

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ – ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ

04/09/14

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

1. α) **(0.5)** Βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, 0, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $x - y = 0$.

β) **(0.5)** Βρείτε το σημείο τομής της ευθείας $x = 1 - 2t$, $y = t$, $z = 4t - 3$, με το επίπεδο $2x - y + z = 1$.

2. **(1)** Δίνεται η παραμετρημένη καμπύλη γ με τύπο $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, που περιγράφει τη θέση ενός κινητού κατά τη χρονική στιγμή t . Δείξτε ότι τα διανύσματα ταχύτητας και επιτάχυνσης της γ είναι κάθετα μεταξύ τους, σε κάθε χρονική στιγμή t .

3. **(1)** Δείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο της

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^3},$$

στο σημείο $(0, 0)$.

4. **(1.25)** Με τον κανόνα της αλυσίδας εκφράστε τα $\partial f/\partial u$, $\partial f/\partial v$ και $\partial f/\partial w$ συναρτήσει των u, v και w όταν

$$f = x^2y + y^2z + z^2x, \quad x = uv, \quad y = vw, \quad z = uw.$$

5. **(1)** Βρείτε τις κατευθύνσεις μέγιστης μείωσης και μέγιστης αύξησης της συνάρτησης

$$f(x, y) = y^4 + x^2y, \quad \text{στο σημείο } P(1, 1).$$

Υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους στις κατευθύνσεις αυτές στο P .

6. **(1.25)** Βρείτε τα ολικά ακρότατα της $f(x, y) = x^4 - y^4$ στον μοναδιαίο κλειστό τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 1)$.

7. **(1.25)** Έστω T το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 2)$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_T (x + y) dx dy.$$

8. **(1.25)** Με πολικές συντεταγμένες υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2)^{-1} dx dy.$$

9. **(1.5)** Με σφαιρικές συντεταγμένες βρείτε το κέντρο μάζας της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ με πυκνότητα $\rho(x, y, z) = x$.

Υπάρχουν 10.5 μονάδες. Άριστα το 10.

Διάρκεια εξέτασης: 120 λεπτά.