Σύντομη ιστορική εισαγωγή

Η υπερβολική γεωμετρία δημιουργήθηκε στο πρώτο μισό του 19ου αιώνα κατά την προσπάθεια κατανόησης των ευκλείδειων αξιωμάτων της τότε γνωστής γεωμετρίας. Είναι ένας τύπος μη-ευκλείδειας γεωμετρίας, δηλαδή είναι μια γεωμετρία που δεν ικανοποιεί ένα από τα αιτήματα του Ευκλείδη, το αίτημα της ύπαρξης των παραλλήλων ευθειών. Οι Einstein και Minkowski βρήκαν στην υπερβολική γεωμετρία το γεωμετρικό υπόβαθρο για την κατανόηση του φυσικού χώρου και του χρόνου. Τα πρώτα χρόνια του 20ου αιώνα η υπερβολική γεωμετρία εθεωρείτο βασική γνώση για τους μαθηματικούς και τους φυσικούς.

Η υπερβολική γεωμετρία είναι το αρχετυπικό παράδειγμα μιας γεωμετρίας με αρνητική καμπυλότητα. Αυτού του είδους οι γεωμετρίες είναι εξαιρετικά κοινές και έχουν σοβαρές εφαρμογές στην θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, στην τοπολογία των 2- και 3-πολλαπλοτήτων, στην θεωρία των πεπερασμένα παραστάσιμων άπειρων ομάδων, στην Φυσική και σε άλλες διάσπαρτες περιοχές των Μαθηματικών.

Τα αιτήματα του Ευκλείδη με σύγχρονη ορολογία είναι τα ακόλουθα :

1. Δύο διαφορετικά σημεία μπορούν να συνδεθούν με ένα ακριβώς ευθύγραμμο τμήμα.
2. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις.
3. Για κάθε σημείο υπάρχει ακριβώς ένας κύκλος με κέντρο το σημείο αυτό και δεδομένη ακτίνα.
4. Ολες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.
5. Αν μια ευθεία τέμνει δύο άλλες ευθείες έτσι ώστε οι εσωτερικές γωνίες προς την ίδια μεριά να έχουν άθροισμα μικρότερο από δύο ορθές γωνίες, τότε οι δύο ευθείες τέμνονται απ΄ αυτήν την μεριά.

Είναι προφανές οτι το 5ο αίτημα είναι το πλέον περίπλοκο και «αφύσικο». Αν θεωρήσουμε τα τέσσερα πρώτα δεδομένα, τότε το 5ο είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο :

5. Από κάθε σημείο κείμενο εκτός ευθείας διέρχεται ακριβώς μία παράλληλη ευθεία.

Για σχεδόν 2000 χρόνια οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να αποδείξουν οτι το 5ο αίτημα προκύπτει από τα προηγούμενα. Κάθε φορά όμως έβρισκαν απλώς υποκατάστατα. Ο Πρόκλος (410-485) το αντικατέστησε με το αίτημα οτι τα σημεία με σταθερή απόσταση από την ίδια μεριά μίας ευθείας σχηματίζουν ευθεία. Ο J. Wallis (1616-1703) χρησιμοποίησε την υπόθεση οτι για κάθε τρίγωνο υπάρχουν όμοιά του με οποιοδήποτε μέγεθος. Η πιο σοβαρή προσπάθεια έγινε από τον G. Saccheri (1667-1733) που θεώρησε τετράπλευρα με γωνίες βάσεις ορθές και κάθετες πλευρές ίσου μήκους και απέδειξε προτάσεις υπό την μη-ευκλείδεια υπόθεση οτι οι δύο άλλες γωνίες δεν είναι ορθές. Η αποφασιστική πρόοδος έγινε στην αρχή του 19ου αιώνα, όταν εγκαταλείφθηκε η πρσπάθεια της απόδειξης του 5ου αιτήματος και οι μαθηματικοί επεξεργάστηκαν τις συνέπειες της άρνησής του. Βρέθηκε τότε οτι δημιουργείται μια συνεκτική θεωρία, αν το 5ο αίτημα του Ευκλείδη αντικατασταθεί με το ακόλουθο :

«Από κάθε σημείο κείμενο εκτός ευθείας διέρχονται περισσότερες της μίας παράλληλες.»

Η αντικατάσταση του 5ου αιτήματος με αυτήν την παραδοχή έχει παράξενες συνέπειες. Χαρακτηριστικότερες είναι οτι τότε το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο από δύο ορθές και οτι δύο όμοια τρίγωνα είναι πάντα ίσα.

Θεμελειωτές της υπερβολικής γεωμετρίας ήταν οι C. F. Gauss (1777-1855), N.I. Lobachevskii (1793- 1850) και J. Bolyai (1802-1860). Και οι τρείς ανέπτυξαν την υπερβολική γεωμετρία συνθετικά, δηλαδή βασισμένοι σε αξιώματα, χωρίς να δώσουν αναλυτικό μοντέλο. Ετσι δεν απέδειξαν την συμβιβαστότητά της, δηλαδή την μη αντιφατικότητα των αξιωμάτων της. Η βάση για την αναλυτική μελέτη της υπερβολικής γεωμετρίας δόθηκε από την διαφορική γεωμετρία των επιφανειών με σταθερή αρνητική καμπυλότητα. Κάτι τέτοιο είχε υποδείξει το 1837 ο Lobachevskii και επιβεβαίωσε ανεξάρτητα ο Minding το 1839. Η θεωρία των επιφανειών και η σχέση της με την υπερβολική γεωμετρία υπήρξε σε κάποιο βαθμό το εφαλτήριο που ώθησε τον B. Riemann να εισάγει αυτό που σήμερα αποκαλείται πολλαπλότητα Riemann. Το τελικό ξεκαθάρισμα έγινε το 1868 από τον E. Beltrami. Η αναλυτική εργασία είχε αποτέλεσμα την κατασκευή συγκεκριμένων μοντέλων της υπερβολικής γεωμετρίας, πράγμα που έδειξε οτι είναι το ίδιο συμβιβαστή όπως και η ευκλείδεια γεωμετρία.

1. To Erlanger Programm του Felix Klein

Το Erlanger Programm είναι ένα μέσο για την περιγραφή γεωμετριών με ομοιόμορφο τρόπο που διευκολύνει την μεταξύ τους σύγκριση. Με άλλα λόγια, δίνει ένα πλαίσιο για την κατάταξη των γεωμετριών, ενώ παρέχει και τεχνικές αποδεικτικές διαδικασίες που εφαρμόζονται ομοιόμορφα σε όλες τις γεωμετρίες.

Σύμφωνα με το Erlanger Programm μια γεωμετρία δεν βασίζεται σε έναν κατάλογο λογικών αξιωμάτων και «φυσικών» αιτημάτων, αλλά αποτελείται από ένα σύνολο και έναν τρόπο που μας επιτρέπει να λέμε πότε δύο σχήματα είναι ισοδύναμα (δηλαδή «ίσα»). Οι διαφορετικές γεωμετρίες διακρίνονται μεταξύ τους από τις διαφορετικές έννοιες ισοδυναμίας σχημάτων. Αριθμητικές έννοιες, όπως π.χ. μήκος ή εμβαδόν, μπορούν να εισαχθούν εκ των υστέρων, αρκεί να είναι συμβατές με την έννοια ισοδυναμίας σχημάτων που έχουμε. Δηλαδή, δύο ισοδύναμα σχήματα οφείλουν π.χ. να έχουν ίσα εμβαδά.

Για να ορίσει ο F. Klein την έννοια της ισοδυναμίας σχημάτων χρησιμοποίησε την ήδη υπάρχουσα στα Στοιχεία του Ευκλείδη έννοια της υπέρθεσης. Σύμφωνα μ' αυτήν, δύο σχήματα είναι ίσα, αν μπορεί το ένα να μετακινηθεί έτσι ώστε να συμπέσει με το άλλο. Η έννοια της μετακίνησης δεν είναι άλλη από την έννοια της συνάρτησης, που όμως δεν ήταν διαθέσιμη στην εποχή του Ευκλείδη. Ετσι η περιγραφή της έννοιας της ισοδυναμίας σχημάτων γίνεται μέσα από την επιλογή ενός συνόλου επιτρεπτών συναρτήσεων, που παίζουν τον ρόλο των κινήσεων. Δηλαδή, δύο σχήματα A, B είναι ισοδύναμα, αν υπάρχει μια επιτρεπτή συνάρτηση-κίνηση f ώστε $f(A) = B$. Σύμφωνα με την κοινή λογική, η έννοια της ισοδυναμίας σχημάτων πρέπει να είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. Αυτό θέτει περιορισμούς στο σύνολο των επιτρεπτών συναρτήσεων. Η ανακλαστικότητα εξασφαλίζεται αν η ταυτοτική είναι επιτρεπτή συνάρτηση. Η συμμετρικότητα αν οποτεδήποτε η f είναι επιτρεπτή συνάρτηση, τότε και η f^{-1} είναι. Τέλος, η μεταβατικότητα εξασφαλίζεται αν για κάθε ζεύγος επιτρεπτών συναρτήσεων f, g τότε και η $g \circ f$ είναι επιτρεπτή συνάρτηση. Ετσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

1.1. Ορισμός. *Εστω $X \neq \varnothing$. Μία ομάδα μετασχηματισμών του X είναι μια υποομάδα G των 1-1 και επί απεικονίσεων του X στον εαυτό του. Δηλαδή, η G είναι ένα σύνολο απεικονίσεων $f : X \to X$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :*

(α) Η ταυτοτική απεικόνιση του X ανήκει στην G.

(β) Κάθε $f \in G$ είναι αντιστρέψιμη και $f^{-1} \in G$.

(γ) Αν $f, g \in G$, τότε $g \circ f \in G$.

1.2. Ορισμός. *Μία γεωμετρία (κατά Klein) είναι ένα ζεύγος (G, X), όπου $X \neq \varnothing$ και η G είναι μία ομάδα μετασχηματισμών του X. Ο X λέγεται ο υποκείμενος χώρος της γεωμετρίας και η G η ομάδα των μετασχηματισμών της.*

1.3. Ορισμός. *Εστω (G, X) μία γεωμετρία. Ενα σχήμα της γεωμετρίας είναι ένα σύνολο $A \subset X$. Δύο σχήματα A, B λέγονται ισοδύναμα (ή «ίσα»), αν υπάρχει $f \in G$ ώστε $f(A) = B$.*

1.4. Παράδειγμα. Η (επίπεδη) ευκλείδεια γεωμετρία είναι το ζεύγος $(E, \mathbb{C})$, όπου $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και E είναι το σύνολο των απεικονίσεων $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με τύπο

$$f(z) = e^{i\theta}z + b \text{ ή } f(z) = e^{i\theta}\bar{z} + b,$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$. Το E είναι ομάδα μετασχηματισμών. Προφανώς, $id \in E$, για $\theta = 0$, $b = 0$. Αν $f, g \in E$, όπου $f(z) = e^{i\theta}z + b$ και $g(z) = e^{i\phi}z + a$, τότε

$$f^{-1}(z) = e^{i(-\theta)}z + (-be^{-i\theta}) \text{ και } (g \circ f)(z) = e^{i(\phi+\theta)}z + (a + be^{i\phi}),$$

συνεπώς f^{-1} και $g \circ f \in E$. Αν $f(z) = e^{i\theta}\bar{z} + b$, τότε $f^{-1}(z) = e^{i\theta}\bar{z} + (-\bar{b}e^{i\theta})$, οπότε πάλι $f^{-1} \in E$. Επιπλέον,

$$(g \circ f)(z) = e^{i(\phi+\theta)}\bar{z} + (a + be^{i\phi}) \text{ και } (f \circ g)(z) = e^{i(\theta-\phi)}\bar{z} + (b + \bar{a}e^{i\theta}),$$

οπότε $g \circ f \in E$ και $f \circ g \in E$. Αυτά δείχνουν οτι το E είναι ομάδα μετασχηματισμών. Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$, η $\rho_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\rho_\theta(z) = e^{i\theta}z$ λέγεται στροφή κατά γωνία θ και η $\tau_b : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $\tau_b(z) = z + b$ λέγεται μεταφορά κατά b. Η $C : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $C(z) = \bar{z}$ είναι η ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα. Παρατηρούμε οτι κάθε $f \in E$ έχει την μορφή $f = \tau_b \circ \rho_\theta$ ή $f = \tau_b \circ \rho_\theta \circ C$, για κατάλληλα $\theta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$.

Σύμφωνα με το Erlanger Programm του Klein γεωμετρία είναι η μελέτη εκείνων των ιδιοτήτων, που αν τις έχει ένα σχήμα τότε τις έχουν και όλα τα ισοδύναμά του. Για την τεχνική διατύπωση τέτοιων ιδιοτήτων χειαζόμαστε έννοιες που παραμένουν αναλλοίωτες από τα στοιχεία της ομάδας των μετασχηματισμών της γεωμετρίας.

1.5. Ορισμός. *Εστω (G, X) μια γεωμετρία και $\mathcal{C}$ μία κλάση σχημάτων. Η $\mathcal{C}$ λέγεται αναλλοίωτη κλάση σχημάτων, αν $f(A) \in \mathcal{C}$ για κάθε $A \in \mathcal{C}$ και $f \in G$. Μία συνάρτηση $F : \mathcal{C} \to Y$, όπου $Y \neq \varnothing$, λέγεται αναλλοίωτη, αν $F(f(A)) = F(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{C}$ και $f \in G$.*

1.6. Παράδειγμα. Στην ευκλείδεια γεωμετρία το σύνολο των τριγώνων είναι μία αναλλοίωτη κλάση σχημάτων. Επίσης το εμβαδόν των τριγώνων είναι μία αναλλοίωτη πραγματική συνάρτηση στο σύνολο των τριγώνων.

