\mathbf{X}^2(t) \\ &= t\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} e^{rt} + \mathbf{P}\boldsymbol{\eta} e^{rt}. \end{aligned}$$

Επειδή όμως η $\mathbf{X}^1(t) = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ είναι λύση, έχουμε $t\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} e^{rt} = tr\boldsymbol{\xi} e^{rt}$, και συνεπώς

$$\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{P} - r\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\eta}.$$

Παράδειγμα 4.2.10 Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\det(\mathbf{P} - r\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$$

που δίνει την διπλή ιδιοτιμή $r = 2$. Από την $(\mathbf{P} - 2\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ παίρνουμε την μόνη εξίσωση

$$\xi_1 + \xi_2 = 0,$$

που δίνει *ένα* ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi} = (1 \quad -1)^T$. Άρα μία λύση είναι η

$$\mathbf{X}^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Λύνοντας την εξίσωση

$$(\mathbf{P} - 2\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \Rightarrow \eta_1 + \eta_2 = -1,$$

παίρνουμε $\boldsymbol{\eta} = (1 \quad -2)^T$. Έπεται ότι

$$\mathbf{X}^2(t) = (t\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})e^{2t} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -t-2 \end{pmatrix} e^{2t},$$

και η γενική λύση είναι η

$$\mathbf{X}(t) = c_1\mathbf{X}^1(t) + c_2\mathbf{X}^2(t) = \left[c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t+1 \\ -t-2 \end{pmatrix}\right] e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Εάν τώρα η r είναι ιδιοτιμή του $\mathbf{P}$ πολλαπλότητας > 2, τότε η κατάσταση αρχίζει και περιπλέκεται. Ας συζητήσουμε την περίπτωση της *τριπλής* ιδιοτιμής και ας υποθέσουμε κατ΄ αρχάς ότι στην τριπλή ιδιοτιμή r αντιστοιχεί *ένα* ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi}$ ($(\mathbf{P} - r\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$). Τότε, μία λύση είναι η

$$\mathbf{X}^1(t) = \boldsymbol{\xi} e^{rt}.$$

Αναζητούμε άλλα δύο (γραμμικά ανεξάρτητα) ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\eta}$ και $\boldsymbol{\zeta}$ ώστε οι

$$\mathbf{X}^2(t) = (t\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})e^{rt}, \quad \mathbf{X}^3 t = \left(\frac{t^2}{2}\boldsymbol{\xi} + t\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\zeta}\right) e^{rt},$$

να είναι άλλες δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος. Ο αναγνώστης μπορεί να διαπιστώσει εύκολα ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατόν αν τα $\boldsymbol{\eta}$ και $\boldsymbol{\zeta}$ είναι λύσεις των εξισώσεων

$$(\mathbf{P} - r\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}, \quad (\mathbf{P} - r\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta},$$

αντίστοιχα.

Εάν τώρα η τριπλή ιδιοτιμή r αντιστοιχεί σε δύο ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\xi}^1$ και $\boldsymbol{\xi}^2$, τότε έχουμε δύο λύσεις

$$\mathbf{X}^1(t) = \boldsymbol{\xi}^1 e^{rt} \quad \text{και} \quad \mathbf{X}^2(t) = \boldsymbol{\xi}^2 e^{rt}.$$

Προκύπτει ότι μία τρίτη λύση είναι η

$$\mathbf{X}^3(t) = (t\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta})e^{rt},$$

όπου το $\boldsymbol{\xi}$ είναι ένας κατάλληλα επιλεγμένος γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{\xi}^1$ και $\boldsymbol{\xi}^2$, ώστε η εξίσωση

$$(\mathbf{P} - r\mathbf{I}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$$

να έχει λύση.

Εφαρμογή 4.2.11 Έστω το γραμμικό σύστημα δ.ε.

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X},$$

και δίνεται ότι η $r = 2$ είναι τριπλή ιδιοτιμή του $\mathbf{P}$. Βρείτε τρεις γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Σε κάθε μία από τις ασκήσεις 1–6, εκφράστε την γενική λύση του δοθέντος συστήματος με όρους πραγματικών συσναρτήσεων και μόνο.

$$1.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad 2.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X},$$

$$3.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad 4.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -2 & -5/2 \\ 9/5 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X},$$

$$5.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad 6.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Βρείτε την γενική λύση των παρακάτω συστημάτων.

$$7.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad 8.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X},$$

$$9.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad 10.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Λύστε τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών.

$$11.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$12.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$13.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$14.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}.$$

Λύστε τα παρακάτω μη ομογενή συστήματα δ.ε. Για τον προσδιορισμό της μερικής λύσης, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων όπως στι Παράδειγμα 4.2.6.

