

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ



ΜΕΜ-233 ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ



Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

@copyright I.D. PLATIS

Πρόλογος

Οἱ ἀνὰ χεῖρας σημειώσεις γράφθηκαν κατὰ τὴ διάρκεια τῶν ἀκαδημαϊκῶν ἐτῶν 2019-20 καὶ 2020-21, ἀπευθύνονται δὲ στοὺς φοιτητὲς καὶ στὶς φοιτήτριες τοῦ Τμήματος Μαθηματικῶν καὶ Ἐφαρμοσμένων Μαθηματικῶν τοῦ Πανεπιστημίου Κρήτης ποὺ ἐπέλεξαν τὸ μάθημα MEM233-Γεωμετρία. Καταβλήθηκε ἰδιαίτερη προσπάθεια ὥστε τὸ κείμενο νὰ εἶναι ἀπαλλαγμένο ἀπὸ τυχὸν λάθη καὶ ἀβλεψίες. Σὲ αὐτὸ συνέβαλαν κάποιοι/ες ἀπὸ τοὺς/τὶς φοιτητὲς/τριες ποὺ διάβασαν τὶς πρῶτες-βιαστικὲς-ἐκδόσεις τοῦ κειμένου, ὅπως αὐτὸ ἀναρτιόταν στὴν ἱστοσελίδα τοῦ μαθήματος, τοὺς/τὶς ὁποίους/ες καὶ εὐχαριστῶ. Δὲν κατέβαλα ἀπὸ τὴν ἄλλη καμμία ἀπολυτῶς προσπάθεια γιὰ νὰ κάνω τὸ κείμενο *εὐπεπτο*, *βατό*, κ.λπ., κατὰ τὰ φροντιστηριακὰ θέσφατα. Ἡ Γεωμετρία εἶναι ἓνας κλάδος πρὸς τὸν ὁποῖον, ὅπως ἔλεγε καὶ ὁ Ἀρχιμήδης, *οὐκ ἐστὶν βασιλικὴ ἀτραπός*. Ἐλπίζω οἱ ἀναγνώστες καὶ οἱ ἀναγνώστριες τῶν σημειώσεων αὐτῶν νὰ σφυρηλατήσουν τὴ σχέση τους μὲ τὴ Γεωμετρία διαμέσου τῆς προσπάθειας ποὺ θὰ καταβάλουν ὥστε νὰ κατακτήσουν αὐτὰ τὰ πρῶτα μυστικά της ποὺ περιέχονται καὶ ἀναλύονται στὸ κείμενο ποὺ ἀκολουθεῖ.

Ἡράκλειο Κρήτης-Γαλαξίδι Φωκίδας
Απρίλιος 2021



Δός μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γὰν κινάσω.
- Ἀρχιμήδης ὁ Συρακόσιος, 288–212 π.Χ.

@copyright I.D. PLATIS

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Προϊστορικοί χρόνοι	1
1.2	Σουμέριοι και Αιγύπτιοι	1
1.3	Έλληνες	9
1.3.1	Αττικοί ή Ηρωδιακοί αριθμοί	9
1.3.2	Θαλής και απαρχές της Γεωμετρίας	10
1.3.3	Πυθαγόρας, ο γενάρχης	11
1.3.4	Πλάτων και μαθηματική αυστηρότητα	15
1.3.5	Τρία προβλήματα και τα πρώτα Στοιχεία	17
1.3.6	Άπειρο και παράδοξα	18
1.4	Η Αξιοματική Γεωμετρία του Ευκλείδη	20
1.4.1	Απόδειξη και αξιωματική θεμελίωση	20
1.5	Ευκλείδης και Στοιχεία	20
1.5.1	20 αιώνες σε μια ανάσα	23
1.6	Σύγχρονη Θεμελίωση της Γεωμετρίας	26
1.6.1	Αξιοματικά συστήματα	26
1.6.2	Ιδιότητες	27
1.6.3	Κριτική (με σέβας) στον Ευκλείδη	27
1.6.4	Καλύπτοντας τα κενά των Στοιχείων	28
1.6.5	Η θεμελίωση του Hilbert	30
2	Γεωμετρία κατά Klein	33
2.1	Στοιχειώδης Θεωρία Ομάδων	33
2.1.1	Ομάδες και υποομάδες	33
2.1.2	Υποομάδες	36
2.1.3	Γινόμενα ομάδων	37
2.1.4	Ομάδα πηλίκου	37
2.1.5	Ομομορφισμοί ομάδων	37
2.1.6	Ισομορφισμοί ομάδων	38
2.1.7	Ημιευθέα γινόμενα ομάδων	38
2.1.8	Δράσεις ομάδων	41
2.1.9	Ασκήσεις	43
2.2	Η Γεωμετρία κατά τον Klein	43
2.2.1	Ασκήσεις	45