Οπως είπαμε στην αρχή, το Erlanger Programm μας δίνει μεταξύ των άλλων και μία ισχυρή μέθοδο απόδειξης θεωρημάτων, που εφαρμόζεται ομοιόμορφα σε όλες τις γεωμετρίες. Μία σύντομη περιγραφή αυτής της μεθόδου είναι η ακόλουθη. Εστω (G,X) μία γεωμετρία και Π μία πρόταση που θέλουμε ν' αποδείξουμε για ένα σχήμα A. Η Π πρέπει να έχει έννοια στα πλαίσια της γεωμετρίας, δηλαδή πρέπει όλες οι έννοιες που αναφέρονται στην διατύπωσή της να είναι αναλλοίωτες. Ετσι αν αποδείξουμε την Π για κάποιο $g(A)$, $g \in G$, τότε η Π ισχύει και για το A. Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε το $g \in G$ έτσι ώστε η απόδειξη της πρότασης για το $g(A)$ να γίνεται η απλούστερη δυνατή.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα οτι στα πλαίσια της ευκλείδειας γεωμετρίας θέλουμε ν' αποδείξουμε οτι το εμβαδόν V ενός τριγώνου με μήκη πλευρών a, b, c δίνεται από τον τύπο του Ηρωνα

$$V = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ \text{όπου}\ s = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Κατ' αρχήν παρατηρούμε οτι η κλάση των τριγώνων είναι αναλλοίωτη, όπως επίσης και οι έννοιες του εμβαδού και του μήκους. Συνεπώς, αν $\Delta(x,y,z)$ είναι το τρίγωνο στο $\mathbb{C}$ με κορυφές $x, y, z \in \mathbb{C}$, αρκεί ν' αποδείξουμε την πρόταση για το $g(\Delta(x,y,z))$, όπου $g \in E$. Επιλέγουμε το $g \in E$ ώστε το $g(\Delta(x,y,z))$ να βρίσκεται σε θέση που διευκολύνει την απόδειξη. Κάνοντας μια κατάλληλη στροφή και μια κατάλληλη μεταφορά μπορούμε να το φέρουμε σε θέση $g(\Delta(x,y,z)) = \Delta(p,q,r)$, ώστε η πλευρά qr να βρίσκεται πάνω στον πραγματικό άξονα με $q < 0 < r$ και η κορυφή p πάνω στον φανταστικό άξονα με $p = iy$, $y > 0$. Τότε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου είναι $a = r - q$, $b = |r - iy| = \sqrt{r^2 + y^2}$, $c = |q - iy| = \sqrt{q^2 + y^2}$ και κάνοντας τις απλές τώρα πια πράξεις βρίσκουμε

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{1}{4}y^2(r-q)^2 = V^2.$$

1.7. Ορισμός. *Δύο γεωμετρίες (G,X) και (H,Y) λέγονται ισόμορφες (ή μοντέλα της ίδιας γεωμετρίας) αν υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση $h : X \to Y$, ώστε $h \circ g \circ h^{-1} \in H$ και $h^{-1} \circ g \circ h \in G$ για κάθε $g \in G$, $f \in H$.*

Μία γεωμετρία μπορεί να έχει πολλά μοντέλα. Για την αναλυτική μελέτη της ο μοναδικός δρόμος είναι να μελετηθεί ένα συγκεκριμένο μοντέλο. Η επιλογή του μοντέλου, αν υπάρχουν πολλά, εξαρτάται από το πόσο βολικό είναι στους υπολογισμούς ή ακόμα μπορεί να οφείλεται και σε ιστορικούς λόγους. Για παράδειγμα το μοντέλο $(E, \mathbb{C})$ για την ευκλείδεια γεωμετρία φαίνεται να είναι το πιο βολικό στους υπολογισμούς.

2. Η σφαίρα του Riemann

Η σφαίρα του Riemann ως σύνολο είναι το $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, όπου ∞ είναι ένα σύμβολο που δεν ανήκει στο $\mathbb{C}$. Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ και $\epsilon > 0$ το σύνολο $S(z,\epsilon) = \{u \in \mathbb{C} : |u - z| < \epsilon\}$ είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο z και ακτίνα ϵ. Ορίζουμε

$$S(\infty, \epsilon) = \{\infty\} \cup \{u \in \mathbb{C} : |u| > \epsilon\}.$$

Ενα σύνολο $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται ανοιχτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S(x,\epsilon) \subset A$. Ενα σύνολο $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται κλειστό αν το $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ είναι ανοικτό.

Μία ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\hat{\mathbb{C}}$ συγκλίνει στο $x \in \hat{\mathbb{C}}$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \in S(x,\epsilon)$για κάθε $n > N$. Μία συνάρτηση $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται συνεχής αν

$f(x_n) \to f(x)$, όταν $x_n \to x$.

2.1. Παράδειγμα. Αν $z_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, και $|z_n| \to +\infty$, τότε $z_n \to \infty$ και αντίστροφα.

Τοπολογικά η σφαίρα του Riemann είναι η 2-σφαίρα

$$S^2 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\}.$$

Αυτό το βλέπουμε μέσω της στερεογραφικής προβολής που θα περιγράψουμε αμέσως τώρα. Εστω $N = (0,0,1)$ ο βόρειος πόλος της S^2. Στο οριζόντιο επίπεδο $\{(a,b,0) : a,b \in \mathbb{R}\}$ θεωρούμε μιγαδική δομή που το ταυτίζει με το $\mathbb{C}$. Για κάθε $(a,b,c) \in S^2$ η ευθεία που διέρχεται από το N και το (a,b,c) τέμνει το $\mathbb{C}$ ακριβώς σ' ένα σημείο $\sigma(a,b,c)$. Η συνάρτηση $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$, που είναι η στερεογραφική προβολή, έχει τύπο

$$\sigma(a,b,c) = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}$$

και είναι προφανώς συνεχής. Η σ είναι αντιστρέψιμη, η $\sigma^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 \setminus \{N\}$ έχει τύπο

$$\sigma^{-1}(z) = (\frac{2\mathrm{Re}z}{|z|^2+1}, \frac{2\mathrm{Im}z}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})$$

και είναι προφανώς συνεχής. Η στερεογραφική προβολή επεκτείνεται στην S^2 αν θέσουμε $\sigma(N) = \infty$, οπότε επεκτείνεται η $\sigma^{-1} : \hat{\mathbb{C}} \to S^2$ με $\sigma^{-1}(\infty) = N$. Οι επεκτάσεις είναι συνεχείς με βάση την έννοια της σύκλισης στο $\hat{\mathbb{C}}$ που ορίσαμε προηγουμένως. Η επέκταση της στερεογραφικής προβολής είναι συνεχής και στον βόρειο πόλο, γιατί για κάθε ακολουθία $(a_n, b_n, c_n) \to (0,0,1)$, όπου $(a_n, b_n, c_n) \in S^2$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$|\sigma(a_n,b_n,c_n)| = |\frac{a_n}{1-c_n} + i\frac{b_n}{1-c_n}| = \frac{a_n^2+b_n^2}{(1-c_n)^2} = \frac{1-c_n^2}{(1-c_n)^2} = \frac{1+c_n}{1-c_n} \to +\infty,$$

και συνεπώς $\sigma(a_n,b_n,c_n) \to \infty = \sigma(N)$. Επίσης, και η σ^{-1} είναι συνεχής στο ∞,γιατί αν $z_n \to \infty$, τότε $|z_n| \to +\infty$ και προφανώς $\sigma^{-1}(z_n) \to (0,0,1) = \sigma^{-1}(\infty)$. Με άλλα λόγια η $\sigma : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$ είναι ομοιομορφισμός.

2.2. Ορισμός. *Ενας μετασχηματισμός* Möbius *είναι μία συνάρτηση* $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ *με τύπο*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \textit{αν } z \in \mathbb{C} \textit{ και } z \neq -\frac{d}{c},\ \textit{ενώ } f(-\frac{d}{c}) = \infty \textit{ και } f(\infty) = \frac{a}{c},$$

όπου $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ *και* $ad - bc \neq 0$, *στην περίπτωση που* $c \neq 0$. *Αν* $c = 0$, *τότε* $f(\infty) = \infty$.

Ο f είναι προφανώς συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Επιπλέον,

$$\lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c} = f(\infty),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής στο ∞. Επίσης, αν $c \neq 0$, τότε

$$\lim_{z\to-\frac{d}{c}} |az+b| = \frac{1}{|c|}|ad-bc| \neq 0$$

και κατά συνέπεια

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}} |f(z)| = +\infty,$$

που σημαίνει οτι

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}} f(z) = \infty = f(-\frac{d}{c}).$$

Ετσι κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι συνεχής στην σφαίρα του Riemann. Επειδή $ad - cb \neq 0$, ο f είναι αντιστρέψιμος με αντίστοφο τον

$$f^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}, f^{-1}(\frac{a}{c}) = \infty, f^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

Δηλαδή ο f^{-1} είναι πάλι μετασχηματισμός Möbius. Ειδικά, κάθε μετασχηματισμός Möbius είναι ομοιομορφισμός. Αν τώρα

$$g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

τότε έχουμε

$$(g\circ f)(z) = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}.$$

Αρα ο $g\circ f$ είναι μετασχηματισμός Möbius. Επειδή προφανώς και η ταυτοτική απεικόνιση είναι μετασχηματισμός Möbius, προκύπτει οτι το σύνολο $\mathcal{M}^+$ των μετασχηματισμών Möbius είναι μία ομάδα μετασχηματισμών της $\hat{\mathbb{C}}$.

Η στροφή $\rho_\theta(z) = e^{i\theta}z$ είναι μετασχηματισμός Möbius, για $c = b = 0, d = 1$. Επίσης, η μεταφορά $\tau_b(z) = z + b$ είναι μετασχηματισμός Möbius, για $a = d = 1, c = 0$. Ο μετασχηματισμός Möbius $J(z) = \frac{1}{z}$ λέγεται αντιστροφή. Είναι προφανές οτι αν

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, c \neq 0,$$

τότε

$$f(z) = \frac{acz+bc}{c^2z+cd} = \frac{acz+ad+(ad-bc)}{c^2z+cd} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c^2z+cd}.$$

Ετσι, αν θέσουμε $g(z) = c^2z + cd$ και $h(z) = -(ad-bc)z + \frac{a}{c}$, τότε $f = h\circ J\circ g$.

Η ανάκλαση $C(z) = \bar{z}$ επεκτείνεται σ' έναν ομοιομορφισμό του $\hat{\mathbb{C}}$, αν θέσουμε $C(\infty) = \infty$ και δεν είναι μετασχηματισμός Möbius. Πράγματι, αν υπάρχουν $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, ώστε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ να ισχύει

$$\bar{z} = \frac{az+b}{cz+d},$$

τότε $c|z|^2 + d\bar{z} = az + b$. Για $z = 0$ παίρνουμε $b = 0$. Για $z = \pm 1$, παίρνουμε $c = a - d = d - a$, οπότε $c = 0$, $a = d$. Αλλά για $z = i$ έχουμε $d = 0$, δηλαδή αντίφαση, αφού τότε $a = b = c = d = 0$.

Αν $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου $ad - bc \neq 0$, τότε έχουμε

$$(f\circ C)(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \text{ και } (C\circ f)(z) = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}}.$$

Αφού $C = C^{-1}$, έχουμε $(f\circ C)^{-1} = C\circ f^{-1}$. Τέλος, αν $f, g \in \mathcal{M}^+$, τότε $(g\circ C)\circ(f\circ C) \in \mathcal{M}^+$. Αυτά δείχνουν οτι το σύνολο $\mathcal{M} = \mathcal{M}^+ \cup \mathcal{M}^+\circ C$ είναι ομάδα μετασχηματισμών της $\hat{\mathbb{C}}$. Τα στοιχεία της $\mathcal{M}$ λέγονται γενικευμένοι μετασχηματισμοί Möbius.

3. Η γεωμετρία των μετασχηματισμών Möbius

Οπως είδαμε το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius $\mathcal{M}^+$ και το σύνολο των γενικευμένων μετασχηματισμών Möbius $\mathcal{M}$ αποτελούν ομάδες μετασχηματισμών. Μάλιστα η $\mathcal{M}^+$ είναι κανονική υποομάδα της $\mathcal{M}$ με δείκτη 2. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τα κύρια αναλλοίωτα της γεωμετρίας $(\mathcal{M}^+, \hat{\mathbb{C}})$.

Το $x \in \hat{\mathbb{C}}$ λέγεται σταθερό σημείο του $f \in \mathcal{M}^+$, αν $f(x) = x$.

3.1. Λήμμα. *Κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ με $f \neq id$ έχει το πολύ δύο σταθερά σημεία στην $\hat{\mathbb{C}}$.*

Απόδειξη. Εστω οτι

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ όπου } ad - bc \neq 0.$$

Υποθέτουμε πρώτα οτι $c = 0$. Τότε, $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ και ένα σταθερό σημείο είναι το ∞. Τα άλλα ενδεχόμενα σταθερά σημεία βρίσκονται στο $\mathbb{C}$ και είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z.$$

Αν $a = d$, τότε $z + \frac{b}{d} = z$ και συνεπώς $b = 0$, δηλαδή $f = id$. Αρα $a \neq d$ και συνεπώς $z = \dfrac{b}{d-a}$. Δηλαδή, η f έχει δύο σταθερά σημεία. Εστω τώρα οτι $c \neq 0$. Τότε $f(\infty) = \frac{a}{c}$ και συνεπώς όλα τα σταθερά σημεία είναι οι λύσεις στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $cz^2 + (d-a)z - b = 0$, που είναι το πολύ δύο.

Το ακόλουθο θεώρημα είναι θεμελειώδες στην γεωμετρία των μετασχηματισμών Möbius.