$$15.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

$$16.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0,$$

$$17.\ \dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t > \pi.$$

Στις ασκήσεις 18–21, υποθέστε ότι $t > 0$ και θέστε $t = e^x$.

$$18.\ t\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad 19.\ t\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{X},$$

$$20.\ t\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X}, \quad 21.\ t\dot{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

4.3 Ορισμένες εφαρμογές

4.3.1 Γραμμικά συστήματα δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Στο παρακάτω παράδειγμα περιγράφουμε την μέθοδο επίλυσης μέσω πινάκων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\ddot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{X}(t).$$

Παράδειγμα 4.3.1 Να λυθεί το σύστημα δ.ε.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 23x + 18y \\ \ddot{y} &= -36x - 28y \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad \mathbf{X} = (x_1 \ \ x_2)^T,$$

γράφουμε το σύστημα υπό μορφή πινάκων ως

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{P}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 23 & 18 \\ -36 & -28 \end{pmatrix} \mathbf{X}.$$

Μετά από τις πράξεις βλέπουμε ότι ο $\mathbf{P}$ έχει ιδιοτιμές τις $r_1 = -1, r_2 = -2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τα $\boldsymbol{\xi}^1 = (3 \quad -4)^T$ και $\boldsymbol{\xi}^2 = (2 \quad -3)^T$. Από την γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε τότε, ότι

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}$$

(δηλαδή, ότι ο $\mathbf{P}$ *διαγωνιοποιείται*) όπου

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = (\boldsymbol{\xi}^1 \ \ \boldsymbol{\xi}^2) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $\mathbf{Y} = (y_1 \ \ y_2)^T$ και $\mathbf{X} = \mathbf{Q}\mathbf{Y}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{Q}\ddot{\mathbf{Y}} &= \mathbf{P}\mathbf{X} \\ &= \left(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{-1}\right)(\mathbf{Q}\mathbf{Y}) \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $\mathbf{Q}^{-1}$, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -y_1, \\ \ddot{y}_2 &= -4y_2. \end{aligned}$$

Οι παραπώνω όμως είναι δύο *ξεχωριστές* γραμμικές ομογενείς δ.ε. δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές των οποίων οι γενικές λύσεις είναι οι

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ y_2(t) &= c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Επειδή $\mathbf{X} = \mathbf{QY}$, έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3y_1(t) + 2y_2(t) = 3(c_1 \cos t + c_2 \sin t) + 2(c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t)), \\ x_2(t) &= -4y_1(t) - 3y_2(t) = -4(c_1 \cos t + c_2 \sin t) - 3(c_3 \cos(2t) + c_4 \sin(2t)). \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι στο παράδειγμά μας είχαμε αρκετές προϋποθέσεις· από την μία μεριά λείπουν οι πρώτης τάξης παράγωγοι από το σύστημα, ενώ από την άλλη, ο $\mathbf{P}$ έχει διάφορες μεταξύ τους ιδιοτιμές, πράγμα που τον καθιστά διαγωνιοποιήσιμο.

4.3.2 Μοντέλα μάχης του Lanchestre και εξοπλισμών του Richardson

I. Μοντέλα μάχης του Lanchestre

Υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις A και B συμπλέκονται σε μάχη. Χάριν απλότητας, ορίζουμε την ισχύ αυτών των δυνάμεων ως τον αριθμό $x(t)$ και $y(t)$ αντίστοιχα των μαχητών τους, όπου η ματαβλητή t μετρά τις μέρες από την αρχή της μάχης. Είναι φανερό ότι ο ρυθμός μεταβολής αυτών των ποσοτήτων είναι ίσος με τον *ρυθμό της επανενίσχυσης* μείον τον *ρυθμό των επιχειρησιακών απωλειών* μείον τον *ρυθμό των απωλειών της μάχης*.

Ο ρυθμός των επιχειρησιακών απωλειών μίας δύναμης μάχης, είναι ο ρυθμός των απωλειών λόγω συμβάντων που δεν οφείλονται στη μάχη, λόγου χάρη επιδημιών, αυτομολήσεων, κλπ. Ο Lanchestre ισχυρίστηκε ότι ο ρυθμός αυτός είναι ανάλογος της ισχύος των δυνάμεων, πράγμα που δεν θεωρείται ρεαλιστικό· για παράδειγμα, ο ρυθμός των αυτομολήσεων μπορεί να εξαρτάται από ψυχολογικούς παράγοντες που είναι δύσκολο να ποσοτικοποιηθούν. Για αυτό, θα θεωρήσουμε ότι ο ρυθμός των επιχειρησιακών απωλειών είναι αμελητέος.