3	Ευκλείδεια Γεωμετρία	47
3.1	Ο χώρος $\mathbb{R}^n$	47
3.1.1	Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$	47
3.1.2	Ευκλείδεια (τυπική) τοπολογία του $\mathbb{R}^n$	49
3.1.3	Ο νορμικός χώρος $\mathbb{R}^n$	50
3.1.4	Βαθμωτό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$	50
3.1.5	Ευθείες και υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$	53
3.1.6	Ανακλάσεις σε υπερεπίπεδα	54
3.1.7	Ασκήσεις	55
3.2	Η ομάδα $E(n)$	56
3.2.1	Η ομάδα μεταφορών $T(n)$	57
3.2.2	Ασκήσεις	58
3.2.3	Το Ισομετρικό Θεώρημα	59
3.2.4	Αναλλοίωτο του μήκους των καμπυλών	59
3.2.5	Το Θεώρημα των Ανακλάσεων	62
3.2.6	Ασκήσεις	64
4	Ομοιοθετική Γεωμετρία	67
4.1	Ομοιοθεσίες σε μετρικό χώρο	67
4.1.1	Ασκήσεις	68
4.1.2	Ασκήσεις	68
4.1.3	Το Ομοιοθετικό Θεώρημα	69
4.2	Μετρικοί απλοί λόγοι	70
4.2.1	Σφαιρικές συντεταγμένες	72
4.2.2	Ασκήσεις	75
4.2.3	Μέγιστοι κύκλοι	76
4.2.4	Ασκήσεις	79
4.3	Σφαιρική Τριγωνομετρία	79
4.3.1	Γωνίες μεγίστων κύκλων	79
4.3.2	Ασκήσεις	81
4.3.3	Σφαιρικά τρίγωνα. Εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου	82
4.3.4	Τριγωνομετρικοί νόμοι	85
4.4	Τύπος του Euler	86
5	Αφφινική Γεωμετρία	91
5.1	Ο αφφινικός χώρος $\mathbb{R}^n$	93
5.1.1	Αφφινικοί χώροι	93
5.1.2	Αφφινικοί υπόχωροι	97
5.1.3	Αφφινικές απεικονίσεις	98
5.2	Η αφφινική ομάδα $A(n)$	100
5.3	Τρία Ευκλείδεια Θεωρήματα	102
6	Προβολική Γεωμετρία	105
6.1	Ο Προβολικός Χώρος $\mathbb{R}P^n$	108
6.1.1	Προβολικοί μετασχηματισμοί και η προβολική ομάδα $P(n)$	111
6.2	Η Προβολική Ευθεία και η Γεωμετρία της	113

6.2.1	Ασκήσεις	115
6.3	Το Προβολικό Επίπεδο και η Γεωμετρία του	115
6.3.1	Γενικά για το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$	115
6.3.2	Ευθείες στο $\mathbb{R}P^2$	116
6.3.3	Ασκήσεις	117
6.3.4	Διπλοί λόγοι και δυϊσμός	117
6.3.5	Προβολική και προοπτική θέση	121
6.3.6	Ασκήσεις	124
6.4	Κλασικά θεωρήματα της Προβολικής Γεωμετρίας	125
6.4.1	Θεώρημα Πάππου	125
6.4.2	Θεώρημα Desargues	126
7	Γεωμετρία της Αντιστροφής	127
7.1	Στερεογραφική προβολή και το $\overline{\mathbb{R}^n}$	128
7.1.1	Στερεογραφική προβολή	128
7.1.2	Μετρική τοπολογία του $\overline{\mathbb{R}^n}$	129
7.2	Αντιστροφές σε σφαίρες και υπερεπίπεδα του $\overline{\mathbb{R}^n}$	131
7.2.1	Αντιστροφή σε υπερεπίπεδο του $\overline{\mathbb{R}^n}$	133
7.2.2	Δράση των αντιστροφών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$	134
7.2.3	Ασκήσεις	136
7.3	Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^n}$	137
7.3.1	Η μορφή των μετασχηματισμών Möbius	137
7.3.2	Συμμορφία των μετασχηματισμών Möbius	139
7.3.3	Μετρικός διπλός λόγος	141
7.3.4	Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας της Αντιστροφής	141
7.3.5	Ασκήσεις	142
7.4	Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}}$	143
7.4.1	Η ομάδα $GM(1)$	143
7.4.2	Διπλοί λόγοι	144
7.4.3	Ασκήσεις	145
7.4.4	Η προβολική ομάδα $PGL(2, \mathbb{C})$	145
7.4.5	Διπλοί Λόγοι	146
7.4.6	Ασκήσεις	148
8	Υπερβολική Γεωμετρία	149
8.1	Η ομάδα των υπερβολικών μετασχηματισμών	150
8.1.1	Επέκταση Poincaré της $GM(n)$	150
8.1.2	Κατάταξη των στοιχείων της $M(\mathcal{H}^2)$	152
8.1.3	Ασκήσεις	155
8.2	Υπερβολική Γεωμετρία	155
8.2.1	Υπερβολικές ευθείες	155
8.2.2	Παραλληλία	159
8.2.3	Ασκήσεις	160
8.3	Υπερβολική μετρική	160