3.2. Θεώρημα. *Για κάθε ζεύγος διατεταγμένων τριάδων (z_1, z_2, z_3) και (w_1, w_2, w_3) διαφορετικών μεταξύ τους σημείων της $\hat{\mathbb{C}}$ υπάρχει ακριβώς ένας $f \in \mathcal{M}^+$, ώστε*

$$f(z_1) = w_1, f(z_2) = w_2 \text{ και } f(z_3) = w_3.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν κατασκευάζουμε έναν $g \in \mathcal{M}^+$ ώστε $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$ και $g(z_3) = \infty$. Ενας τέτοιος $g \in \mathcal{M}^+$ έχει τύπο

$$g(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Ομοια υπάρχει ένας $h \in \mathcal{M}^+$ ώστε $h(w_1) = 0$, $h(w_2) = 1$ και $h(w_3) = \infty$. Συνεπώς, ο $f = h^{-1} \circ g$ ικανοποιεί τις $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, $f(z_3) = w_3$. Η μοναδικότητα του f προκύπτει από το λήμμα 3.1, γιατί αν ο $f_0 \in \mathcal{M}^+$ ικανοποιεί επίσης τις $f_0(z_1) = w_1$, $f_0(z_2) = w_2$, $f_0(z_3) = w_3$, τότε ο $f^{-1} \circ f_0$ έχει τρία σταθερά σημεία και συνεπώς είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

3.3. Ορισμός. *Αν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ είναι τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία, ο διπλός λόγος $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ είναι ο*

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Αν $z_1 = \infty$, επεκτείνουμε τον ορισμό του διπλού λόγου θέτοντας

$$[\infty, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4},$$

έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια του διπλού λόγου ως συνάρτησης των z_1, z_2, z_3, z_4, αφού τότε έχουμε

$$\lim_{z\to\infty} [z, z_2; z_3, z_4] = \lim_{z\to\infty} \frac{z - z_4}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} = \lim_{z\to\infty} \frac{1 - \frac{z_4}{z}}{1 - \frac{z_2}{z}} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_4} = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_2}.$$

Ομοια ορίζονται τα $[z_1, \infty; z_3, z_4]$, $[z_1, z_2; \infty, z_4]$ και $[z_1, z_2; z_3, \infty]$. Οπως δείχνει η απόδειξη του θεωρήματος 3.2, ο μοναδικός $f \in \mathcal{M}^+$ με $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = 1$ και $f(z_3) = \infty$ έχει τύπο $f(z) = [z, z_3; z_2, z_1]$.

3.4. Πρόταση. *Ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από την ομάδα μετασχηματισμών* $\mathcal{M}^+$, *δηλαδή* $[z_1, z_2; z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)]$ *για κάθε* $f \in \mathcal{M}^+$ *και* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ *διαφορετικά μεταξύ τους.*

Απόδειξη. Εστω $f \in \mathcal{M}^+$ και $g \in \mathcal{M}^+$ με τύπο $g(z) = [z, z_2; z_3, z_4]$. Ο g είναι ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius για τον οποίο ισχύει $g(z_2) = \infty$, $g(z_3) = 1$ και $g(z_4) = 0$. Ο $g \circ f^{-1}$ είναι τότε ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius με $(g \circ f^{-1})(f(z_2)) = \infty$, $(g \circ f^{-1})(f(z_3)) = 1$ και $(g \circ f^{-1})(f(z_4)) = 0$. Αρα $(g \circ f^{-1})(z) = [z, f(z_2); f(z_3), f(z_4)]$ για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$ και κατά συνέπεια $[z_1, z_2; z_3, z_4] = g(z_1) = (g \circ f^{-1})(f(z_1)) = [f(z_1), f(z_2); f(z_3), f(z_4)]$.

3.5. Ορισμός. *Ενα σύνολο* $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ *λέγεται κύκλος στην σφαίρα του Riemann αν είναι ευκλείδειος κύκλος στο* $\mathbb{C}$ *ή* $K = l \cup \{\infty\}$, *όπου* l *είναι μια ευκλείδεια ευθεία στο* $\mathbb{C}$.

3.6. Πρόταση. *Αν τα* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ *είναι διαφορετικά μεταξύ τους, ο διπλός λόγος* $[z_1, z_2; z_3, z_4]$ *είναι πραγματικός αριθμός τότε και μόνον τότε όταν τα* z_1, z_2, z_3, z_4 *βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο στην* $\hat{\mathbb{C}}$.

Απόδειξη. Εστω $f \in \mathcal{M}^+$ ο μοναδικός μετασχηματισμός Möbius ώστε $f(z_2) = \infty$, $f(z_3) = 1$, $f(z_4) = 0$, δηλαδή

$$f(z) = [z, z_2; z_3, z_4] = \frac{az + b}{cz + d},$$

για κατάλληλα $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ με $ad - bc \neq 0$. Εχουμε τώρα οτι $f(z) \in \mathbb{R}$ τότε και μόνον τότε όταν $f(z) = \overline{f(z)}$ και αντικαθιστώντας

$$(a\bar{c} - c\bar{a})z\bar{z} + (a\bar{d} - c\bar{b})z + (b\bar{c} - d\bar{a})\bar{z} + (b\bar{d} - d\bar{b}) = 0.$$

Ετσι έχουμε δύο περιπτώσεις. Αν $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$, η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\lambda z - \bar{\lambda}\bar{z} + \mu - \bar{\mu} = 0,$$

όπου έχουμε θέσει $\lambda = a\bar{d} - c\bar{b}$ και $\mu = b\bar{d}$. Αυτή είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{Im}(\lambda z + \mu) = 0$, που είναι η εξίσωση της ευθείας με κλίση $-\mathrm{Im}\lambda/\mathrm{Re}\lambda$. Αν $a\bar{c} - c\bar{a} \neq 0$, διαιρώντας έχουμε

$$z\bar{z} + \left(\frac{a\bar{d} - c\bar{b}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right) z + \left(\frac{b\bar{c} - d\bar{a}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right) \bar{z} + \left(\frac{b\bar{d} - d\bar{b}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right) = 0$$

οπότε

$$\left(z - \frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right) \cdot \left(\bar{z} - \overline{\frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}}\right) = \frac{d\bar{b} - b\bar{d}}{a\bar{c} - c\bar{a}} + \left|\frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right|^2$$

ή ακόμα

$$\left|z - \frac{d\bar{a} - b\bar{c}}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right|^2 = \left|\frac{ad - bc}{a\bar{c} - c\bar{a}}\right|^2$$

που είναι η εξίσωση ενός κύκλου στο $\mathbb{C}$.

3.7. Θεώρημα. *Κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ απεικονίζει κύκλους σε κύκλους στην $\hat{\mathbb{C}}$. Δηλαδή, το σύνολο των κύκλων της $\hat{\mathbb{C}}$ είναι αναλλοίωτη κλάση σχημάτων της γεωμετρίας $(\mathcal{M}^+, \hat{\mathbb{C}})$.*

Απόδειξη. Εστω $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ένας κύκλος και $z_1, z_2, z_3 \in K$. Τότε

$$K = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : [z, z_1; z_2, z_3] \in \mathbb{R}\},$$

από την πρόταση 3.6. Συνεπώς, από την πρόταση 3.4 για κάθε $f \in \mathcal{M}^+$ έχουμε

$$f(K) = \{z' \in \hat{\mathbb{C}} : [z', f(z_1); f(z_2), f(z_3)] \in \mathbb{R}\},$$

αφού η f είναι 1-1 και επί, που είναι κύκλος στην $\hat{\mathbb{C}}$, πάλι από την πρόταση 3.6.

3.8. Θεώρημα. *Αν A, $B \subset \hat{\mathbb{C}}$ είναι δύο κύκλοι, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{M}^+$ ώστε $f(A) = B$.*

Απόδειξη. Εστω $z_1, z_2, z_3 \in A$ τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και όμοια $w_1, w_2, w_3 \in B$. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.2, υπάρχει $f \in \mathcal{M}^+$ ώστε $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$ και $f(z_3) = w_3$. Απ' το θεώρημα 3.7, το $f(A)$ είναι ένας κύκλος στην $\hat{\mathbb{C}}$, που διέρχεται από τα σημεία w_1, w_2, w_3. Αφού οι κύκλοι $f(A)$, B έχουν τρία διαφορετικά σημεία κοινά, ταυτίζονται.

Μία αναλλοίωτη ποσότητα για τους μετασχηματισμούς Möbius είναι η γωνία. Εστωσαν $\gamma_1 : (\alpha_1, \beta_1) \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : (\alpha_2, \beta_2) \to \mathbb{C}$ δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες και $z = \gamma_1(t) = \gamma_2(s)$ ένα σημείο τομής τους. Η προσανατολισμένη γωνία τους $\angle(\gamma_1, \gamma_2)(z)$ στο σημείο z είναι το μοναδικό $0 \leq \phi < 2\pi$ ώστε

$$\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)} = \left|\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)}\right| e^{i\phi}.$$

3.9. Λήμμα. *Εστω $\gamma : (\alpha, \beta) \to \mathbb{C}$ μία διαφορίσιμη καμπύλη και $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Για κάθε $\alpha < t < \beta$ *με* $\gamma(t) \neq -\dfrac{d}{c}$ *η* $f \circ \gamma$ *είναι διαφορίσιμη στο* t *και*

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{ad - bc}{(c\gamma(t) + d)^2} \cdot \gamma'(t).$$

Απόδειξη. Εχουμε

$$(f \circ \gamma)'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{a\gamma(t+h) + b}{c\gamma(t+h) + d} - \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d} \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(ad - bc)(\gamma(t+h) - \gamma(t))}{(c\gamma(t+h) + d)(c\gamma(t) + d)} = \frac{ad - bc}{(\gamma(t) + d)^2} \cdot \gamma'(t).$$

3.10. Θεώρημα. *Εστωσαν* γ_1, γ_2 *δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες που τέμνονται στο σημείο* $\gamma_1(t) = \gamma_2(s) = z_0$. *Εστω* $f \in \mathcal{M}^+$ *με τύπο*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

ώστε $z_0 \neq -\frac{d}{c}$. *Τότε* $\angle(\gamma_1, \gamma_2)(z_0) = \angle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)(f(z_0))$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 3.9 προκύπει οτι

$$\frac{(f \circ \gamma_1)'(t)}{(f \circ \gamma_2)'(s)} = \frac{\dfrac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2}}{\dfrac{ad - bc}{(cz_0 + d)^2}} \cdot \frac{\gamma'(t)}{\gamma_2'(s)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma_2'(s)},$$

και το συμπέρασμα είναι άμεσο από τους ορισμούς.

Η συμπεριφορά της ανάκλασης ως προς τον πραγματικό άξονα σε σχέση με τις γωνίες είναι η ακόλουθη.

3.11. Πρόταση. *Εστωσαν* γ_1, γ_2 *δύο κανονικές διαφορίσιμες καμπύλες που τέμνονται στο σημείο* $\gamma_1(t) - \gamma_2(s) = z_0 \in \mathbb{C}$. *Αν* C *είναι η ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα, τότε* $\angle(\gamma_1, \gamma_2)(z_0) = -\angle(C \circ \gamma_1, C \circ \gamma_2)(C(z_0))$.

Απόδειξη. Προφανώς

$$\frac{(C \circ \gamma_1)'(t)}{(C \circ \gamma_2)'(s)} = \overline{\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_2'(s)}}$$

και το συμπέρασμα είναι φανερό.

Το αποτέλεσμα της πρότασης 3.11 αντικατοπτρίζει το γεγονός οτι η ανάκλαση αντιστρέφει τον προσανατολισμό της $\hat{\mathbb{C}}$, σε αντίθεση με τους μετασχηματισμούς Möbius που τον διατηρούν.

4. Το υπερβολικό επίπεδο

Εστω $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ και $I(\mathbb{H}^2) = \{f \in \mathcal{M} : f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2\}$. Το σύνολο $I(\mathbb{H}^2)$ είναι προφανώς ομάδα μετασχηματισμών του $\mathbb{H}^2$. Το $\mathbb{H}^2$ λέγεται υπερβολικό επίπεδο και η γεωμετρία $(I(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$ λέγεται υπερβολική γεωμετρία. Είναι σαφές οτι ο ορισμός της $I(\mathbb{H}^2)$ δεν είναι βολικός. Θα βρούμε τους τύπους των στοιχείων της. Κατ' αρχήν παρατηρούμε οτι αφού κάθε στοιχείο της f είναι ομοιομορφισμός της $\hat{\mathbb{C}}$ και $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$, πρέπει $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, όπου $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

4.1. Λήμμα. *Εστω $f \in \mathcal{M}^+$. Αν $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, τότε ο f έχει τύπο με πραγματικούς συντελεστές και αντίστροφα.*

Απόδειξη. Το αντίστροφο είναι προφανές. Εστω λοιπόν οτι $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, όπου

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc \neq 0.$$

Ξεχωρίζουμε τρείς περιπτώσεις :
(ι) Εστω οτι $a \neq 0$, $c \neq 0$. Τότε $\frac{a}{c} = f(\infty) \in \mathbb{R}$, $-\frac{b}{a} = f^{-1}(0) \in \mathbb{R}$ και $-\frac{d}{c} = f^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$. Εχουμε λοιπόν $a = f(\infty)c$, $b = -af^{-1}(0) = -f^{-1}(0)f(\infty)c$ και $d = -f^{-1}(\infty)c$. Αρα

$$f(z) = \frac{f(\infty)z + (-f^{-1}(0)f(\infty))}{z + (-f^{-1}(\infty))},$$

δηλαδή ο τύπος του f έχει πραγματικούς συντελεστές.
(ιι) Εστω οτι $a = 0$, οπότε $c \neq 0$. Πάλι έχουμε $f^{-1}(\infty) \in \mathbb{R}$ και $d = -cf^{-1}(\infty)$. Συνεπώς

$$b = f(z)(cz+d) = cf(z)(z - f^{-1}(\infty))$$

για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Επιλέγουμε τώρα ένα $z_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, οπότε $f(z_0) \in \mathbb{R}$ και για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$f(z) = \frac{f(z_0)z - f(z_0)f^{-1}(\infty)}{z - f^{-1}(\infty)},$$

δηλαδή ο f έχει τύπο με πραγματικούς συντελεστές.
(ιιι) Εστω οτι $c = 0$, οπότε $a \neq 0$, $d \neq 0$. Τότε έχουμε $f(0)$, $f(1) \in \mathbb{R}$ και $b = f(0)d$, $a = f(1)d - b = (f(1) - f(0))d$. Αρα $f(z) = (f(1) - f(0))z + f(0)$ και ο f έχει πάλι τύπο με πραγματικούς συντελεστές.

