Επαναληπτικές ασκήσεις Κεφαλαίου 3

1. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $u = f(y - kx)$ είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης $\dfrac{\partial u}{\partial x} + k\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

2. Αποδείξτε ότι αν οι u και v έχουν συνεχείς μικτές μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης και ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy–Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

τότε οι u και v είναι αμφότερες αρμονικές.

3. Έστω $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 5$. Βρείτε όλα τα κρίσιμα σημεία της f και προσδιορίστε αν είναι τοπικά ελάχιστα, τοπικά μέγιστα ή σαγματικά σημεία.

4. Βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 5$ στον μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

5. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $f(x, y) = y^2 e^{-x^2}$ στο $(1, 1)$.

6. Έστω $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$.
   (α) Βρείτε την $g(x, y)$, την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της f στο $(0, 0)$.
   (β) Ποια είναι η σχέση μεταξύ g και f;
   (γ) Αποδείξτε ότι $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = 0$ για κάθε $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$. (Υποδειξη: Δείξτε ότι η f ισούται με την προσέγγιση Taylor δεύτερης τάξης της σε κάθε σημείο.)

7. Αναλύστε τη συμπεριφορά των παρακάτω συναρτήσεων στα υποδεικνυόμενα σημεία. [Η απάντησή στο ερώτημα (β) μπορεί να εξαρτάται από τη σταθερά C.]
   (α) $z = x^2 - y^2 + 3xy$, $(x, y) = (0, 0)$
   (β) $z = x^2 - y^2 + Cxy$, $(x, y) = (0, 0)$

8. Βρείτε και χαρακτηρίστε τις ακρότατες τιμές (αν υπάρχουν) των συναρτήσεων του $\mathbb{R}^2$ που ορίζονται από τις παρακάτω εκφράσεις:
   (α) $y^2 - x^3$
   (β) $(x - 1)^2 + (x - y)^2$
   (γ) $x^2 + xy^2 + y^4$

9. (α) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση της επιφάνειας $z = \sqrt{x^2 - 1}$ από την αρχή των αξόνων του $\mathbb{R}^3$.

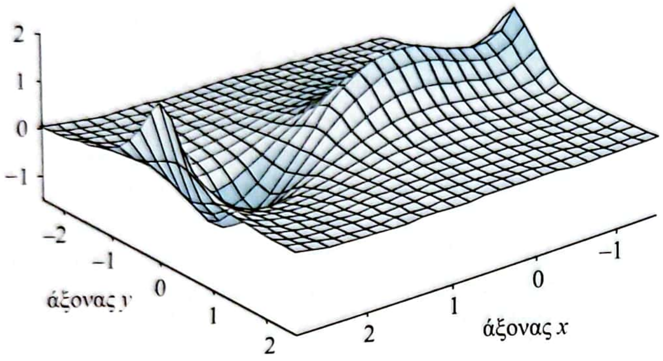
(β) Επαναλάβετε το ερώτημα (α) για την επιφάνεια $z = 6xy + 7$.

10. Βρείτε τους πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor της $f(x, y) = e^{xy}\cos x$ γύρω από το $x = 0$, $y = 0$.

11. Αποδείξτε ότι η

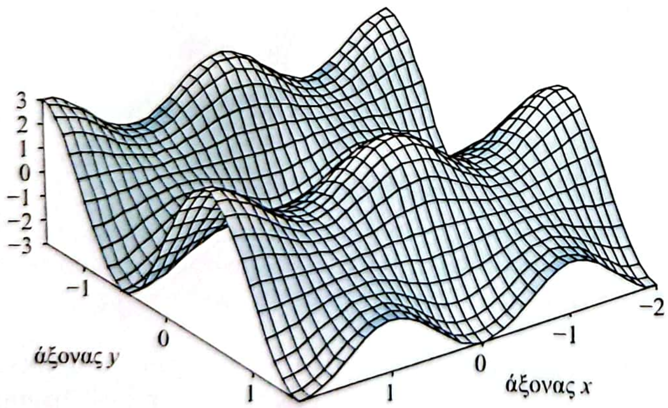
$$z = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1 + 4y^2)}$$

έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σαγματικό σημείο. (Το γράφημα παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.E.1.)