8.3.1	Υπερβολικό μήκος καμπύλης	160
8.3.2	Υπερβολική απόσταση	161
8.3.3	Υπερβολικοί δίσκοι	161
8.3.4	Υπερβολικό εμβαδόν	162
8.3.5	Ασκήσεις	162
8.4	Υπερβολική Τριγωνομετρία	162
8.4.1	Γωνίες και τρίγωνα	162
8.4.2	Γωνία Παραλληλισμού	165
8.4.3	Νόμοι Ημιτόνων και Συνημιτόνων	165
8.4.4	Εμβαδόν υπερβολικού τριγώνου	167
8.5	Διάφορα μοντέλα Υπερβολικής Γεωμετρίας	167
8.5.1	Μοντέλο του δίσκου Poincaré	168

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Προϊστορικοί χρόνοι

Θεωρείται ότι οι προϊστορικοί πρόγονοί μας είχαν μία γενική αίσθηση για τα ποσά και σίγουρα γνώριζαν τη διαφορά μεταξύ του ένα και του δύο. Όμως, χρειάστηκε ένα μεγάλο διανοητικό άλμα προς την εφεύρεση ενός συμβόλου για την έννοια του «δύο». Ακόμα και σήμερα, υπάρχουν απομονωμένες φυλές κυνηγών-συλλεκτών στην Αμαζονία που έχουν μόνο λέξεις για «ένα», «δύο» και «πολλά», και άλλες που έχουν μόνο λέξεις για αριθμούς έως και το πέντε. Ελλείπει εγκατεστημένης γεωργίας και εμπορίου, υπάρχει ελάχιστη ανάγκη για ένα επίσημο σύστημα αριθμών.

Ο πρώιμος άνθρωπος παρακολουθούσε τακτικά γεγονότα όπως οι φάσεις της Σελήνης και οι εποχές. Μερικές από τις πρώτες ενδείξεις ότι η ανθρωπότητα σκεφτόταν τους αριθμούς είναι από εγκοπές οστών στην Αφρική που χρονολογούνται από 35.000 έως 20.000 χρόνια πριν. Αλλά αυτό είναι πραγματικά απλή μέτρηση και καταμέτρηση παρά μαθηματικά αυτά καθαυτά.



Το οστό του Ισάνγκο

1.2 Σουμέριοι και Αιγύπτιοι

Οι Σουμέριοι και οι προδυναστειακοί Αιγύπτιοι που κατοίκησαν στη Μεσοποταμία και στην Αίγυπτο αντίστοιχα, παρά τις όχθες των μεγάλων ποταμών Τίγρη και Ευφράτη οι μεν και του Νείλου οι δε, διακοσμούσαν με γεωμετρικά σχέδια τα τεχνουργήματά τους από το 6.000 π.Χ. Το ίδιο έκαναν και κάποιοι πληθυσμοί στη Βόρεια Ευρώπη, από το 4.000 π.Χ. Όλα αυτά

όμως ήταν περισσότερο διακόσμηση, παρά συστηματική παράσταση σχημάτων, ποσοτήτων και μορφών.