4.2. Θεώρημα. *Για έναν $f \in \mathcal{M}^+$ ισχύει $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ τότε και μόνον τότε όταν έχει τύπο*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc = 1.$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 4.1 ο f έχει τύπο

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc \neq 0.$$

Κατά συνέπεια

$$\mathrm{Im}f(z) = -\frac{i}{2}(f(z) - \overline{f(z)}) = -\frac{i}{2}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}z.$$

Ετσι έχουμε $f(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ τότε και μόνον τότε όταν $ad - bc > 0$. Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή του τύπου του f με $\sqrt{ad-bc}$ προκύπτει το συμπέρασμα.

4.3. Θεώρημα. *Η ομάδα μετασχηματισμών $I(\mathbb{H}^2)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς $f \in \mathcal{M}$ που έχουν τύπο*

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \text{όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ και } ad-bc = 1 \text{ ή}$$

$$f(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ \text{όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ και } ad-bc = -1.$$

Απόδειξη. Αν $f \in \mathcal{M}^+$, έχουμε την πρώτη μορφή από το θεώρημα 4.2. Τα στοιχεία του $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}^+$ είναι της μορφής $f \circ C$, όπου $f \in \mathcal{M}^+$ και C είναι η ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα. Αν $\mathbb{L}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}z < 0\}$, τότε $(f \circ C)(\mathbb{H}^2) = \mathbb{H}^2$ ακριβώς όταν $f(\mathbb{L}^2) = \mathbb{H}^2$ και $f(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$, αφού $C(\mathbb{H}^2) = \mathbb{L}^2$. Αν όμως

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \text{όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ και } ad-bc \neq 0,$$

τότε όπως δείχνει η απόδειξη του θεωρήματος 4.2 έχουμε

$$\mathrm{Im}f(z) = \frac{ad-bc}{|cz+d|^2}\mathrm{Im}z$$

και συνεπώς θα πρέπει $ad - bc < 0$. Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρανομαστή του τύπου του $f \circ C$ με $\sqrt{|ad-bc|}$ παίρνουμε την δεύτερη μορφή.

Αν θέσουμε $I^+(\mathbb{H}^2) = \mathcal{M}^+ \cap I(\mathbb{H}^2)$, τότε

$$I^+(\mathbb{H}^2) = \{f \in \mathcal{M}^+ : f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \text{όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ και } ad-bc = 1\},$$

και $I(\mathbb{H}^2) = I^+(\mathbb{H}^2) \cup I^+(\mathbb{H}^2) \circ \tau$, όπου $\tau(z) = -\bar{z}$. Η απεικόνιση $h : SL(2,\mathbb{R}) \to I^+(\mathbb{H})$ με

$$h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f,\ \text{με τύπο } f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

είναι επιμορφισμός ομάδων, όπως εύκολα διαπιστώνεται, με πυρήνα $\{I_2, -I_2\}$, όπου I_2 είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Κατά συνέπεια $PSL(2,\mathbb{R}) \cong I^+(\mathbb{H}^2)$.

4.4. Πρόταση. *Για κάθε z, $w \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(z) = w$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(z) = i$. Αν $z = a + ib$, όπου a, $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ και

$$f(u) = \frac{1}{b}u - \frac{a}{b},$$

τότε $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ και $f(z) = i$.

4.5. Θεώρημα. *Εστω $K \subset \hat{\mathbb{C}}$ ένας κύκλος που τέμνει κάθετα τον κύκλο $\hat{\mathbb{R}}$. Τότε για κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$, ο $f(K)$ είναι κύκλος που τέμνει επίσης κάθετα τον $\hat{\mathbb{R}}$ και $f(K \cap \mathbb{H}^2) = f(K) \cap \mathbb{H}^2$.*

Απόδειξη. Εστω πρώτα οτι $K \subset \mathbb{C}$. Τότε ο K τέμνει τον $\hat{\mathbb{R}}$ σε δύο σημεία στο $\mathbb{R}$. Τουλάχιστον ένα από τα δύο δεν είναι το $f^{-1}(\infty)$. Αν αυτό είναι το $z \in \mathbb{R}$, τότε από το θεώρημα 3.10 ο κύκλος $f(K) \subset \hat{\mathbb{C}}$ τέμνει κάθετα τον $\hat{\mathbb{R}}$ στο $f(z)$. Αν $f(K) \subset \mathbb{C}$, ο $f(K)$ είναι ευκλείδειος κύκλος που τέμνει κάθετα το $\mathbb{R}$. Αν $\infty \in f(K)$, το $f(K) \setminus \{\infty\}$ είναι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$. Αν τώρα $\infty \in K$, το $K \setminus \{\infty\}$ είναι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$ και αν το σημείο τομής δεν είναι το $f^{-1}(\infty)$, ισχύουν τα ίδια όπως προηγουμένως. Αν το σημείο τομής είναι το $f^{-1}(\infty)$, το $f(K) \setminus \{\infty\}$ είναι πάλι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$.

Σύμφωνα λοιπόν με το θεώρημα 4.5 η κλάση $\mathcal{L}$ των υποσυνόλων του $\mathbb{H}^2$ από ευκλείδειες ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ που είναι κάθετες στο $\mathbb{R}$ και από ευκλείδεια ημικύκλια που τέμνουν κάθετα το $\mathbb{R}$ είναι αναλλοίωτη στα πλαίσια της υπερβολικής γεωμετρίας. Κάθε στοιχείο της κλάσης $\mathcal{L}$ λέγεται υπερβολική ευθεία.

4.6. Πρόταση. *Για κάθε υπερβολική ευθεία $l \in \mathcal{L}$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε*

$$f(l) = \{iy : y > 0\}.$$

Απόδειξη. Εστω $l \in \mathcal{L}$ ένα ευκλείδειο ημικύκλιο που τέμνει κάθετα το $\mathbb{R}$ και $a < b$ τα ακραία σημεία του πάνω στο $\mathbb{R}$. Αν

$$f(z) = \frac{z-b}{z-a},$$

τότε $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ και $f(b) = 0$, $f(a) = \infty$. Το σημείο $z = \dfrac{b+a}{2} + i\dfrac{b-a}{2}$ είναι το ανώτερο σημείο του ημικυκλίου l και κάνοντας τις πράξεις βλέπουμε οτι $f(z) = i$. Αν λοιπόν $K \subset \mathbb{C}$ είναι ο κύκλος του οποίου άνω ημικύκλιο είναι το l, τότε ο κύκλος $f(K) \subset \hat{\mathbb{C}}$ έχει τρία κοινά σημεία με τον κύκλο $\{iy : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$. Αρα $f(K) = \{iy : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$ και συνεπώς $f(l) = f(K \cap \mathbb{H}^2) = f(K) \cap \mathbb{H}^2 = \{iy : y > 0\}$. Αν τώρα η $l \in \mathcal{L}$ είναι ευκλείδεια ευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$, τότε θεωρούμε τον $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με τύπο $f(z) = z - a$, όπου a είναι το ακραίο σημείο της l πάνω στο $\mathbb{R}$.

4.7. Πρόταση. *Αν z, $w \in \mathbb{H}^2$, $z \neq w$, τότε υπάρχει μία μοναδική υπερβολική ευθεία του $\mathbb{H}^2$ που διέρχεται από τα z, w.*

Απόδειξη. Αν $\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}w$, τότε η ευκλείδεια ευθεία που διέρχεται από τα z, w είναι κάθετη στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς το μέρος της που βρίσκεται στο $\mathbb{H}^2$ είναι η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα z, w. Αν $\mathrm{Re}z \neq \mathrm{Re}w$, θεωρούμε το ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z, w. Η ευκλείδεια μεσοκάθετη σ' αυτό τέμνει τότε το $\mathbb{R}$ σ' ένα μοναδικό σημείο, το οποίο είναι το κέντρο ενός ευκλείδειου κύκλου K. Το $l = K \cap \mathbb{H}^2$ είναι η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα z, w.

5. Η υπερβολική απόσταση.

Το υπερβολικό μήκος μίας C^1 καμπύλης $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ είναι

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt.$$

Αν η γ είναι κατά τμήματα C^1, δηλαδή υπάρχουν $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_k = \beta$ ώστε η $\gamma|[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, ...k-1$, να είναι C^1, τότε ορίζουμε

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} L(\gamma|[t_j, t_{j+1}]).$$

Το υπερβολικό μήκος είναι αναλλοίωτο από αναπαραμετρήσεις, όπως ακριβώς συμβαίνει με το ευκλείδειο μήκος. Πράγματι, αν $h : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ είναι μία C^1 αμφιδιαφόριση, τότε $(\gamma \circ h)'(t) = h'(t)\gamma'(h(t))$ και

$$L(\gamma \circ h) = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|(\gamma \circ h)'(t)|}{\mathrm{Im}((\gamma \circ h)(t))} dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|\gamma'(h(t))|}{\mathrm{Im}\gamma(h(t))} \cdot |h'(t)| dt = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t))|}{\mathrm{Im}\gamma(t)} dt = L(\gamma).$$

5.1. Θεώρημα. *Εστω $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ μία (κατά τμήματα) C^1 καμπύλη. Για κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$ ισχύει $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$.*

Απόδειξη. Εστω οτι $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με τύπο

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ όπου } a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1.$$

Τότε όπως ξέρουμε

$$(f \circ \gamma)'(t) = \frac{1}{(c\gamma(t) + d)^2} \cdot \gamma'(t) \text{ και } \mathrm{Im}f(\gamma(t)) = \frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2} \cdot \mathrm{Im}\gamma(t).$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{|(f \circ \gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}(f \circ \gamma)(t)} = \frac{\frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2} \cdot |\gamma'(t)|}{\frac{1}{|c\gamma(t) + d|^2} \cdot \mathrm{Im}\gamma(t)} = \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)}.$$

Αρα $L(f \circ \gamma) = L(\gamma)$. Απομένει τώρα να δείξουμε οτι $L(\tau \circ \gamma) = L(\gamma)$. Αυτό όμως είναι προφανές.

5.2. Παράδειγμα. Εστω $\alpha < \beta$ και $\gamma : [\alpha', \beta'] \to \mathbb{H}^2$ με τύπο $\gamma(t) = i\phi(t)$, όπου η $\phi : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ είναι μία C^1 μονότονη συνάρτηση. Τότε

$$L(\gamma) = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|i\phi'(t)|}{\phi(t)} dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{|\phi'(t)|}{\phi(t)} dt = \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

Αν $\delta : [\alpha'', \beta''] \to \mathbb{H}^2$ είναι μία οποιαδήποτε κατά τμήματα C^1 καμπύλη, με $\delta(\alpha'') = i\alpha$ και $\delta(\beta'') = i\beta$, τότε

$$L(\delta) = \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{|\delta'(t)|}{\mathrm{Im}\delta(t)} dt \geq \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{|(\mathrm{Im}\delta)'(t)|}{\mathrm{Im}\delta(t)} dt \geq \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{(\mathrm{Im}\delta)'(t)}{\mathrm{Im}\delta(t)} dt = \log \frac{\beta}{\alpha} = L(\gamma).$$

Δηλαδή, η γ είναι η κατά τμήματα C^1 καμπύλη από το $i\alpha$ στο $i\beta$ με το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.

5.3. Θεώρημα. *Εστωσαν z, $w \in \mathbb{H}^2$ και $\zeta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ μία 1-1 παραμέτρηση του τμήματος της υπερβολικής ευθείας που διέρχεται από τα z, w και τα έχει άκρα. Η ζ μεταξύ των κατά τμήματα C^1 καμπύλων από το z στο w έχει το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.*

Απόδειξη. Εστω $\delta : [\alpha', \beta'] \to \mathbb{H}^2$ μία κατά τμήματα C^1 καμπύλη από το z στο w. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.6, υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(\zeta([\alpha, \beta])) = \gamma([\alpha, \beta])$, όπου γ είναι η καμπύλη του παραδείγματος 5.2 από το $f(z)$ στο $f(w)$. Από το θεώρημα 5.1 και το παράδειγμα 5.2 έχουμε τώρα $L(\zeta) = L(f \circ \zeta) = L(\gamma) \leq L(f \circ \delta) = L(\delta)$.