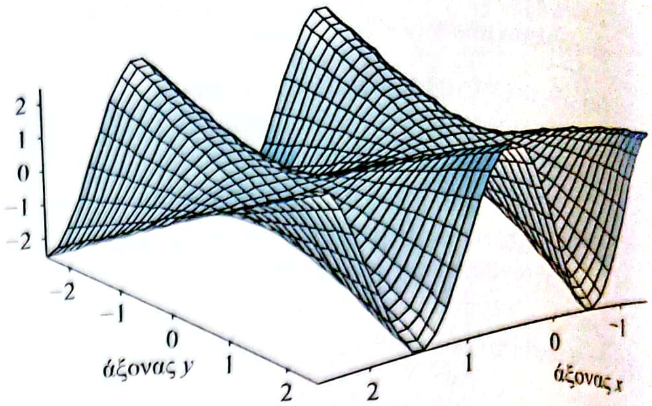
Σχήμα 3.E.1 Γράφημα της $z = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)/12(1 + 4y^2)$.

12. Βρείτε τα σημεία μεγίστου, ελαχίστου και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $z = (2 + \cos \pi x)(\sin \pi y)$, η οποία αναπαριστάται γραφικά στο Σχήμα 3.E.2.



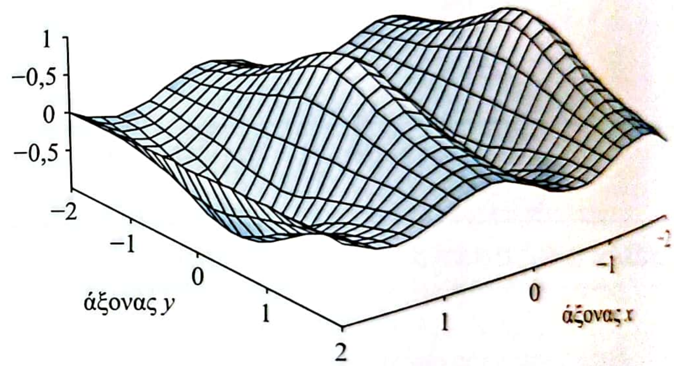
Σχήμα 3.E.2 Γράφημα της $z = (2 + \cos \pi x)(\sin \pi y)$.

13. Βρείτε και περιγράψτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x, y) = y \sin(\pi x)$. (Βλ. Σχήμα 3.E.3.)



Σχήμα 3.E.3 Γράφημα της $z = y \sin(\pi x)$.

14. Το γράφημα της συνάρτησης $z = \sin(\pi x)/(1 + y^2)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.E.4. Επαληθεύστε ότι αυτή η συνάρτηση έχει εναλλάξ σημεία μεγίστου και ελαχίστου στον άξονα x και δεν έχει άλλα κρίσιμα σημεία.



Σχήμα 3.E.4 Γράφημα της $z = \sin(\pi x)/(1 + y^2)$.

Στις Ασκήσεις 15 έως 20, βρείτε τα ακρότατα των δεδομένων συναρτήσεων υπό τους δεδομένους περιορισμούς.

15. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, υπό τον $x^2 + y^2 = 1$

16. $f(x, y) = xy - y^2$, υπό τον $x^2 + y^2 = 1$

17. $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, υπό τον $x^2 + y^2 = 1$

18. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, υπό τον $x + y = 1$

19. $z = xy$, υπό τη συνθήκη $x + y = 1$

20. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, υπό τη συνθήκη $x + y = \pi/4$

21. Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $z^2 - xy = 1$ που βρίσκονται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

22. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων υπολογίστε την dy/dx για τις

(α) $x/y = 10$
(β) $x^3 - \sin y + y^4 = 4$
(γ) $e^{x+y^2} + y^3 = 0$

23. Βρείτε την απόσταση του σημείου $(0, b)$ από την παραβολή $x^2 - 4y = 0$. Λύστε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange και χωρίς να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο του Lagrange.