Τα Μαθηματικά άρχισαν να αναπτύσσονται ευρέως λόγω των γραφειοκρατικών αναγκών των πρώτων πολιτισμών που σχηματίστηκαν από την εγκατάσταση των ανθρώπων αυτών σε μεγάλες πόλεις και την ανάπτυξη της γεωργίας και κτηνοτροφίας. Η μέτρηση των εδαφών, η ατομική φορολόγηση κλπ., πρωτοεμφανίστηκαν στους πολιτισμούς των Σουμερίων και Αιγυπτίων.

Το Σούμερ (χωρίο της Μεσοποταμίας, περίπου το σύγχρονο νότιο Ιράκ), θεωρείται ο τόπος γέννησης της γραφής, του τροχού, της γεωργίας, του τόξου, του αρότρου, της άρδευσης και πολλών άλλων καινοτομιών και δικαίως ονομάζεται η *Κοιτίδα του Πολιτισμού*.

Οι Σουμερίοι ανέπτυξαν την πρωιμότερη μορφή γραφής, τη λεγόμενη *σφηνοειδή* γραφή. Σφηνοειδείς χαρακτήρες επιγράφονταν σε πλάκες ψημένου πηλού, για διάφορους σκοπούς. Αυτός είναι και ο λόγος που έχουμε μεγαλύτερη γνώση για τα Σουμεριακά και τα Βαβυλωνιακά Μαθηματικά (ο Βαβυλωνιακός θεωρείται ο διάδοχος πολιτισμός του Σουμεριακού), παρά για τα Αιγυπτιακά. Πράγματι, έχουμε μέχρι και σχολικές ασκήσεις σε αριθμητικά και γεωμετρικά προβλήματα. Οι Σουμερίοι ήταν ίσως οι πρώτοι άνθρωποι που αντιστοίχισαν σύμβολα σε ομάδες αντικειμένων σε μια προσπάθεια να διευκολύνουν την περιγραφή των μεγαλύτερων αριθμών. Προχώρησαν από τη χρήση ξεχωριστών συμβόλων για να αντιπροσωπεύσουν στάχυα σιταριού, βάζα λαδιού κ.λπ., στην πιο αφηρημένη χρήση ενός συμβόλου για κάθε συγκεκριμένο αριθμό. Ξεκινώντας από την 4η χιλιετία π.Χ., άρχισαν να χρησιμοποιούν έναν μικρό πήλινο κώνο για να αντιπροσωπεύσουν το ένα, μια πήλινη μπάλα για το δέκα και έναν μεγάλο κώνο για εξήντα.



Πήλινοι Σουμεριακοί κώνοι

Τα Μαθηματικά των Σουμερίων και των Βαβυλωνίων βασίστηκαν σε ένα αριθμητικό σύστημα με βάση το 60. Αυτό προέκυψε από τη μέτρηση των πέντε δακτύλων και των δώδεκα αρθρώσεων του ενός χεριού. Σε αντίθεση με τους Αιγύπτιους και τους Έλληνες, οι λεγόμενοι *Βαβυλωνιακοί αριθμοί* χρησιμοποιούσαν ένα πραγματικό σύστημα αξίας θέσης, όπου τα ψηφία που γράφονταν στην αριστερή στήλη αντιπροσώπευαν μεγαλύτερες τιμές, όπως και στο σύγχρονο δεκαδικό σύστημα, αν και φυσικά χρησιμοποιούσαν τη βάση 60 και όχι τη βάση 10.

1	Υ	11	<Υ	21	≪Υ	31	≪≪Υ	41	≪≪≪Υ	51	≪≪≪≪Υ
2	Π	12	<Π	22	≪Π	32	≪≪Π	42	≪≪≪Π	52	≪≪≪≪Π
3	ΠΠ	13	<ΠΠ	23	≪ΠΠ	33	≪≪ΠΠ	43	≪≪≪ΠΠ	53	≪≪≪≪ΠΠ
4	▽	14	<▽	24	≪▽	34	≪≪▽	44	≪≪≪▽	54	≪≪≪≪▽
5	▽▽	15	<▽▽	25	≪▽▽	35	≪≪▽▽	45	≪≪≪▽▽	55	≪≪≪≪▽▽
6	ΠΠΠ	16	<ΠΠΠ	26	≪ΠΠΠ	36	≪≪ΠΠΠ	46	≪≪≪ΠΠΠ	56	≪≪≪≪ΠΠΠ
7	▽▽▽	17	<▽▽▽	27	≪▽▽▽	37	≪≪▽▽▽	47	≪≪≪▽▽▽	57	≪≪≪≪▽▽▽
8	▽▽▽▽	18	<▽▽▽▽	28	≪▽▽▽▽	38	≪≪▽▽▽▽	48	≪≪≪▽▽▽▽	58	≪≪≪≪▽▽▽▽
9	ΠΠΠΠ	19	<ΠΠΠΠ	29	≪ΠΠΠΠ	39	≪≪ΠΠΠΠ	49	≪≪≪ΠΠΠΠ	59	≪≪≪≪ΠΠΠΠ
10	<	20	≪	30	≪≪	40	≪≪≪	50	≪≪≪≪		