Ο ρυθμός των απωλειών της μάχης. Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη A είναι μία συμβατική δύναμη που επιχειρεί σε ανοικτό πεδίο, και ότι κάθε μέλος της είναι στην ακτίνα πυρός του εχθρού B. Υποθέτουμε επίσης ότι από τη στιγμή που υπάρχει απώλεια ενός μαχητή, τα πυρά συγκεντρώνονται στους υπόλοιπους μαχητές. Τότε ο ρυθμός των απωλειών της μάχης της συμβατικής δύναμης A είναι ίσος με $ax(t)$, για κάποια θετική σταθερά a, που καλείται *σταθερά αποτελεσματικότητας* της δύναμης B.

Η κατάσταση αλλάζει ριζικά όταν η A είναι μία δύναμη ανταρτών, αόρατη από τον αντίπαλο B και που κατέχει ένα χωρίο R. Η δύναμη B βάλλει κατά του R αλλά δεν μπορεί να γνωρίζει εάν τα πυρά είναι αποτελεσματικά. Είναι βεβαίως εύλογο ότι ο ρυθμός των απωλειών της αντάρτκης δύναμης A θα είναι ανάλογος του $x(t)$, διότι όσο μεγαλύτερο είναι το $x(t)$, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ευστοχίας του εχθρού. Από την άλλη, ό ρυθμός απωλειών της A είναι και ανάλογος του $y(t)$, διότι όσο περισσότεροι είναι οι μαχητές της B, τόσο μεγαλύετερς είναι οι απώλειες της A.

Ο ρυθμός επανενίσχυσης. Συμβολίζουμε τους ρυθμούς επανενίσχυσης των δυνάμεων A και B με $f(t)$ και $g(t)$ αντίστοιχα. Τα δύο μοντέλα του Lanchestre για συμβατική και αντάρτικη μάχη αντίστοιχα είναι:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ay + f(t) \\ \dot{y}(t) &= -bx + g(t) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -cxy + f(t) \\ \dot{y}(t) &= -dx + g(t). \end{aligned}$$

Άσκηση: Λύστε το μη ομογενές συμβατικό μοντέλο του Lanchestre. Κατόπιν υποθέστε ότι οι δυνάμεις A και B είναι απομονωμένες, και βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες του μη συμβατικού μοντέλου του Lanchestre.

ΙΙ. Μοντέλο των εξοπλισμών του Richardson

Θεωρούμε δύο δυνάμεις A και B που η καθεμία εξοπλίζεται αντιμετωπίζοντας το ενδεχόμενο της επίθεσης από την άλλη (κάθε ομοιότης με πραγματικές καταστάσεις *δεν* είναι φανταστική!). Ας είναι $x(t)$ ο συνολικός εξοπλισμός της A και $y(y)$ ο συνολικός εξοπλισμός της B στον χρόνο t. Οι ρυθμοί μεταβολής των x και y εξαρτώνται:

α) από το σύνολο των εξοπλισμών του άλλου·

β) από το οικονομικό κόστος των εξοπλισμών και

γ) από τις *σταθερές απειλής* k_1 και k_2 πο εκφράζουν την εχθρικότητα που επικρατεί στη διάθεση του κράτους A έναντι του B και αντίστοιχα.

Όλα τα παραπάνω εκφράζονται με το σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ay(t) - bx(t) + k_1 \\ \dot{y}(t) &= cx(t) - dy(t) + k_2, \quad a, b, c, d, k_1, k_2 > 0. \end{aligned}$$

Κατά τον Richardson:

α) Οι συντελεστές a και c είναι ανάλογοι των οικονομικών δυνατοτήτων των κρατών A και B αντίστοιχα και

β) οι συντελεστές b^{-1} και d^{-1} ισούται με τον χρόνο των κοινοβουλευτικών περιόδων των κρατών A και B αντίστοιχα.

Οι σταθερές απειλής k_1 και k_2 δεν είναι προσδιορίσιμες εύκολα· πιο κοντά στην πραγματικότητα είναι ένα μοντέλο όπου οι k_1 και k_2 είναι συναρτήσεις του t.

Άσκηση: Λύστε το αναλυτικά το μοντέλο του Richardson. Για $x(t) \equiv 0$, $k_1 = k_2 = 0$. *Το μοντέλο αυτό περιγράφει την ανταγωνιστικότητα εξοπλισμών δύο κρατών σε διαρκή ειρηνική συνύπαρξη, όπως λοόγου χάρη η Γαλλία και η Ελβετία. Πως ερμηνεύετε το αποτέλεσμα που βρήκατε;.*