Αν z, $w \in \mathbb{H}^2$, το τμήμα της υπερβολικής ευθείας που διέρχεται από τα z και w και τα έχει άκρα λέγεται υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα z, w. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, τα υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα είναι καμπύλες ελαχίστου υπερβολικού μήκους. Ορίζουμε τώρα ως υπερβολική απόσταση των z, $w \in \mathbb{H}^2$ το υπερβολικό μήκος $d(z, w)$ του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα z, w. Αν $z = w$ τότε ορίζουμε $d(z, w) = 0$. Προφανώς,

$$d(z, w) = \inf\{L(\delta) | \delta \text{ είναι μία κατά τμήματα } C^1 \text{ καμπύλη από το } z \text{ στο } w\}.$$

5.4. Πρόταση. *Το ζεύγος $(\mathbb{H}^2, d)$ είναι μετρικός χώρος. Δηλαδή,*
(ι) $d(z, w) \geq 0$ και $d(z, w) = 0$ τότε και μόνον τότε όταν $z = w$.
(ιι) $d(z, w) = d(w, z)$.
(ιιι) $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό είναι προφανές οτι $L(\delta) \geq 0$ για κάθε κατά τμήματα C^1 καμπύλη και συνεπώς $d(z, w) \geq 0$. Επίσης, αν $z \neq w$, το μοναδικό υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που τα έχει άκρα έχει θετικό υπερβολικό μήκος. Από το θεώρημα 5.3 έχουμε λοιπόν $d(z, w) > 0$. Ετσι έχουμε το (ι). Για το (ιι) αρκεί να παρατηρήσουμε οτι αν $\delta : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ είναι μία κατά τμήματα C^1 καμπύλη από το z στο w, τότε η $\tilde{\delta} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{H}^2$ με τύπο $\tilde{\delta}(t) = \delta(\alpha + \beta - t)$ είναι μία κατά τμήματα C^1 καμπύλη από το w στο z και $L(\tilde{\delta}) = L(\delta)$. Αρκεί τώρα να πάρουμε ως δ το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα από το z στο w. Ετσι έχουμε το (ιι). Για το (ιιι) παίρνουμε το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{H}^2$

από το z στο u και το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{H}^2$ από το u στο w. Αν

$$\delta(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t(\beta_1 - \alpha_1) + \alpha_1), & \text{όταν } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma_2((2t-1)(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2), & \text{όταν } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

τότε $d(z,w) \leq L(\delta) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = d(z,u) + d(u,w)$.

5.5. Θεώρημα. *Εστωσαν z, $w \in \mathbb{H}^2$ με $z \neq w$ και z^*, $w^* \in \hat{\mathbb{R}}$ τα άκρα στο άπειρο της μοναδικής υπερβολικής ευθείας l που διέρχεται από τα z, w, ώστε το z να βρίσκεται μεταξύ των z^* και w. Τότε $d(z,w) = \log[z, z^*; w, w^*]$.*

Απόδειξη. Από την πρόταση 4.6 υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(l) = \{iy : y > 0\}$. Συνθέτοντας εν ανάγκη την f από αριστερά με την $f_1(u) = \lambda u$, για κατάλληλο $\lambda > 0$ ή και με την $f_2(u) = -\dfrac{1}{u}$, μπορούμε να την επιλέξουμε έτσι ώστε επιπλέον $f(z^*) = 0$, $f(w^*) = \infty$ και $f(z) = i$, οπότε $f(w) = \beta i$ για κάποιο $\beta > 1$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 5.2 έχουμε τότε $d(z,w) = d(i, \beta i) = \log \beta$. Ομως

$$\beta = \lim_{u \to \infty} \frac{i-u}{i} \cdot \frac{\beta i}{\beta i - u} = [i, 0; \beta i, \infty] = [f^{-1}(i), f^{-1}(0); f^{-1}(\beta i), f^{-1}(\infty)] = [z, z^*; w, w^*].$$

Από τα προηγούμενα έχουμε τώρα το ακόλουθο.

5.6. Πόρισμα. *Κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$ είναι υπερβολική ισομετρία, δηλαδή $d(f(z), f(w)) = d(z,w)$ για κάθε z, $w \in \mathbb{H}^2$.*

Ενας ακόμα χρήσιμος τύπος για την υπερβολική απόσταση είναι ο ακόλουθος.

5.7. Πρόταση. *Για κάθε z, $w \in \mathbb{H}^2$ ισχύει*

$$\sinh(\frac{1}{2}d(z,w)) = \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im} z)^{1/2}(\mathrm{Im} w)^{1/2}}.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχήν παρατηρούμε οτι οι ποσότητες και των δύο μελών είναι αναλλοίωτες από την ομάδα μετασχηματισμών $I^+(\mathbb{H}^2)$. Το αναλλοίωτο του αριστερού μέλους είναι το πόρισμα 5.6. Οσο αφορά το δεξιό μέλος, για κάθε $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ έχουμε

$$|f(z) - f(w)| = |z-w| \left(\frac{\mathrm{Im} f(z)}{\mathrm{Im} z} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mathrm{Im} f(w)}{\mathrm{Im} w} \right)^{1/2}.$$

και συνεπώς το δεξιό μέλος είναι αναλλοίωτο. Επιλέγοντας τώρα έναν f που απεικονίζει το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z, w στο υπερβολικκό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $i\alpha$, $i\beta$ για κάποια $0 < \alpha < \beta$ έχουμε από το παράδειγμα 5.2

$$\sinh(\frac{1}{2}d(z,w)) = \sinh(\frac{1}{2}d(i\alpha, i\beta)) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = \frac{|i\alpha - i\beta|}{2(\mathrm{Im} i\alpha)^{1/2}(\mathrm{Im} i\beta)^{1/2}}$$

$$= \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im} z)^{1/2}(\mathrm{Im} w)^{1/2}}.$$

5.8. Πόρισμα. *Ενα υποσύνολο του $\mathbb{H}^2$ είναι d-ανοιχτό τότε και μόνον τότε όταν είναι ανοιχτό ως προς την ευκλείδεια απόσταση.*

Απόδειξη. Για κάθε $\epsilon > 0$ και $z \in \mathbb{H}^2$ η ανοιχτή d-μπάλλα ακτίνας ϵ και κέντρου z είναι το σύνολο

$$S_d(z,\epsilon) = \{w \in \mathbb{H}^2 : d(z,w) < \epsilon\} = \{w \in \mathbb{H}^2 : \frac{|z-w|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2}(\mathrm{Im}w)^{1/2}} < \sinh(\frac{\epsilon}{2})\},$$

από την πρόταση 5.7, που είναι προφανώς ανοιχτό ως προς την ευκλείδεια απόσταση. Αυτό δείχνει οτι κάθε d-ανοιχτό σύνολο είναι ανοιχτό και ως προς την ευκλείδεια απόσταση. Αντίστροφα, για κάθε $\delta > 0$ και $z \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε $S_d(z,\epsilon) \subset S(z,\delta)$. Πράγματι, αν το $0 < \epsilon < 1$ είναι τέτοιο ώστε $2(\mathrm{Im}z)^{1/2}(e^{\epsilon + \log \mathrm{Im}z})^{1/2}\sinh(\epsilon/2) < \delta$, τότε για κάθε $w \in S_d(z,\epsilon)$ έχουμε $|z-w| < 2\sinh(\epsilon/2)(\mathrm{Im}z)^{1/2}(\mathrm{Im}w)^{1/2} < \delta$, γιατί αν $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{H}^2$ είναι μία παραμέτρηση του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος με άκρα z, w έχουμε

$$\epsilon > d(z,w) = L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)}dt \geq \int_\alpha^\beta \frac{|(\mathrm{Im}\gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}\gamma(t)}dt \geq |\log(\frac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Im}w})|$$

και συνεπώς $\mathrm{Im}w < e^{\epsilon + \log \mathrm{Im}z}$.

6. Οι υπερβολικές ισομετρίες

Εστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Μία ισομετρία του (X,d) είναι μία απεικόνιση $f : X \to X$ επί που διατηρεί την απόσταση d, δηλαδή $d(f(x),f(y)) = d(x,y)$ για κάθε x, $y \in X$. Είναι φανερό οτι κάθε ισομετρία είναι ομοιομορφισμός. Επιπλέον το σύνολο των ισομετριών του (X,d) είναι μία ομάδα μετασχηματισμών που συμβολίζουμε με $I_d(X)$.

6.1. Παράδειγμα. Στο $\mathbb{C}$ η $d(z,w) = |z-w|$ είναι η ευκλείδεια απόσταση, για την οποία μπορεί να αποδειχθεί οτι $I_d(\mathbb{C}) = E$.

Στην παράγραφο αυτήν θα αποδείξουμε οτι κάτι ανάλογο ισχύει και στην υπερβολική γεωμετρία. Κατ΄ αρχήν από το πόρισμα 5.6 έχουμε οτι η $I(\mathbb{H}^2)$ είναι υποομάδα της $I_d(\mathbb{H}^2)$, όπου d είναι η υπερβολική απόσταση. Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρειαστούμε την ακόλουθη βοηθητική πρόταση που έχει και αυτόνομο ενδιαφέρον.

6.2. Πρόταση. *Εστωσαν z, u, $w \in \mathbb{H}^2$ τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(ι) $d(z,w) = d(z,u) + d(u,w)$.

(ιι) Το u βρίσκεται πάνω στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z, w.

Απόδειξη. Υπάρχει $f_1 \in I^+(\mathbb{H}^2)$ που απεικονίζει την υπερβολική ευθεία l που διέρχεται από τα z, w στην $I = \{iy : y > 0\}$. Τότε $f_1(z) = \mu i$ και $f_1(w) = \lambda i$, για κάποια λ, $\mu > 0$. Αν $f_2 \in I^+(\mathbb{H}^2)$ είναι αυτή με τύπο $f_2(v) = \frac{1}{\mu}v$, τότε $f_2(I) = I$ και συνεπώς $(f_2 \circ f_1)(l) = I$, ενώ $(f_2 \circ f_1)(z) = i$ και $(f_2 \circ f_1)(w) = \frac{\lambda}{\mu}i$. Αν $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, θεωρούμε την $f_3(v) = -\frac{1}{v}$, οπότε $f_3(I) = I$, ενώ $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) = i$ και $(f_3 \circ f_2 \circ f_1)(w) = \frac{\lambda}{\mu}i$. Ετσι υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$, ώστε $f(l) = I$, $f(z) = i$ και $f(w) = ai$ για κάποιο $a > 1$. Εστω τώρα οτι $u \in l$ μεταξύ των z, w. Τότε το $f(u) \in I$ βρίσκεται μεταξύ των i, ai. Δηλαδή, $f(u) = bi$ για κάποιο $1 \leq b \leq a$ και $d(z,u) = d(i,bi) = \log b$, ενώ

$$d(u,w) = d(bi,ai) = \log a - \log b = d(i,ai) - d(z,u) = d(z,w) - d(z,u).$$

Αυτό δείχνει οτι το (ι) είναι συνέπεια του (ιι). Για το αντίστροφο, έστω οτι ισχύει το (ι) και έστω οτι $f(u) = c + bi \in \mathbb{H}^2$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$. Θα υποθέσουμε οτι το u δεν βρίσκεται στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z, w και θα δείξουμε οτι οδηγούμαστε σε άτοπο. Αν $f(u) \in I$, τότε $c = 0$, δηλαδή $f(u) = bi$ και $0 < b < 1$ ή $a < b$. Αν $0 < b < 1$, τότε $d(z,u) = d(i,bi) = -\log b$, ενώ

$$d(u,w) = d(ai,bi) = \log a - \log b = d(i,ai) + d(z,u) = d(z,w) + d(z,u).$$

Κατά συνέπεια

$$d(z,u) + d(u,w) = d(z,w) = d(u,w) - d(z,u),$$

δηλαδή $d(z,u) = 0$, αντίφαση. Εστω τώρα οτι $b > a$. Τότε $d(z,u) = \log b$ και $d(u,w) = d(z,u) - d(z,w)$, οπότε όπως προηγουμένως βρίσκουμε $d(u,w) = 0$, αντίφαση. Εστω τώρα οτι $c \neq 0$, δηλαδή $f(u) \notin I$. Τότε $d(z,u) = d(i, c+bi) > d(i,bi)$ και $d(u,w) = d(ai, c+bi) > d(ai,bi)$. Αν $1 \leq b \leq a$, τότε

$$d(z,w) = d(i,ai) = d(a,bi) + d(bi,ai) < d(z,u) + d(u,w)$$

που είναι αντίφαση. Αν $b \notin [1,a]$, τότε πάλι έχουμε δύο περιπτώσεις. Αν $0 < b < 1$, έχουμε σύμφωνα με τους προηγούμενους υπολογισμούς

$$d(z,w) = d(i,ai) = d(ai,bi) - d(i,bi) \leq d(ai,bi) + d(i,bi) < d(z,u) + d(u,w),$$

αντίφαση. Αν $b > a$, τότε

$$d(z,w) = d(i,ai) = d(i,bi) - d(ai,bi) \leq d(i,bi) + d(ai,bi) < d(z,u) + d(u,w).$$

Ετσι σε κάθε περίπτωση φθάνουμε σε αντίφαση.

6.3. Πόρισμα. *Εστωσαν z, $w \in \mathbb{H}^2$ με $z \neq w$. Τότε κάθε $f \in I_d(\mathbb{H}^2)$ απεικονίζει το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα z, w στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $f(z)$, $f(w)$.*

Απόδειξη. Εστω u ένα σημείο του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος με άκρα z, w. Από την πρόταση 6.2 έχουμε

$$d(f(z), f(w)) = d(z,w) = d(z,u) + d(u,w) = d(f(z), f(u)) + d(f(u), f(w))$$

και συνεπώς το $f(u)$ βρίσκεται πάνω στο υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $f(z)$, $f(w)$.

6.4. Θεώρημα. $I_d(\mathbb{H}^2) = I(\mathbb{H}^2)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε οτι κάθε $f \in I_d(\mathbb{H}^2)$ είναι στην $I(\mathbb{H}^2)$. Το $I = \{iy : y > 0\}$ είναι υπερβολική ευθεία και το $f(I)$ είναι επίσης υπερβολική ευθεία, από το πόρισμα 6.3.