Βαβυλωνιακοί αριθμοί

Τεκμαίρεται ότι η Βαβυλωνιακή πρόοδος στα Μαθηματικά πιθανότατα διευκολύνθηκε από το γεγονός ότι το 60 έχει πολλούς διαιρέτες (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 και 60). Στην πραγματικότητα, το 60 είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος διαιρούμενος από όλους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 6). Η συνεχιζόμενη μέχρι τις μέρες μας χρήση των 60 δευτερολέπτων σε ένα λεπτό, 60 λεπτών σε μια ώρα και 360 (60 x 6) μοιρών σε έναν κύκλο, έλκει την καταγωγή της από το αρχαίο Βαβυλωνιακό σύστημα. Για παρόμοιους λόγους το 12 (το οποίο έχει διαιρέτες 1, 2, 3, 4 και 6), υπήρξε ιστορικά η βάση για ένα τόσο δημοφιλές σύστημα (π.χ. 12 μήνες, 12 ίντσες, 12 πέννες, 2 x 12 ώρες, κ.λπ.). Έχουμε στοιχεία για την ανάπτυξη ενός σύνθετου συστήματος μέτρησης από τους Σουμερίους από περίπου το 3000 π.Χ., και έχουν ανακαλυφθεί πίνακες πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, πίνακες τετραγώνων, τετραγωνικών ριζών και ριζών κύβου, γεωμετρικών ασκήσεων και προβλημάτων διαίρεσης χρονολογούμενων από περίπου το 2600 π.Χ. και μετά. Αργότερα, τα Βαβυλωνιακά πλακίδια που χρονολογούνται από περίπου το 1800 έως το 1600 π.Χ. καλύπτουν θέματα τόσο ποικίλα όσο τα κλάσματα, η άλγεβρα, οι μέθοδοι επίλυσης γραμμικών, τετραγωνικών και ακόμη και μερικών κυβικών εξισώσεων, και ο υπολογισμός των κανονικών αμοιβαίων ζευγών (ζεύγη αριθμών που πολλαπλασιάζονται μαζί για να δώσουν 60). Ένα συγκεκριμένο Βαβυλωνιακό πλακίδιο δίνει προσέγγιση της $\sqrt{2}$ με εκπληκτική ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων. Αλλού, απαριθμούνται τα τετράγωνα αριθμών έως 59, οι κύβοι αριθμών έως το 32, κ.α. Σε ένα άλλο πλακίδιο, ευρίσκεται μια εκτίμηση για το π (3,125, μια λογική προσέγγιση της πραγματικής τιμής 3,1416...).



Βαβυλωνιακός πίνακας υπολογισμού εμβαδού μη κανονικού σχήματος (2100 π.Χ., περίπου)

Η ιδέα των τετραγωνικών αριθμών και των τετραγωνικών εξισώσεων (απαντάται η μορφή $x^2 + px + q = 0$), προέκυψε φυσιολογικά στο πλαίσιο της μέτρησης της γης και τα μαθηματικά Βαβυλωνιακά πλακίδια μας δίνουν την πρώτη λύση τέτοιων τετραγωνικών εξισώσεων. Η Βαβυλωνιακή προσέγγιση για την επίλυσή των εξισώσεων αυτών περιστρέφεται συνήθως γύρω από ένα είδος γεωμετρικού παιχνιδιού τεμαχισμού και αναδιάταξης σχημάτων, αν και εμφανίζεται και η (πρωτόλεια) χρήση άλγεβρας. Τουλάχιστον μερικά από τα παραδείγματα φαίνεται να παραθέτουν επίλυση αφηρημένων και όχι συγκεκριμένων προβλημάτων. Οι Σουμεριοί, οι Βαβυλώνιοι καθώς και οι Ασσύριοι, αλλά σε μικρότερο βαθμό, χρησιμοποίησαν γεωμετρικά σχήματα στα κτίρια και το σχεδιασμό τους, όπως και σε ζάρια για τα παιχνίδια αναψυχής που ήταν εξαιρετικά δημοφιλή στην κοινωνία τους: το τάβλι είναι σουμεριακή εφεύρεση. Η γεωμετρία τους επεκτάθηκε στον υπολογισμό των εμβαδών ορθογώνιων, τριγώνων και τραπεζοειδών, καθώς και στον υπολογισμό των όγκων απλών σχημάτων όπως τα τούβλα και οι κύλινδροι (αν και όχι οι πυραμίδες, πράγμα αρκετά περίεργο τουλάχιστον για τους Σουμερίους).