24. Προσδιορίστε όλες τις τιμές του k για τις οποίες η συνάρτηση $g(x, y, z) = x^2 + kxy + kxz + ky^2 + kz^2$ έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0, 0, 0)$.

25. Να βρείτε και χαρακτηρίσετε όλα τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $g(x, y) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + y^3 + 3x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 20$.

26. Λύστε τα παρακάτω γεωμετρικά προβλήματα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Lagrange.

(α) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση του σημείου (a_1, a_2, a_3) του $\mathbb{R}^3$ από το επίπεδο με εξίσωση $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, όπου $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.

(β) Να βρείτε το σημείο της ευθείας κατά την οποία τέμνονται τα επίπεδα $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ και $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ που βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων.

(γ) Δείξτε ότι ο όγκος του μεγαλύτερου ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου που μπορεί να εγγραφεί στο ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

είναι $8abc/3\sqrt{3}$.

27. Ένα σωματίδιο κινείται σε ένα δυναμικό $V(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 + 3xy$. Προσδιορίστε αν το $(0, 0)$ είναι σημείο ευσταθούς ισορροπίας, δηλαδή αν το $(0, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο της V ή όχι.

28. Μελετήστε τη φύση της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ κοντά στο $(0, 0)$. Δείξτε ότι το σημείο $(0, 0)$ είναι εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο, δηλαδή $D = 0$. Αυτή η επιφάνεια καλείται *σαμάρι της μαϊμούς*.

29. Βρείτε το μέγιστο της $f(x, y) = xy$ στην καμπύλη $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

30. Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της $f(x, y) = xy - y + x - 1$ στο σύνολο $x^2 + y^2 \leq 2$.

31. Το εργοστάσιο της International Widget Co., Inc., στο Baraboo του Wisconsin, χρησιμοποιεί αλουμίνιο, σίδερο και μαγνήσιο για να παράγει υψηλής ποιότητας αντικείμενα. Η ποσότητα των αντικειμένων που μπορεί να παραγάγει χρησιμοποιώντας x τόνους αλουμινίου, y τόνους σιδήρου και z τόνου μαγνησίου είναι $Q(x, y, z) = xyz$. Το κόστος των πρώτων υλών είναι \$6 ανά τόνο αλουμινίου, \$4 ανά τόνο σιδήρου και \$8 ανά τόνο μαγνησίου. Πόσοι τόνοι αλουμινίου, σιδήρου και μαγνησίου πρέπει να χρησιμοποιηθούν για να κατασκευαστούν 1000 αντικείμενα με το χαμηλότερο δυνατό κόστος; (Υπόδειξη: Να βρείτε τα ακρότατα κατάλληλης συνάρτησης υπό κατάλληλο περιορισμό.)

32. Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^1 και έστω

$$u = f(x)$$
$$v = -y + xf(x).$$

Αν $f'(x_0) \neq 0$, δείξτε ότι αυτός ο μετασχηματισμός από τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$ είναι αντιστρέψιμος κοντά στο (x_0, y_0) και ότι ο αντίστροφός του δίνεται από τις

$$x = f^{-1}(u)$$
$$y = -v + uf^{-1}(u).$$

33. Δείξτε ότι το ζεύγος εξισώσεων

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

προσδιορίζει συναρτήσεις $u(x, y)$ και $v(x, y)$ ορισμένες για (x, y) κοντά στο $x = 2$ και $y = -1$ τέτοιες ώστε $u(2, -1) = 2$ και $v(2, -1) = 1$. Υπολογίστε την $\partial u/\partial x$ στο $(2, -1)$.

34. Δείξτε ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί p και q και μοναδικές συναρτήσεις u και v από το διάστημα $(-1 - p, -1 + p)$ στο διάστημα $(1 - q, 1 + q)$ που ικανοποιούν τις

$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0 = xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)}$$

για κάθε x στο διάστημα $(-1 - p, -1 + p)$, με $u(-1) = 1 = v(-1)$.

