ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αποδείξτε τις ιδιότητες (ii) ώς (iv), όπως διατυπώνονται στο Θεώρημα 2.

T

2. Στον $\mathbf{R}^n$ δείξτε ότι:

(a) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (αυτή η ταυτότητα είναι γνωστή σαν ο κανόνας του παραλληλογράμμου)

(b) $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\,\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

(c) $4 < \mathbf{x}, \mathbf{y} > = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$ (αυτή είναι η ταυτότητα "πολώσεως" (polarization)).

Ερμηνεύστε γεωμετρικά αυτά τα αποτελέσματα με τη βοήθεια του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$.

Επαληθεύστε την ανισότητα CBS και την τριγωνική ανισότητα για τα διανύσματα των Ασκήσεων 3, 4 και 5:

3. $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (4, 0, -2)$

4. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6)$, $\mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$

5. $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$

6. Επαληθεύστε ότι αν A είναι ένας πίνακας $n \times n$, η απεικόνιση $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^n$ είναι γραμμική.

7. Υπολογίστε τον AB, την $\det A$, την $\det B$, τον $A + B$ και την $\det(A + B)$ για τους

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Υπολογίστε τον AB, την $\det A$, την $\det B$, την $\det(AB)$ και την $\det(A + B)$ για τους

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Χρησιμοποιήστε επαγωγή ως προς k για να δείξετε ότι αν $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k\| \le \|\mathbf{x}_1\| + \ldots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

10. Αποδείξτε με χρήση άλγεβρας την *ταυτότητα του Lagrange*: Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $x_1, \ldots, x_n$ και $y_1, \ldots, y_n$,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - \sum_{i<j}(x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την, δώστε διαφορετική απόδειξη της ανισότητας Cauchy-Schwarz στον $\mathbf{R}^n$.

***11.** Δείξτε ότι αν A είναι ένας πίνακας $n \times n$, τότε

(a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ και

(b) αν B είναι ο πίνακας που παίρνουμε από τον A πολλαπλασιάζοντας οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του με έναν αριθμό λ, τότε $\det B = \lambda \det A$.

Στις Ασκήσεις 12, 13 και 14, με A, B και C συμβολίζουμε πίνακες $n \times n$.

12. Είναι σωστό ότι $\det(A + B) = \det A + \det B$; Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.

13. Είναι σωστό ότι $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

14. Θεωρώντας γνωστή την $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, αποδείξτε ότι $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

Πρ

***15.** (Η άσκηση αυτή προϋποθέτει κάποια γνώση ολοκλήρωσης συνεχών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.) Σημειώνουμε ότι η απόδειξη της ανισότητας CBS (Θεώρημα 3) στηρίζεται μόνο στις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου που καταγράφονται στο Θεώρημα 2. Χρησιμοποιώντας αυτή την παρατήρηση, αποδείξτε την παρακάτω ανισότητα για συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$:

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}\sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 dx}.$$

Για την απόδειξη

(a) βεβαιωθείτε ότι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων από το $[0, 1]$ στο $\mathbf{R}$ μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος· δηλαδή, μπορούμε να σκεφτόμαστε τις συναρτήσεις f, g αφηρημένα σαν "διανύσματα" που προστίθενται το ένα στο άλλο και πολλαπλασιάζονται με βαθμωτά μεγέθη.

(b) ορίστε το εσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων μέσω της

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

και επαληθεύστε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες (i) ώς (iv) του Θεωρήματος 2.

***16.** Ορίζουμε τον ανάστροφο A^T ενός $n \times n$ πίνακα A ως εξής: η ij-συντεταγμένη του A^T είναι a_{ji}, όπου a_{ij} είναι η ij-συντεταγμένη του A. Δείξτε ότι ο A^T χαρακτηρίζεται από την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ στον $\mathbf{R}^n$,

$$(A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

17. Επαληθεύστε ότι ο αντίστροφος του

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{είναι ο} \quad \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

18. Χρησιμοποιώντας την απάντησή σας στην Ασκηση 17, δείξτε ότι η λύση του συστήματος,*

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

είναι

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-dc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

19. Δεχόμενοι την ισότητα

$$\det(AB) = (\det A)(\det B),$$

βεβαιωθείτε ότι $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ και συμπεράνετε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det A \neq 0$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1

1. Εστω $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Υπολογίστε τα $\mathbf{v} + \mathbf{w}, 3\mathbf{v}, 6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}, -2\mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Δώστε γεωμετρική ερμηνεία σε κάθε μία από τις πράξεις, σχεδιάζοντας τα διανύσματα.