Αναπαράσταση του ζιγκουράτ της Ουρ, πρωτεύουσας των Σουμερίων

Αν και οι Σουμεριακές πυραμίδες (ζιγκουράτ) ήταν επαναπόθεση παραλληλεπίπεδων όγκων, θεωρούνται οι πρώτες μορφές κτιριακών πυραμίδων που χρησιμοποιούνταν τόσο για πολιτικούς (κατοικία του αυτοκράτορα) όσο και για θρησκευτικούς σκοπούς. Ο μύθος του Πύργου της Βαβέλ έλκει σαφώς την καταγωγή του από τα μεγάλα σουμεριακά ζιγκουράτ.



Φανταστική αναπαράσταση του πύργου της Βαβέλ

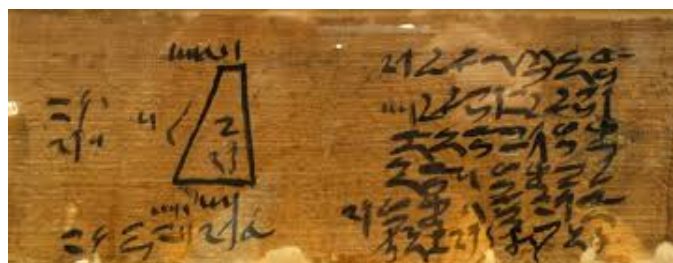
Η διάσημη (και αμφιλεγόμενη) πήλινη πλάκα Plimpton 322, που πιστεύεται ότι χρονολογείται από το 1800 π.Χ., υποδηλώνει ότι οι Βαβυλώνιοι ίσως γνώριζαν το Πυθαγόρειο Θεώρημα πολλούς αιώνες πριν από τον Πυθαγόρα. Η πλάκα φαίνεται να απαριθμεί 15 τέλεια Πυθαγόρεια τρίγωνα με ακέραιες πλευρές (είναι ακόμα θέμα διαμάχης της επιστημονικής κοινότητας για το κατά πόσον όλα αυτά δεν ήταν απλώς ακαδημαϊκές ασκήσεις).



Η πήλινη πλάκα Plimpton 322 (Βρετανικό Μουσείο)

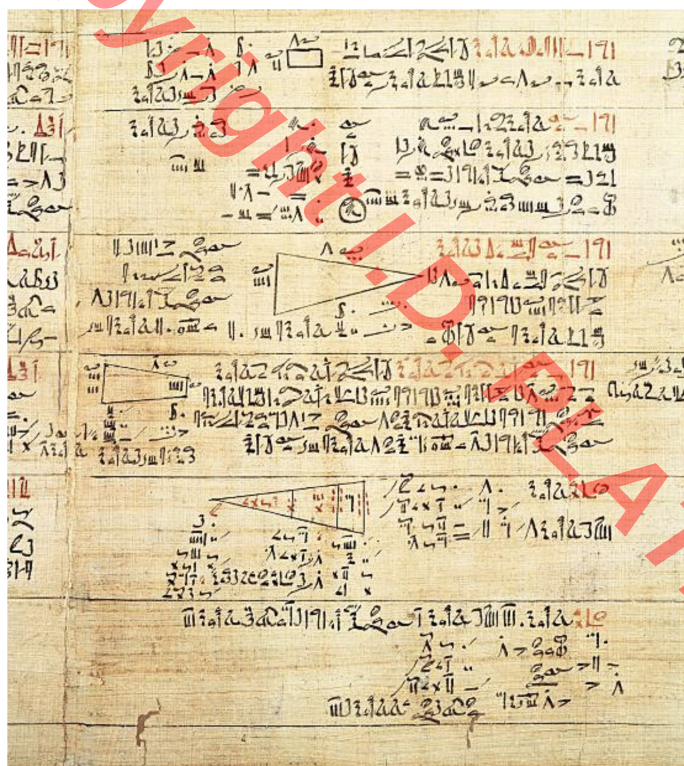
Οι πρώτοι Αιγύπτιοι εγκαταστάθηκαν κατά μήκος της εύφορης κοιλάδας του Νείλου το 6000 π.Χ. περίπου, και άρχισαν να καταγράφουν τα μοτίβα των σεληνιακών φάσεων και των εποχών, τόσο για γεωργικούς όσο και για θρησκευτικούς λόγους. Οι επιθεωρητές των Φαραώ (οι *αρπεδονάπτες* κατά τον Ηρόδοτο ήταν αυτοί που ήσαν υπεύθυνοι για τη μέτρηση των πλημμυρών του Νείλου) χρησιμοποιούσαν μετρήσεις με βάση τα μέρη του σώματος: μια παλάμη ήταν το πλάτος του χεριού, ένα τετράγωνο ήταν το μήκος από τον αγκώνα έως τα δάχτυλα κ.λπ. Αυτά χρησιμοποιούνταν για τη μέτρηση γης και κτιρίων από πολύ νωρίς στην ιστορία της Αιγύπτου, και ένα δεκαδικό αριθμητικό σύστημα αναπτύχθηκε με βάση τα δέκα δάχτυλα των χεριών.