Οπως στην αρχή της απόδειξης της πρότασης 6.2, υπάρχει $g \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $(g \circ f)(i) = i$, $(g \circ f)(\{iy : y > 1\}) = \{iy : y > 1\}$ και $(g \circ f)(\{iy : 0 < y < 1\}) = \{iy : 0 < y < 1\}$. Τότε

$$d(z, (g \circ f)(z)) = |d(z, i) - d(i, (g \circ f)(z))| = 0,$$

για κάθε $z \in I$. Αρα $(g \circ f)(z) = z$ για κάθε $z \in I$. Εστω τώρα $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ και $(g \circ f)(z) = r + is$. Τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε $d(z, it) = d((g \circ f)(z), (g \circ f)(it)) = d(r + is, it)$. Από την πρόταση 5.7 προκύπτει οτι

$$\frac{|x + iy - it|^2}{4yt} = \frac{|r + is - it|^2}{4st}$$

και κατά συνέπεια

$$\frac{1}{t^2}[x^2 + (y-t)^2]s = \frac{1}{t^2}[r^2 + (s-t)^2]y$$

για κάθε $t > 0$. Παίρνοντας τα όρια για $t \to +\infty$ προκύπτει οτι $s = y$ και κατά συνέπεια $x^2 = r^2$. Αυτό σημαίνει οτι $(g \circ f)(z) = z$ ή $-\bar{z}$ για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$. Αφού η $g \circ f$ είναι συνεχής και τα $\{z \in \mathbb{H}^2 : \mathrm{Re}z < 0\}$, $\{z \in \mathbb{H}^2 : \mathrm{Re}z > 0\}$ συνεκτικά, πρέπει $g \circ f = id$ ή $g \circ f = \tau$, όπου η $\tau \in I(\mathbb{H}^2)$ έχει τύπο $\tau(z) = -\bar{z}$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $f = g^{-1} \in I^+(\mathbb{H}^2)$, ενώ στην δεύτερη $f = g^{-1} \circ \tau \in I^+(\mathbb{H}^2) \circ \tau \subset I(\mathbb{H}^2)$.

7. Τα αξιώματα του Ευκλείδη στην υπερβολική γεωμετρία

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε ποιά από τα αξιώματα του Ευκλείδη ισχύουν στην υπερβολική γεωμετρία και με ποιά μορφή. Σύμφωνα με την πρόταση 4.7, από δύο διαφορετικά σημεία του υπερβολικού επιπέδου διέρχεται μία μοναδική υπερβολική ευθεία. Ετσι το 1ο αίτημα του Ευκλείδη ισχύει και στην υπερβολική γεωμετρία. Από το παράδειγμα 5.2 και την πρόταση 4.6 προκύπτει οτι κάθε υπερβολική ευθεία έχει άπειρο μήκος και προς τις δύο κατευθύνσεις της. Συνεπώς το 2ο αίτημα του Ευκλείδη έχει ισχύ στην υπερβολική γεωμετρία.

Για το 3ο αίτημα θα χρειαστεί πρώτα να περιγράψουμε τους υπερβολικούς κύκλους. Εστω $z \in \mathbb{H}^2$ και $s > 0$. Το σύνολο $C(z, s) = \{w \in \mathbb{H}^2 : d(z, w) = s\}$ λέγεται υπερβολικός κύκλος με κέντρο z και ακτίνα s. Αν $z = i$ και $r = \sinh(s/2)$, από την πρόταση 5.7 έχουμε

$$C(i, s) = \{z \in \mathbb{H}^2 : \frac{|z - i|}{2(\mathrm{Im}z)^{1/2}} = r\}.$$

Αν $z = x + iy$, έχουμε $z \in C(i, s)$ τότε και μόνον τότε όταν $x^2 + (y-1)^2 = 4r^2 y$ ή ισοδύναμα

$$x^2 + [y - (2r^2 + 1)]^2 = 4r^2(r^2 + 1).$$

Δηλαδή, ο υπερβολικός κύκλος $C(i, s)$ είναι ένας ευκλείδειος κύκλος με κέντρο $i(2r^2 + 1)$ και ακτίνα $2r(r^2 + 1)^{1/2}$. Αφού για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ υπάρχει $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ ώστε $f(z) = i$ και ο f απεικονίζει ευκλείδειους κύκλους σε ευκλείδειους κύκλους, ενώ είναι και υπερβολική ισομετρία, προκύπτει οτι κάθε υπερβολικός κύκλος είναι ευκλείδειος κύκλος ως σύνολο, αλλά με άλλο κέντρο και άλλη ακτίνα. Αυτό σημαίνει οτι το 3ο αίτημα του ευκλείδη ισχύει και στην υπερβολική γεωμετρία.

Θεωρώντας την ίδια έννοια γωνίας για την υπερβολική γεωμετρία όπως και στην ευκλείδεια, όλες οι ορθές γωνίες στο υπερβολικό επίπεδο είναι ίσες, αφού οι υπερβολικές ισομετρίες διατηρούν τις γωνίες. Ετσι ισχύει και το 4ο αίτημα του Ευκλείδη.

Δύο υπερβολικές ευθείες l_1, l_2 λέγονται παράλληλες αν $l_1 \cap l_2 = \varnothing$. Εστω l μία υπερβολική ευθεία και $z \in \mathbb{H}^2$, $z \notin l$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Εστω οτι η l είναι ευκλείδεια ημιευθεία κάθετη στο $\mathbb{R}$. Τότε η ευκλείδεια ημιευθεία που είναι κάθετη στο $\mathbb{R}$ και διέρχεται από το z είναι υπερβολική ευθεία παράλληλη προς την l. Εστω $x \in \mathbb{R}$ με $y < x < \mathrm{Re} z$, όπου y είναι το ασυμπτωτικό άκρο της l επί του $\mathbb{R}$. Υπάρχει ένας μοναδικός ευκλείδειος κύκλος C που διέρχεται από τα x, z και είναι κάθετος στο $\mathbb{R}$. Το $C \cap \mathbb{H}^2$ είναι υπερβολική ευθεία που διέρχεται από το z και είναι παράλληλη προς την l. Αυτό δείχνει οτι υπάρχουν υπεραριθμήσιμες στο πλήθος παράλληλες προς την l που διέρχονται από το z.

Εστω οτι η l είναι το άνω ημικύκλιο ευκλείδειου κύκλου κάθετου στο $\mathbb{R}$. Εστω $x_0 \in \mathbb{R}$ το κέντρο αυτού του ευκλείδειου κύκλου. Εστω K ο ευκλείδειος κύκλος με κέντρο x_0 που διέρχεται από το z. Το $K \cap \mathbb{H}^2$ είναι υπερβολική ευθεία παράλληλη της l. Αν $x \in \mathbb{R}$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο μεταξύ των ευκλειδείων κύκλων K, l, τότε υπάρχει ένας μοναδικός ευκλείδειος κύκλος C που διέρχεται από τα x, z. Το $C \cap \mathbb{H}^2$ είναι υπερβολική ευθεία παράλληλη της l. Ετσι και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν υπεραριθμήσιμες στο πλήθος υπερβολικές ευθείες παράλληλες της l που διέρχονται από το z.

Τα προηγούμενα δείχνουν οτι το 5ο αίτημα του Ευκλείδη δεν ισχύει στην υπερβολική γεωμετρία, αλλά ισχύει το ακόλουθο.

7.1. Θεώρημα. *Για κάθε υπερβολική ευθεία l και $z \in \mathbb{H}^2$ με $z \notin l$ υπάρχουν υπεραριθμήσιμες στο πλήθος υπερβολικές ευθείες παράλληλες της l που διέρχονται από το z.*

Μία ιδιαιτερότητα που έχει το υπερβολικό επίπεδο σε σχέση με το ευκλείδειο είναι το ιδεώδες σύνορο, που είναι εξ ορισμού το σύνολο $\partial\mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}}$. Τα σημεία του ιδεώδους συνόρου λέγονται σημεία στο άπειρο. Κάθε υπερβολική ευθεία έχει ακριβώς δύο σημεία στο άπειρο. Αντίστροφα, δύο διαφορετικά σημεία στο άπειρο ορίζουν ακριβώς μία υπερβολική ευθεία της οποίας είναι τα σημεία στο άπειρο. Στο υπερβολικό επίπεδο έχουμε δύο περιπτώσεις παραλλήλων ευθειών. Δύο παράλληλες υπερβολικές ευθείες l_1, l_2 είτε έχουν ένα κοινό σημείο στο άπειρο είτε δεν έχουν κανένα. Αν δεν έχουν κανένα λέγονται υπερπαράλληλες.

8. Το υπερβολικό εμβαδόν και ο τύπος των Gauss-Bonnet

Το υπερβολικό εμβαδόν ενός συνόλου $X \subset \mathbb{H}^2$ είναι το

$$\mu(X) = \int_X \frac{1}{y^2} dxdy,$$

αν το ολοκλήρωμα υπάρχει. Θυμίζουμε οτι η ύπαρξη του ολοκληρώματος εξαρτάται από το X. Ετσι το υπερβολικό εμβαδόν δεν υπάρχει για όλα τα υποσύνολα του υπερβολικού επιπέδου.

8.1. Πρόταση. *Το υπερβολικό εμβαδόν είναι αναλλοίωτο από τις υπερβολικές ισομετρίες. Δηλαδή, για κάθε $X \subset \mathbb{H}^2$, του οποίου το υπερβολικό εμβαδόν υπάρχει και κάθε $f \in I(\mathbb{H}^2)$ ισχύει $\mu(X) = \mu(f(X))$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι συνέπεια του τύπου αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση. Εστω πρώτα οτι $f = \tau$, όπου $\tau(z) = -\bar{z}$. Αν $z = x+iy$, τότε $\tau(x,y) = (-x,y)$ και συνεπώς

$$D\tau(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αρα

$$\mu(\tau(X)) = \int_{\tau(X)} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_X \frac{1}{y^2} \cdot |\det D\tau(x,y)| dxdy = \mu(X).$$

Εστω τώρα οτι $f \in I^+(\mathbb{H}^2)$ με τύπο

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ όπου } a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1.$$

Τότε όπως ξέρουμε

$$\mathrm{Im} f(z) = \frac{1}{|cz+d|^2} \cdot \mathrm{Im} z$$

και

$$f(x,y) = \left(\frac{acx^2+acy^2+bd+bcx+adx}{(cx+d)^2+c^2y^2}, \frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}\right).$$

Αρα

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{(cx+d)^2-c^2y^2}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} & \dfrac{2cy(cx+d)}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} \\ \dfrac{-2cy(cx+d)}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} & \dfrac{(cx+d)^2-c^2y^2}{[(cx+d)^2+c^2y^2]^2} \end{pmatrix}$$

και συνεπώς

$$\det Df(x,y) = \frac{1}{|cz+d|^4}, \text{ όπου } z = x+iy.$$

Ετσι από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση έχουμε

$$\mu(f(X)) = \int_{f(X)} \frac{1}{y^2} dxdy = \int_X \frac{1}{\dfrac{y^2}{[(cx+y)^2+y^2]^2}} \cdot \frac{1}{[(cx+y)^2+y^2]^2} dxdy = \mu(X).$$

Ενα υπερβολικό n-γωνο, $n \geq 3$, είναι ένα κλειστό υποσύνολο P του $\mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$, που φράσσεται από n υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα, που λέγονται πλευρές. Τα σημεία τομής των πλευρών λέγονται κορυφές. Επιτρέπουμε κάποιες από τις κορυφές να βρίσκονται στο $\partial\mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}}$. Τέτοιες κορυφές αποκαλούνται ιδεώδεις κορυφές και βέβαια δεν ανήκουν στο $P \cap \mathbb{H}^2$. Πάντα όμως έχουμε $\mathrm{int}P \subset \mathbb{H}^2$. Αν το P δεν έχει καμμία ιδεώδη κορυφή, είναι κλειστό και φραγμένο, δηλαδή συμπαγές.

8.2. Πρόταση. *Εστω Δ ένα υπερβολικό τρίγωνο με μία μόνον ιδεώδη κορυφή. Αν $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$ είναι οι εσωτερικές γωνίες στις δύο άλλες κορυφές, τότε*

$$\mu(\Delta) = \pi - \alpha - \beta.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο στοιχείο της $I^+(\mathbb{H}^2)$ μπορούμε να μετασχηματίσουμε το τρίγωνο, ώστε η ιδεώδης κορυφή του να είναι η ∞, οπότε οι δύο πλευρές που τέμνονται σ' αυτήν είναι τμήματα ευκλειδείων ευθειών κάθετων στο $\hat{\mathbb{R}}$. Μετασχηματίζοντας στην συνέχεια το τρίγωνο με στοιχεία της $I^+(\mathbb{H}^2)$ της μορφής $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$ και $g(z) = \lambda z$, $\lambda > 0$, το φέρνουμε σε θέση ώστε η τρίτη πλευρά να περιέχεται στο ευκλείδειο ημικύκλιο με κέντρο το $0 \in \mathbb{R}$ και ακτίνα 1. Το υπερβολικό εμβαδόν και οι γωνίες παραμένουν αναλλοίωτα από τους μετασχηματισμούς αυτούς, από την πρόταση 8.1 και το θεώρημα 3.10. Εχουμε τώρα

$$\mu(\Delta) = \int_\Delta \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \right) dx = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos\beta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Θέτοντας $x = \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$, βρίσκουμε

$$\mu(\Delta) = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta.$$

8.3. Θεώρημα. *Εστω* $\Delta \subset \mathbb{H}^2$ *ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με εσωτερικές γωνίες* α, β, γ. *Το υπερβολικό εμβαδόν του* Δ *είναι*

$$\mu(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

Απόδειξη. Μετασχηματίζοντας το τρίγωνο με κατάλληλα στοιχεία της $I^+(\mathbb{H}^2)$ παίρνουμε ένα ισοδύναμο τρίγωνο του οποίου καμμία πλευρά δεν είναι μέρος ευκλείδειας ευθείας κάθετης στο $\hat{\mathbb{R}}$. Οπως πάντα το εμβαδόν και οι γωνίες δεν αλλάζουν. Εστωσαν A, B, Γ οι κορυφές με αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες α, β, γ. Προεκτείνοντας την πλευρά AB προς την κατεύθυνση του B, η υπερβολική ευθεία, μέρος της οποίας είναι η AB, έχει ένα σημείο B' στο άπειρο. Το υπερβολικό τρίγωνο Δ_1 με κορυφές A, B', Γ έχει μόνον μία ιδεώδη κορυφή, την B' και το ίδιο ισχύει για το υπερβολικό τρίγωνο Δ_2 με κορυφές B, B', Γ. Αν ϕ είναι η εσωτερική γωνία του τριγώνου Δ_2 στην κορυφή Γ, έχουμε