2. Επαναλάβετε την Ασκηση 1 με $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

3. (a) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(-1, 2, 1)$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{j}$.

(b) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα $(0, 2, -1)$ και $(-3, 1, 0)$.

(c) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο $(-2, 1, 2)$ και περνάει από το $(-1, 1, 3)$.

4. (a) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το $(0, 1, 0)$ και έχει τη διεύθυνση του $3\mathbf{i}+\mathbf{k}$.

(b) Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα $(0, 1, 1)$ και $(0, 1, 0)$.

(c) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στο $(-1, 1, -1)$ και περνάει από το $(1, 1, 1)$.

5. Υπολογίστε το $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ για τα επόμενα ζεύγη διανυσμάτων.

(a) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{w} = \mathbf{k}$.

(b) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

(c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

6. Υπολογίστε το $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ για τα ζεύγη διανυσμάτων της Ασκησης 5.

7. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας ανάμεσα στα ζεύγη διανυσμάτων της Ασκησης 5.

8. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα της Ασκησης 5.

9. Χρησιμοποιώντας διανυσματικό συμβολισμό περιγράψτε το τρίγωνο (στο χώρο) που έχει σαν κορυφές την αρχή των αξόνων και τα τελικά σημεία των διανυσμάτων $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

10. Δείξτε ότι τρία διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

11. Αν $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ πραγματικοί αριθμοί, δείξτε ότι

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

12. Εστω $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ μοναδιαία διανύσματα, ορθογώνια ανά δύο. Αν $a = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, δείξτε ότι

* (Σ.τ.Ε.) Εννοείται ότι αναφέρεται στον πίνακα της Ασκησης 17, δηλαδή $ad-bc \neq 0$.

$$\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}, \qquad \beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}, \qquad \gamma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{w}.$$

Δώστε τη γεωμετρική περιγραφή αυτού του αποτελέσματος.

13. Έστω $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ δύο διανύσματα στο επίπεδο, $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ και λ ένας πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ είναι ίσο με αυτού που ορίζεται από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Κάντε σχήμα. Συσχετίστε το αποτέλεσμα αυτό με μια γνωστή ιδιότητα των οριζουσών.

14. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που έχει κορυφές τα (0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0), (3, 1, 2).

15. Για δοθέντα μη μηδενικά διανύσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ στον $\mathbf{R}^3$, δείξτε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

16. Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι η απόσταση του σημείου (x_1, y_1) από την ευθεία $ax + by = c$ είναι

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

17. Βεβαιωθείτε ότι η διεύθυνση του $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού, επιλέγοντας σαν $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ δύο από τα διανύσματα $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

18. (a) Υποθέτουμε ότι $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b}$. Δείξτε ότι $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.
(b) Υποθέτουμε ότι $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}'\times\mathbf{b}$ για κάθε $\mathbf{b}$. Είναι αλήθεια ότι $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$;

19. (a) Χρησιμοποιώντας διανυσματικές μεθόδους, δείξτε ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο μη παράλληλες ευθείες l_1 και l_2 δίνεται από την

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\cdot(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\|},$$

όπου $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι τυχαία σημεία των l_1 και l_2 αντίστοιχα, ενώ $\mathbf{a}_1$ και $\mathbf{a}_2$ είναι οι διευθύνσεις των l_1 και l_2. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρήστε το επίπεδο που περιέχει την l_1 και είναι παράλληλο στην l_2. Δείξτε ότι το $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2\|$ είναι μοναδιαίο κάθετο γι' αυτό το επίπεδο· τώρα, προβάλετε το $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ σ' αυτή την κάθετη διεύθυνση.]
(b) Βρείτε την απόσταση ανάμεσα στην ευθεία l_1 που ορίζεται από τα σημεία $(-1, -1, 1)$ και (0, 0, 0) και την ευθεία l_2 που ορίζεται από τα σημεία $(0, -2, 0)$ και (2, 0, 5).

20. Δείξτε ότι δύο επίπεδα που ορίζονται από τις εξισώσεις $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ και $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ είναι παράλληλα και ότι η απόσταση ανάμεσα σε δύο τέτοια επίπεδα είναι

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

21. (a) Αποδείξτε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου στο επίπεδο με κορυφές (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) είναι η απόλυτη τιμή του

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

(b) Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $(1, 2), (0, 1), (-1, 1)$.

22. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από Καρτεσιανές σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:
(a) $(0, 3, 4)$ (b) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$
(c) $(0, 0, 0)$ (d) $(-1, 0, 1)$
(e) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$

23. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από κυλινδρικές σε Καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:
(a) $(1, \pi/4, 1)$ (b) $(3, \pi/6, -4)$
(c) $(0, \pi/4, 1)$ (d) $(2, -\pi/2, 1)$
(e) $(-2, -\pi/2, 1)$

24. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από σφαιρικές σε Καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:
(a) $(1, \pi/2, \pi)$ (b) $(2, -\pi/2, \pi/6)$*
(c) $(0, \pi/8, \pi/35)$ (d) $(2, -\pi/2, -\pi)$*
(e) $(-1, \pi, \pi/6)$*

25. Ξαναγράψτε την εξίσωση $z = x^2 - y^2$, χρησιμοποιώντας κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

26. Κάνοντας χρήση σφαιρικών συντεταγμένων, δείξτε ότι

---

* (Σ.τ.Ε.) (b) ή $\theta = 3\pi/2$... κ.λπ., (d) ή $\theta = 3\pi/2$, $\varphi = \pi$, κ.λπ., (e) βλ. Άσκηση 5 της Παραγράφου 1.4.

$$\phi = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|}\right)$$

όπου $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Δώστε τη γεωμετρική ερμηνεία.

27. Επαληθεύστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την τριγωνική ανισότητα για τα

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2).$$

28. Πολλαπλασιάστε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Είναι $AB = BA$;

29. (a) Δείξτε ότι αν A και B είναι δύο πίνακες $n \times n$, και $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

(b) Τί συμπεραίνετε από την ισότητα του ερωτήματος (a) για τη σχέση ανάμεσα στη σύνθεση των απεικονίσεων $\mathbf{x} \to B\mathbf{x}, \mathbf{y} \to A\mathbf{y}$ και τον πολλαπλασιασμό πινάκων;

30. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που παράγουν τα διανύσματα

$$(1, 0, 1) \qquad (1, 1, 1), \qquad \text{και} \qquad (-3, 2, 0).$$

31. Επαληθεύστε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση του $\mathbf{R}^n$ στον $\mathbf{R}^n$ καθορίζεται από έναν πίνακα $n \times n$ με τον τρόπο που περιγράφηκε αμέσως μετά το Παράδειγμα 6.

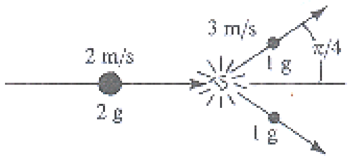
32. Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το $(3, -1, 2)$ και την ευθεία $\mathbf{v} = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

33. Το έργο W που παράγεται όταν ένα αντικείμενο μετακινείται από το (0, 0) στο (7, 2) υπό την επίδραση μιας δύναμης $\mathbf{F}$ είναι $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}$, όπου r είναι το διάνυσμα με αρχή το (0, 0) και τέλος το (7, 2). (Οι μονάδες είναι πόδια και λίμπρες.)

(a) Ας υποθέσουμε ότι $\mathbf{F} = 10\cos\theta\mathbf{i} + 10\sin\theta\mathbf{j}$. Βρείτε το W σαν συνάρτηση του θ.

(b) Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη $\mathbf{F}$ έχει μέτρο 6 lb και σχηματίζει γωνία $\pi/6$ rad με τον οριζόντιο άξονα, με φορά προς τα δεξιά. Βρείτε το W (σε πόδια×λίμπρες).

34. Αν ένα σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\mathbf{v}$, η *ορμή* του είναι $p = m\mathbf{v}$. Σ' ένα παιχνίδι με βώλους, ένας βώλος μάζας 2 γραμμαρίων(g) πετάγεται με ταχύτητα 2 μέτρων το δευτερόλεπτο (m/s), χτυπάει δύο βώλους που έχουν μάζα 1g ο καθένας, και σταματάει. Ο ένας βώλος εκτινάσσεται με ταχύτητα 3 m/sec και με γωνία 45° προς τη διεύθυνση που είχε ο μεγαλύτερος βώλος τη στιγμή της πρόσκρουσης, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.Ε.1. Υποθέτοντας ότι η συνολική ορμή πριν και μετά την κρούση είναι η ίδια (σύμφωνα με το νόμο διατήρησης της ορμής), βρείτε με ποιά γωνία και ταχύτητα θα κινηθεί ο δεύτερος βώλος.



Σχήμα 1.Ε.1 Ορμή και βώλοι.

35. Δείξτε ότι για κάθε x, y, z,

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ z & y+1 & 10 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x+2 & z \\ -1 & z-x-2 & 10-z \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

36. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

αν τα x, y και z είναι διαφορετικά ανά δύο.

37. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} 66 & 628 & 246 \\ 88 & 435 & 24 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 & 627 & 247 \\ 86 & 436 & 23 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

38. Δείξτε ότι η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$$

έχει την ίδια τιμή, όποιο κι αν είναι το n. Ποιά είναι αυτή η τιμή;

* (Σ.τ.Ε.) Εξυπακούεται ότι για αρνητικές τιμές παίρνουμε την απόλυτη τιμή.

39. Ο όγκος ενός τετραέδρου του οποίου οι ακμές $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ έχουν ένα κοινό άκρο, δίνεται από την $V = \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.*

(a) Εκφράστε τον όγκο στη μορφή ορίζουσας.

(b) Υπολογίστε το V όταν $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Χρησιμοποιήστε τον παρακάτω ορισμό για τα προβλήματα 40 και 41: Αν τα διανύσματα $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ έχουν αρχή το 0 και καταλήγουν στις μάζες $m_1, \ldots, m_n$, το κέντρο βάρους είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{c} = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right).$$

40. Δίνεται ένα τετράεδρο σε συντεταγμένες xyz με μία κορυφή το $(0, 0, 0)$ και τις τρείς ακμές του, που συναντώνται στο $(0, 0, 0)$, να συμπίπτουν με τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

(a) Κάντε ένα σχήμα και ονομάστε τα τελικά σημεία των διανυσμάτων $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

(b) Βρείτε το κέντρο βάρους καθεμιάς από τις τέσσερις τριγωνικές έδρες του τετραέδρου, αν τοποθετήσουμε μια μοναδιαία μάζα σε κάθε κορυφή του.

41. Δείξτε ότι για κάθε διάνυσμα $\mathbf{r}$, το κέντρο βάρους ενός συστήματος ικανοποιεί την

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r}_i - \mathbf{c}\|^2 + m \|\mathbf{r} - \mathbf{c}\|^2,$$

όπου $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ είναι η συνολική μάζα του συστήματος.

Στις Ασκήσεις 42 ώς 47, βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα που να έχει τη δοσμένη ιδιότητα.

42. Να είναι παράλληλο στην ευθεία $x = 3t + 1, y = 16t - 2, z = -(t + 2)$.

43. Να είναι κάθετο στο επίπεδο $x - 6y + z = 12$.

44. Να είναι παράλληλο στα επίπεδα $8x + y + z = 1$ και $x - y - z = 0$.

45. Να είναι ορθογώνιο προς τα $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{k}$.

46. Να είναι κάθετο στην ευθεία $x = 2t - 1, y = -t - 1, z = t + 2$, και στο διάνυσμα $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

47. Να σχηματίζει γωνία 30° με το $\mathbf{i}$ και ίσες γωνίες με τα $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$.

48. Δύο δίπολα βρίσκονται σε απόσταση r το ένα από το άλλο. (Τα *δίπολα* είναι εξιδανικευμένοι μικροί μαγνήτες που ο βόρειος και ο νότιος πόλος τους απέχουν απειροστή απόσταση· η ισχύς ενός διπόλου περιγράφεται από ένα διάνυσμα που λέγεται *διπολική ροπή*). Η ενέργεια μαγνητικού δυναμικού P δίνεται από την $P = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}_2$ (που λέγεται *δυναμικό αλληλεπίδρασης διπόλου με δίπολο*), όπου το πρώτο δίπολο έχει ροπή $\mathbf{m}_1$ στο εξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}_2$ του δευτέρου διπόλου. Σε μονάδες MKS,

$$\mathbf{B}_2 = \mu_0 \frac{-\mathbf{m}_2 + 3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}}{4\pi r^3},$$

όπου $\mathbf{l}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, και μ_0 μια βαθμωτή σταθερά.

(a) Δείξτε ότι

$$P = \mu_0 \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2 - 3(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{l})(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{l})}{4\pi r^3}.$$

(b) Βρείτε την P όταν τα $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ είναι κάθετα.

49. Μια σφαίρα με ακτίνα 10 cm και κέντρο το $(0, 0, 0)$ στρέφεται γύρω από τον άξονα z με γωνιακή ταχύτητα 4 και με τέτοια διεύθυνση ώστε η στροφή να έχει φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, ιδωμένη από τον θετικό ημιάξονα z.

(a) Βρείτε το διάνυσμα στροφής $\boldsymbol{\omega}$ (δείτε την Άσκηση 32, Παράγραφος 1.3).

(b) Βρείτε την ταχύτητα $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, όπου το $\mathbf{r} = 5\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ είναι στον "ισημερινό".