Το παλαιότερο μαθηματικό κείμενο από την αρχαία Αίγυπτο που έχει ανακαλυφθεί μέχρι στιγμής, ωστόσο, είναι ο Πάπυρος της Μόσχας, που χρονολογείται από το Αιγυπτιακό Μέσο Βασίλειο γύρω στο 2000-1800 π.Χ.



Ο Πάπυρος της Μόσχας

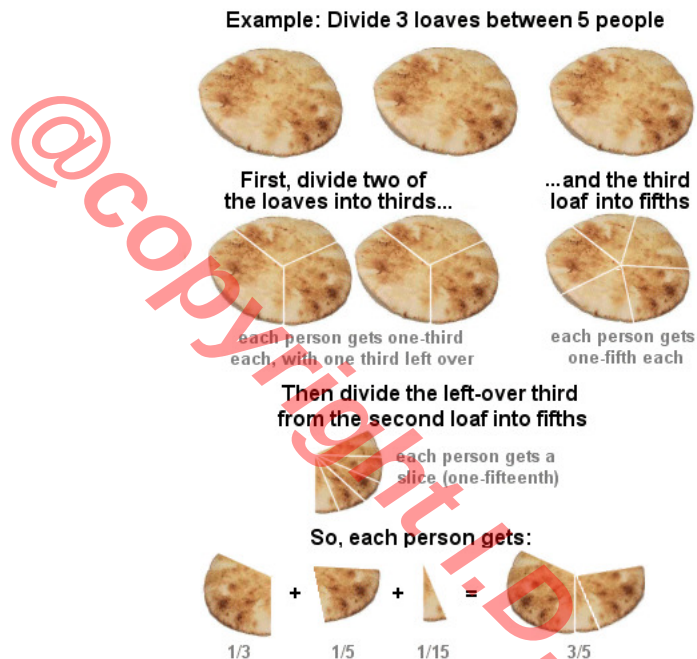
Πιστεύεται ότι οι Αιγύπτιοι εισήγαγαν το παλαιότερο πλήρως ανεπτυγμένο σύστημα αριθμητικής βάσης 10, τουλάχιστον ήδη από το 2700 π.Χ. (και πιθανώς πολύ πιο νωρίς). Οι γραπτοί αριθμοί αποτελούνταν από ένα κτύπημα για τις μονάδες, έναν αστράγαλο για τις δεκάδες, ένα πηνίο σχοινιού για τις εκατοντάδες και ένα φυτό λωτού για τις χιλιάδες, καθώς και άλλα ιερογλυφικά σύμβολα για υψηλότερες δυνάμεις από το δέκα έως το ένα εκατομμύριο. Ωστόσο, δεν υπήρχε η έννοια της αξίας θέσης, έτσι οι μεγαλύτεροι αριθμοί ήταν μάλλον δύσχρηστοι (αν και το ένα εκατομμύριο απαιτούσε μόνο έναν χαρακτήρα, το ένα εκατομμύριο μείον ένα απαιτούσε πενήντα τέσσερις χαρακτήρες). Ο Πάπυρος Rhind, που χρονολογείται γύρω στο 1650 π.Χ., είναι ένα είδος εγχειριδίου οδηγιών αριθμητικής και γεωμετρίας και μας δίνει σαφείς ενδείξεις για το πώς πραγματοποιούνταν ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση εκείνη την εποχή. Περιέχει επίσης στοιχεία άλλων μαθηματικών γνώσεων, όπως τα μονικά κλάσματα (κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα), τους σύνθετους και πρώτους αριθμούς, τους αριθμητικούς, γεωμετρικούς και αρμονικούς μέσους, το πώς να επιλύουμε γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης καθώς και αριθμητικές και γεωμετρικές σειρές.