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta_1) - \mu(\Delta_2) = [\pi - \alpha + \gamma + \phi)] - [\pi - (\phi + \pi - \beta)] = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

8.4. Πόρισμα. *Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός υπερβολικού τριγώνου είναι μικρότερο από* π *και η διαφορά είναι το υπερβολικό εμβαδόν του τριγώνου.*

9. Το μοντέλο του δίσκου του Poincaré

Στην παράγραφο αυτήν θα περιγράψουμε ένα εναλλακτικό μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας στον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Ο $\phi \in \mathcal{M}^+$ με τύπο

$$\phi(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

λέγεται μετασχηματισμός του Cayley και $\phi(\mathbb{H}^2) = \mathbb{D}^2$, γιατί αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$, έχουμε $|\phi(z)| < 1$ τότε και μόνον τότε όταν

$$\frac{x^2 + (y-1)^2}{x^2 + (y+1)^2} < 1,$$

δηλαδή $y > 0$. Ο αντίστροφος έχει τύπο

$$\phi^{-1}(z) = \frac{-iz + 1}{z - i}.$$

Το σύνολο

$$I(\mathbb{D}^2) = \{g \in \mathcal{M} : g(\mathbb{D}^2) = \mathbb{D}^2\} = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in I(\mathbb{H}^2)\}$$

είναι ομάδα μετασχηματισμών του $\mathbb{D}^2$ και το ζεύγος $(I(\mathbb{D}^2), \mathbb{D}^2)$ είναι μία γεωμετρία ισόμορφη με την $(I(\mathbb{H}^2), \mathbb{H}^2)$. Με άλλα λόγια, η $(I(\mathbb{D}^2), \mathbb{D}^2)$ είναι ένα δεύτερο μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας. Θέτουμε $I^+(\mathbb{D}^2) = \{\phi \circ f \circ \phi^{-1} : f \in I^+(\mathbb{H}^2)\}$. Τότε $I(\mathbb{D}^2) = I^+(\mathbb{D}^2) \cup I^+(\mathbb{D}^2) \circ \tau$, αφού $\phi \circ \tau \circ \phi^{-1} = \tau$ στην $\hat{\mathbb{C}}$. Κάθε στοιχείο της $I^+(\mathbb{D}^2)$ είναι της μορφής $g = \phi \circ f \circ \phi^{-1}$, όπου

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ με } a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1.$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε οτι ο τύπος του g είναι

$$g(z) = \phi(f(\phi^{-1}(z))) = \frac{[a+d+i(b-c)]z + [b+c+i(a-d)]}{[b+c-i(a-d)]z + [a+d-i(b-c)]}.$$

Θέτοντας τώρα

$$A = \frac{1}{2}[a+d+i(b-c)] \text{ και } B = \frac{1}{2}[b+c+i(a-d)]$$

παίρνουμε τον τύπο

$$g(z) = \frac{Az+B}{\bar{B}z+\bar{A}}, \text{ όπου } |A|^2 - |B|^2 = 1.$$

Ομοια αν $g \in I^+(\mathbb{D}^2) \circ \tau$, τότε

$$g(z) = \frac{A\bar{z}-B}{\bar{B}\bar{z}-\bar{A}}, \text{ όπου } |A|^2 - |B|^2 = 1.$$

Αν $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{D}^2$ είναι μία κατά τμήματα C^1 καμπύλη, ορίζουμε ως υπερβολικό μήκος της γ το $L(\gamma) = L(\phi^{-1} \circ \gamma)$. Αφού

$$(\phi^{-1})'(z) = \frac{-2}{(z-i)^2},$$

από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$(\phi^{-1} \circ \gamma)'(t) = \frac{-2}{(\gamma(t)-i)^2} \cdot \gamma'(t).$$

Απ' την άλλη μεριά, για κάθε $z \in \mathbb{D}^2$ έχουμε

$$\mathrm{Im}\phi^{-1}(z) = -\frac{i}{2} \cdot \left(\frac{-iz+1}{z-i} - \frac{i\bar{z}+1}{\overline{z-i}} \right) = \frac{1-|z|^2}{|z-i|^2}.$$

Ετσι το υπερβολικό μήκος στο μοντέλο του δίσκου δίνεται από τον τύπο

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \frac{|(\phi^{-1} \circ \gamma)'(t)|}{\mathrm{Im}(\phi^{-1} \circ \gamma)(t)} dt = \int_\alpha^\beta \frac{\frac{2}{|\gamma(t)-i|^2} \cdot |\gamma'(t)|}{\frac{1-|\gamma(t)|^2}{|\gamma(t)-i|^2}} dt = \int_\alpha^\beta \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt.$$

Οπως στο $\mathbb{H}^2$ ορίζουμε την υπερβολική απόσταση στον $\mathbb{D}^2$ ως

$$\rho(z,w) = \inf\{L(\gamma) | \gamma \text{ είναι κατά τμήματα } C^1 \text{ καμπύλη από το } z \text{ στο } w\}.$$

Το ζεύγος $(\mathbb{D}^2, \rho)$ γίνεται έτσι μετρικός χώρος και η $\phi : (\mathbb{H}^2, d) \to (\mathbb{D}^2, \rho)$ ισομετρία μετρικών χώρων. Επίσης $I_\rho(\mathbb{D}^2) = I(\mathbb{D}^2)$.

Οπως έχουμε αποδείξει, οι υπερβολικές ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ έχουν ανάμεσα στις κατά τμήματα C^1 καμπύλες το ελάχιστο υπερβολικό μήκος. Ο ϕ ως μετασχηματισμός Möbius απεικονίζει τις υπερβολικές ευθείες στο $\mathbb{H}^2$ σε τμήματα κύκλων της $\hat{\mathbb{C}}$ μέσα στον $\mathbb{D}^2$, που είναι κάθετοι στον μοναδιαίο κύκλο $S^1 = \partial\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Το $\partial\mathbb{H}^2 = \hat{\mathbb{R}}$ απεικονίζεται στον S^1, που είναι το ιδεώδες σύνορο του $\mathbb{D}^2$. Οι υπερβολικές ευθείες στον $\mathbb{D}^2$ έχουν βέβαια το ελάχιστο υπερβολικό μήκος.

9.1. Παράδειγμα. Οι υπερβολικές ευθείες στον $\mathbb{D}^2$ που διέρχονται από το 0 είναι οι ευκλείδειες διάμετροι του $\mathbb{D}^2$, γιατί $\phi(i) = 0$ και οι κύκλοι της $\hat{\mathbb{C}}$ που διέρχονται από το 0 και είναι κάθετοι στον S^1 είναι ευκλείδειες ευθείες (με το ∞). Εστω $z \in \mathbb{D}^2$ και $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}^2$ η παραμέτρηση του υπερβολικού ευθύγραμμου τμήματος από το 0 στο z με τύπο $\gamma(t) = t|z|$. Τότε

$$\rho(0,z) = \int_0^{|z|} \frac{2}{1-t^2} dt = \log\left(\frac{1+|z|}{1-|z|}\right).$$

Αν επιλύσουμε ως προς $|z|$ βρίσκουμε και $|z| = \tanh(\frac{1}{2}\rho(0,z))$.

Το γεγονός οτι οι υπερβολικές ευθείες του $\mathbb{D}^2$ που διέρχονται από το 0 είναι οι ευκλείδειες διάμετροι του $\mathbb{D}^2$, σε συνδυασμό με το γεγονός οτι η $I(\mathbb{D}^2)$ έχει όλες τις ιδιότητες που έχει η $I(\mathbb{H}^2)$, βοηθάει κάποιες φορές να συγκρίνουμε υπερβολικές με ευκλείδειες αποστάσεις. Ο ανάλογος τύπος της πρότασης 5.7 είναι ο ακόλουθος.

9.2. Πρόταση. *Για κάθε* z, $w \in \mathbb{D}^2$ *ισχύει*

$$\sinh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w)) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}.$$

Απόδειξη. Η διαδικασία της απόδειξης είναι όμοια με της πρότασης 5.7. Κατ' αρχήν παρατηρούμε οτι για κάθε $g \in I^+(\mathbb{D}^2)$ ισχύει $(g(z) - g(w))^2 = g'(z)g'(w)(z-w)^2$ για κάθε z, $w \in \mathbb{D}^2$. Πράγματι, αν ο τύπος της g είναι

$$g(z) = \frac{Az+B}{\bar{B}z+\bar{A}}, |A|^2 - |B|^2 = 1,$$

τότε

$$g'(z)=\frac{1}{(\bar{B}z+\bar{A})^2}$$

και κατά συνέπεια

$$(g(z)-g(w))^2=\frac{(z-w)^2}{(\bar{B}z+\bar{A})^2(\bar{B}w+\bar{A})^2}=g'(z)g'(w)(z-w)^2.$$

Τα δύο μέλη της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε είναι αναλλοίωτα από την ομάδα μετασχηματισμών $I^+(\mathbb{D}^2)$. Το αριστερό μέλος προφανώς είναι. Οσο αφορά το δεξιό μέλος, για κάθε $g\in I^+(\mathbb{H}^2)$ έχουμε

$$1-|g(z)|^2=1-\frac{Az+B}{\bar{B}z+\bar{A}}\cdot\frac{\bar{A}\bar{z}+\bar{B}}{B\bar{z}+A}=|g'(z)|(1-|z|^2)$$

και συνεπώς

$$\frac{|g(z)-g(w)|^2}{(1-|g(z)|^2)(1-|g(w)|^2)}=\frac{|g'(z)||g'(w)||z-w|^2}{|g'(z)|(1-|z|^2)|g'(w)|(1-|w|^2)}=\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}.$$

Επιλέγουμε τώρα $g\in I^+(\mathbb{D}^2)$, ώστε $g(z)=0$, που υπάρχει από την πρόταση 4.4, οπότε

$$\frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}=\frac{|g(w)|^2}{1-|g(w)|^2}=\frac{\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(g(z),g(w)))}{1-\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(g(z),g(w)))}$$

$$=\frac{\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w))}{1-\tanh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w))}=\sinh^2(\frac{1}{2}\rho(z,w)).$$

Οπως το υπερβολικό μήκος, έτσι και το υπερβολικό εμβαδόν μεταφέρεται από το μοντέλο του $\mathbb{H}^2$ στο μοντέλο του $\mathbb{D}^2$ μέσω του μετασχηματισμού του Cayley. Ορίζουμε για κάθε $X\subset\mathbb{D}^2$ το υπερβολικό του εμβαδόν ως το $\mu(X)=\mu(\phi^{-1}(X))$, όταν το δεξιό μέλος υπάρχει. Από τον τύπο αλλαγής μεταβλητής κατά την ολοκλήρωση έχουμε

$$\mu(X)=\int_{\phi^{-1}(X)}\frac{1}{y^2}dxdy=\int_X\frac{1}{(\mathrm{Im}\phi^{-1}(z))^2}\cdot|\det D\phi^{-1}(z)|dxdy,$$

όπου $z=x+iy$. Ομως

$$\det D\phi^{-1}(z)=|(\phi^{-1})'(z)|^2=\frac{4}{|z-i|^4},$$

οπότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$\mu(X)=\int_X\frac{1}{\left(\dfrac{1-|z|^2}{|z-i|^2}\right)^2}\cdot\frac{4}{|z-i|^4}dxdy=\int_X\frac{4}{(1-x^2-y^2)^2}dxdy.$$

Αν κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\mu(X)=\int_X\frac{4r}{(1-r^2)^2}drd\theta.$$

Ενα παράδειγμα βολικού υπολογισμού στον $\mathbb{D}^2$ είναι ο τύπος του Lobachevskii για την υπερβολική απόσταση ενός σημείου από μία υπερβολική ευθεία μέσω της γωνίας παραλληλισμού. Εστω $z \in \mathbb{D}^2$ και l μία υπερβολική ευθεία με $z \notin l$. Υπάρχουν ακριβώς δύο υπερβολικές ευθείες που διέρχονται από το z, που είναι παράλληλες της l και έχουν από ένα κοινό σημείο στο άπειρο με την l. Η γωνία θ που σχηματίζει η μία από τις δύο με την κάθετη υπερβολική ευθεία από το z προς την l λέγεται γωνία παραλληλισμού. Αν μία υπερβολική ευθεία διέρχεται από το z και σχηματίζει με την κάθετη από το z προς την l γωνία μεγαλύτερη από θ, τότε είναι υπερπαράλληλη προς την l. Αν w είναι το σημείο τομής της κάθετης υπερβολικής ευθείας από το z προς την l με την l, η απόσταση του z από την l είναι

$$\rho(z,l) = \inf\{\rho(z,z') : z' \in l\} = \rho(z,w).$$

9.3. Θεώρημα. *Εστω l μία υπερβολική ευθεία και z ένα σημείο εκτός αυτής. Αν θ είναι η γωνία παραλληλισμού, τότε*

$$e^{-\rho(z,l)} = \tan(\frac{\theta}{2}).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας ένα κατάλληλο στοιχείο της $I(\mathbb{D}^2)$, μπορούμε να απεικονίσουμε το z στο 0, οπότε αρκεί να αποδείξουμε τον τύπο για το $z=0$, αφού τα στοιχεία της $I(\mathbb{D}^2)$ διατηρούν τις γωνίες. Από το παράδειγμα 9.1 έχουμε τώρα

$$\rho(0,l) = \rho(0,w) = \log\left(\frac{1+|w|}{1-|w|}\right)$$

και

$$|w| = \frac{1}{\cos\theta} - \tan\theta = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}.$$

Κατά συνέπεια

$$e^{-\rho(z,l)} = \frac{1-|w|}{1+|w|} = \frac{\cos\theta + \sin\theta - 1}{\cos\theta - \sin\theta + 1} = \tan(\frac{\theta}{2}).$$

10. Υπερβολική τριγωνομετρία

Οπως στην ευκλείδεια γεωμετρία, έτσι και στην υπερβολική υπάρχουν κάποιες σχέσεις μεταξύ των εσωτερικών γωνιών ενός συμπαγούς υπερβολικού τριγώνου και των πλευρών του. Οι υπολογισμοί των υπερβολικών αποστάσεων που χρειάζεται να κάνουμε είναι πιο απλοί στο μοντέλο του δίσκου.