35. Για να λύσετε αυτή την άσκηση πρέπει να γνωρίζετε την τεχνική της διαγωνιοποίησης πινάκων 2×2. Έστω $a(x)$, $b(x)$ και $c(x)$ τρεις συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες στο $U \cup \partial U$, όπου U είναι ένα ανοιχτό σύνολο και ∂U το σύνολο των συνοριακών του σημείων (βλ. Ενότητα 2.2). Χρησιμοποιήστε τον συμβολισμό του Λήμματος 2 της Ενότητας 3.3 και θεωρήστε ότι για κάθε $x \in U \cup \partial U$ η τετραγωνική μορφή που ορίζει ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένη. Για μια συνάρτηση v κλάσης C^2 στο $U \cup \partial U$, ορίζουμε έναν διαφορικό τελεστή L ως εξής:

$$Lv = a(\partial^2 v/\partial x^2) + 2b(\partial^2 v/\partial x \partial y) + c(\partial^2 v/\partial y^2).$$

Όταν ένας τελεστής ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη του

43. Αν $y = mx + b$ είναι η ευθεία με την καλύτερη προσαρμογή στα πειραματικά δεδομένα $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b) = 0,$$

δηλαδή οι θετικές και αρνητικές αποκλίσεις αλληλοαναιρούνται (βλ. Άσκηση 42).

44. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο δεύτερης παραγώγου, δείξτε ότι το κρίσιμο σημείο της f είναι σημείο ελαχίστου.

45. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, να βρείτε την ευθεία που προσαρμόζεται καλύτερα στα σημεία $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 4)$ και $(4, 5)$. Σχεδιάστε τα σημεία και την ευθεία.[16]

46. Η μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

όπου c σταθερά, εμφανίζεται στη μελέτη των εκτροπών μιας λεπτής δέσμης φωτός. Δείξτε ότι η

$$u(x, t) = \sin(\lambda \pi x)\cos(\lambda^2 \pi^2 c t)$$

είναι λύση για οποιαδήποτε επιλογή της παραμέτρου λ.

47. Η εξίσωση Kortweg–DeVries

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

εμφανίζεται στη θεωρητική περιγραφή των κυμάτων σε αβαθή ύδατα (των λεγόμενων **σολιτονίων**). Δείξτε ότι η

$$u(x, t) = 12a^2 \operatorname{sech}^2(ax - 4a^3 t)$$

είναι λύση της εξίσωσης Kortweg–DeVries (βλ. διαδικτυακό συμπλήρωμα).

48. Η εξίσωση αγωγής της θερμότητας στον διδιάστατο χώρο είναι

$$k(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

Θεωρώντας ότι $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, να βρείτε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που να ικανοποιούνται από τις $X(x), Y(y)$ και $T(t)$.

49. Η εξίσωση αγωγής της θερμότητας στον διδιάστατο χώρο μπορεί να εκφραστεί σε πολικές συντεταγμένες ως εξής:

$$k\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) = u_t.$$

Θεωρώντας ότι $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, να βρείτε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που να ικανοποιούνται από τις $R(r), \Theta(\theta)$ και $T(t)$.

---

[16] Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων μπορεί να τροποποιηθεί και να γενικευτεί με διάφορους τρόπους. Η βασική ιδέα μπορεί να εφαρμοστεί σε εξισώσεις καμπυλών πιο σύνθετων από την ευθεία. Για παράδειγμα, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την παραβολή που προσαρμόζεται καλύτερα σε δοθέν σύνολο σημείων από πειραματικά δεδομένα. Σε αυτές τις ιδέες στηρίχτηκε εν μέρει και η ανάπτυξη της επιστήμης της κυβερνητικής από τον Norbert Wiener. Μια άλλη εκδοχή είναι το ακόλουθο πρόβλημα προσέγγισης με χρήση ελαχίστων τετραγώνων: Δεδομένης μιας συνάρτησης f ορισμένης και ολοκληρώσιμης σε ένα διάστημα $[a, b]$, να βρεθεί ένα πολυώνυμο P βαθμού $\leq n$ τέτοιο ώστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 \, dx$$

να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.