Εστω Δ ένα συμπαγές υπερβολικό τριγωνο με κορυφές τα σημεία A, B, Γ, αντίστοιχες εσωτερικές γωνίες α, β, γ και υπερβολικά μήκη πλευρών $a = \rho(B, \Gamma)$, $b = \rho(A, \Gamma)$, $c = \rho(A, B)$. Υπάρχει ένα $g \in I^+(\mathbb{D}^2)$ που απεικονίζει το A στο 0 και το B σε κάποιο $r \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}^2$. Το g είναι ένα στοιχείο της $I^+(\mathbb{D}^2)$ που απεικονίζει την υπερβολική ευθεία τμήμα της οποίας είναι η πλευρά c στην υπερβολική ευθεία $\mathbb{R} \cap \mathbb{D}^2$. Εφαρμόζοντας στην ανάγκη και την ανάκλαση $\tau(z) = -\bar{z}$, μπορούμε να απεικονίσουμε το σημείο A στο 0 και το B σε κάποιο $r > 0$. Ετσι κάθε υπερβολικό τρίγωνο στον $\mathbb{D}^2$ είναι ισοδύναμο με ένα υπερβολικό τρίγωνο του οποίου η κορυφή $A = 0$ και συνεπώς οι πλευρές c, b είναι τμήματα ευκλειδείων διαμέτρων του $\mathbb{D}^2$ και $B = r \in \mathbb{R} \cap \mathbb{D}^2$, $r > 0$.

Εστω οτι $\Gamma = se^{i\alpha}$, για κάποιο $0 < s < 1$. Από το παράδειγμα 9.1 έχουμε $r = \tanh(\frac{1}{2}c)$ και $s = \tanh(\frac{1}{2}b)$. Από το ευκλείδειο πυθαγόρειο θεώρημα για το ευκλείδειο τρίγωνο με κορυφές A, B, Γ έχουμε

$$|B - \Gamma| = r^2 + s^2 - 2rs\cos\alpha = \tanh^2(\frac{1}{2}c) + \tanh^2(\frac{1}{2}b) - 2\tanh(\frac{1}{2}c)\tanh(\frac{1}{2}c)\cos\alpha.$$

Από την πρόταση 9.2 έχουμε επίσης

$$|B - \Gamma| = (1 - r^2)(1 - s^2)\sinh^2(\frac{1}{2}a) = \frac{1}{\cosh^2(\frac{1}{2}c)} \cdot \frac{1}{\cosh^2(\frac{1}{2}b)} \cdot \sinh^2(\frac{1}{2}a).$$

Κατά συνέπεια τα δεξιά μέλη των παραπάνω ισοτήτων είνα ίσα. Κάνοντας τις πράξεις βλέπουμε οτι η ισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos\alpha.$$

Εχουμε τώρα το ακόλουθο.

10.1. Θεώρημα. *Εστω Δ ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με μήκη πλευρών a, b, c και αντίστοιχες απέναντι εσωτερικές γωνίες $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Τότε*

(ι) $\dfrac{\sinh a}{\sin\alpha} = \dfrac{\sinh b}{\sin\beta} = \dfrac{\sinh c}{\sin\gamma}$ *(υπερβολικός νόμος των ημιτόνων).*

(ιι) $\cosh a = \cosh b \cdot \cosh c - \sinh b \cdot \sinh c \cdot \cos\alpha$ *(πρώτος υπερβολικός νόμος των συνημιτόνων).*

(ιιι) $\cosh c = \dfrac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$ *(δεύτερος υπερβολικός νόμος των συνημιτόνων).*

Απόδειξη. Το (ιι) μόλις αποδείχθηκε και τα άλλα δύο είναι συνέπειές του. Για το (ι) έχουμε

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin\gamma}\right)^2 = \frac{\sinh^2 c}{1-\cos^2\gamma} = \frac{\sinh^2 c}{1 - \left(\dfrac{\cosh a\cdot\cosh b - \cosh c}{\sinh a \cdot \sinh b}\right)^2} =$$

$$\frac{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b \cdot \sinh^2 c}{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b - \cosh^2 a \cdot \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2\cosh a \cdot \cosh b \cdot \cosh c} =$$

$$\frac{\sinh^2 a \cdot \sinh^2 b \cdot \sinh^2 c}{1 - \cosh^2 a - \cosh^2 b - \cosh^2 c + 2\cosh a \cdot \cosh b \cdot \cosh c}$$

που είναι συμμετρική παράσταση ως προς τα a, b, c. Αφού $\sinh c > 0$ και $\sin\gamma > 0$, έχουμε το συμπέρασμα (ι). Για το (ιιι) θέτουμε για ευκολία $X = \cosh a$, $Y = \cosh b$, $Z = \cosh c$. Από τον πρώτο νόμο των συνημιτόνων, έχουμε

$$\cos\gamma = \frac{XY - Z}{(X^2-1)^{1/2} \cdot (Y^2-1)^{1/2}}$$

και από τον πρώτο νόμο των συνημιτόνων για τις άλλες δύο κορυφές έχουμε

$$\cos\alpha = \frac{YZ - X}{(Y^2-1)^{1/2} \cdot (Z^2-1)^{1/2}} \text{ και } \sin\alpha = \left(\frac{1 + 2XYZ - X^2 - Y^2 - Z^2}{(Y^2-1)\cdot(Z^2-1)}\right)^{1/2},$$

$$\cos\beta = \frac{XZ - Y}{(X^2-1)^{1/2} \cdot (Z^2-1)^{1/2}} \text{ και } \sin\beta = \left(\frac{1 + 2XYZ - X^2 - Y^2 - Z^2}{(X^2-1)\cdot(Z^2-1)}\right)^{1/2}.$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε τώρα

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos\gamma}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{(YZ-X)(XZ-Y) + (XY-Z)(Z^2-1)}{1+2XYZ - X^2 - Y^2 - Z^2} = Z = \cosh c.$$

Το υπερβολικό πυθαγόρειο θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του πρώτου υπερβολικού νόμου των συνημιτόνων και έχει την ακόλουθη μορφή.

9.2. Θεώρημα. *Εστω Δ ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο με εσωτερικές γωνίες α, β, γ και μήκη αντίστοιχων απέναντι πλευρών a, b, c. Αν το Δ είναι ορθογώνιο και $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$, τότε*

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b.$$

Οπως είναι γνωστό, στην ευκλείδεια γεωμετρία δύο τρίγωνα λέγονται όμοια αν έχουν αντίστοιχες γωνίες ίσες και δύο όμοια τρίγωνα δεν είναι πάντα ισοδύναμα. Στην υπερβολική γεωμετρία αν δύο υπερβολικά συμπαγή τρίγωνα έχουν ίσες αντίστοιχες γωνίες έχουν και ίσα μήκη αντίστοιχων απέναντι πλευρών. Αυτό είναι άμεσο από τον δεύτερο υπερβολικό νόμο των συνημιτόνων. Κατά συνέπεια, δύο συμπαγή υπερβολικά τρίγωνα είναι όμοια τότε και μόνον τότε όταν είναι ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχει μία υπερβολική ισομετρία που απεικονίζει το ένα στο άλλο. Ετσι, σε αντίθεση με την ευκλείδεια γεωμετρία, δεν υπάρχει θεωρία ομοιότητας στην υπερβολική γεωμετρία.

Ασκήσεις

1. Εστω a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ και $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ με τύπο

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ όταν } z \neq -\frac{d}{c}$$

και $f(-\frac{d}{c}) = \infty$, $f(\infty) = \frac{a}{c}$. Αν $ad - bc = 0$, δείξτε οτι η f είναι σταθερή στο $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

2. Εστω $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, και $ad - bc = 1$. Εστω οτι $\chi = a + d \in \mathbb{R}$ και $|\chi| \neq 2$.

(α) Δείξτε οτι ο f έχει δύο σταθερά σημεία, που είναι τα

$$z_1 = \frac{1}{2c}(a - d + \sqrt{\chi^2 - 4}) \text{ και } z_2 = \frac{1}{2c}(a - d - \sqrt{\chi^2 - 4}).$$

(β) Αν

$$\lambda = \frac{1}{2}(\chi + \sqrt{\chi^2 - 4}),$$

δείξτε οτι

$$\frac{f(z) - z_1}{f(z) - z_2} = \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$$

για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$.

3. Εστω $f \in \mathcal{M}^+$ με τύπο $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, όπου a, b, c, $d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, και $ad - bc = 1$. Αν $\chi = a + d = 2$, δείξτε οτι ο f έχει μόνον ένα σταθερό σημείο z_0 και για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$ ισχύει

$$\frac{1}{f(z) - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + c.$$

4. Εστω $f_n \in \mathcal{M}^+$, $n \in \mathbb{N}$, για τους οποίους υπάρχουν z_1, z_2, $z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε το $w_j = \lim_{n \to +\infty} f_n(z_j)$ υπάρχει στο $\hat{\mathbb{C}}$ για $j = 1, 2, 3$ και τα w_1, w_2, w_3 είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Δείξτε οτι υπάρχει $f \in \mathcal{M}^+$ ώστε $f(z) = \lim_{n \to +\infty} f_n(z)$ για κάθε $z \in \hat{\mathbb{C}}$ και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\hat{\mathbb{C}} \setminus f^{-1}(\infty)$.

5. Να αποδειχθεί οτι για κάθε z, $w \in \mathbb{H}^2$ ισχύουν οι παρακάτω ισότητες για την υπερβολική απόσταση $d(z, w)$.

(α) $\cosh d(z, w) = 1 + \dfrac{|z - w|^2}{2(\mathrm{Im} z) \cdot (\mathrm{Im} w)}$.

(β) $\cosh(\frac{1}{2} d(z, w)) = \dfrac{|z - \bar{w}|}{2(\mathrm{Im} z)^{1/2} \cdot (\mathrm{Im} w)^{1/2}}$.

(γ) $\tanh(\frac{1}{2} d(z, w)) = \dfrac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}$.

(δ) $d(z, w) = \log \dfrac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}$.

6. Να αποδειχθεί οτι δύο υπερπαράλληλες υπερβολικές ευθείες έχουν μία κοινή κάθετη υπερβολική ευθεία.

7. Δείξτε οτι το υπερβολικό μήκος της περιφέρειας υπερβολικού κύκλου υπερβολικής ακτίνας r είναι ίσο με $2\pi \sinh r$ και το υπερβολικό εμβαδόν του ίσο με $4\pi \sinh^2(\frac{1}{2}r)$.

8. Για κάθε $x > 0$ συμβολίζουμε με $r(x)$ το μήκος της περιφέρειας κύκλου με ακτίνα x. Δείξτε οτι ο νόμος των ημιτόνων στην ευκλείδεια και στην υπερβολική γεωμετρία γράφεται στην ενιαία μορφή

$$\frac{\sin\alpha}{r(a)} = \frac{\sin\beta}{r(b)} = \frac{\sin\gamma}{r(c)}.$$

9. (α) Εστωσαν z, $w \in \mathbb{H}^2$, με $\mathrm{Re}z \neq \mathrm{Re}w$, και l η μοναδική υπερβολική ευθεία που διέρχεται από τα z, w. Αν $a \in \mathbb{R}$ είναι το κέντρο του ευκλείδειου κύκλου, μέρος του οποίου είναι η l και $r > 0$ είναι η ακτίνα του, δείξτε οτι

$$d(z,w) = \left| \log \frac{\dfrac{\mathrm{Im}z}{\mathrm{Re}z - a - r}}{\dfrac{\mathrm{Im}w}{\mathrm{Re}w - a - r}} \right|.$$

(β) Να αποδειχθεί οτι για κάθε υπερβολική ευθεία l υπάρχει μία συνάρτηση $\psi : l \to \mathbb{R}$ ώστε $d(z,w) = |\psi(z) - \psi(w)|$ για κάθε z, $w \in l$.

10. Να αποδειχθεί οτι ένα συμπαγές υπερβολικό τρίγωνο είναι ισόπλευρο τότε και μόνον τότε όταν όλες οι γωνίες του είναι ίσες. Αν a είναι το μήκος της πλευράς του και α είναι η γωνία του, να αποδειχθεί οτι

$$2\cosh(\frac{1}{2}a) \cdot \sin(\frac{1}{2}\alpha) = 1.$$

11. Εστω Δ ένα συμπαγές, ορθογώνιο, υπερβολικό τρίγωνο με γωνίες α, β, $\gamma = \dfrac{\pi}{2}$ και αντίστοιχες απέναντι πλευρές a, b, c. Να αποδειχθεί οτι

(α) $\tanh b = \sinh a \cdot \tan\beta$.
(β) $\sinh b = \sinh c \cdot \sin\beta$.
(γ) $\tan\alpha \cdot \sinh b = \tanh c \cdot \cos\beta$.
(δ) $\cosh a \cdot \sin\beta = \cos\alpha$.
(ε) $\cosh c = \cot\alpha \cdot \cot\beta$.