Ο Πάπυρος Rhind

Ο Πάπυρος του Βερολίνου, που χρονολογείται γύρω στο 1300 π.Χ., δείχνει ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι μπορούσαν να λύνουν τετραγωνικές εξισώσεις. Η πράξη του πολλαπλασιασμού γινόταν με μια διαδικασία επαναλαμβανόμενου διπλασιασμού του ενός πολλαπλασιαζόμενου αριθμού από τη μία, και το ίδιο για τον άλλον. Ουσιαστικά, έχουμε ένα είδος πολλαπλασιασμού δυαδικών παραγόντων, παρόμοιου με αυτόν που χρησιμοποιείται από τους σύγχρονους υπολογιστές. Γινόταν λοιπόν ουσιαστικά χρήση της έννοιας των δυαδικών αριθμών, πάνω από 3.000 χρόνια πριν ο Leibniz την εισάγει στη Δύση, και πολλά ακόμη χρόνια πριν από την

ανάπτυξη του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Τα κλάσματα με αριθμητή τη μονάδα μπορούσαν επίσης να χρησιμοποιηθούν για απλές διαιρέσεις. Για παράδειγμα, εάν έπρεπε να χωρίσουν 3 καρβέλια σε 5 άτομα, πρώτα θα χώριζαν δύο από τα ψωμιά σε τρίτα και το τρίτο καρβέλι σε πέμπτα. Μετά θα διαιρούσαν το αριστερό τρίτο από το δεύτερο καρβέλι σε πέντε κομμάτια. Έτσι, κάθε άτομο θα έπαιρνε το ένα τρίτο συν το ένα πέμπτο συν το ένα δέκατο πέμπτο (το οποίο ανέρχεται συνολικά στα τρία πέμπτα, όπως θα περιμέναμε).

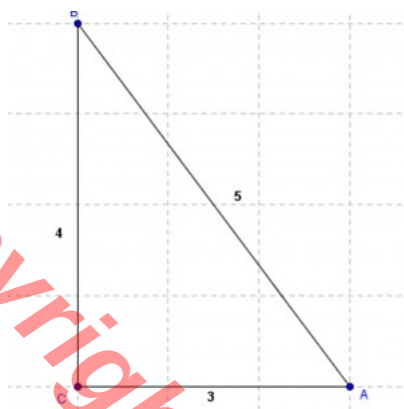


Οι Αιγύπτιοι προσέγγισαν το εμβαδόν του κύκλου χρησιμοποιώντας σχήματα των οποίων γνώριζαν το εμβαδόν. Παρατήρησαν ότι το εμβαδόν κύκλου διαμέτρου 9 μονάδων λ.χ., ήταν περίπου ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου με πλευρές 8 μονάδων. Έτσι, τα εμβαδά κύκλων άλλων διαμέτρων μπορούσαν να ληφθούν πολλαπλασιάζοντας τη διάμετρο επί $\frac{8}{9}$ και κατόπιν τετραγωνίζοντας τον αριθμό αυτόν. Αυτό δίνει μια αποτελεσματική προσέγγιση του π με σφάλμα λιγότερο από ένα τοις εκατό. Οι ίδιες οι πυραμίδες είναι μια άλλη ένδειξη της πολυπλοκότητας των Αιγυπτιακών Μαθηματικών. Απορρίπτοντας τους ισχυρισμούς ότι οι πυραμίδες είναι οι πρώτες γνωστές δομές στις οποίες παρατηρείται η Χρυσή Τομή 1: 1,618 (η οποία μπορεί να έχει συμβεί για καθαρά αισθητικούς και όχι μαθηματικούς λόγους), διαπιστώνουμε την σίγουρη ύπαρξη απόδειξης ότι γνώριζαν τον τύπο για τον όγκο μιας πυραμίδας: $\frac{1}{3}$ φορές το ύψος επί το μήκος επί το πλάτος, καθώς και αυτόν για τον όγκο της κόλωσης πυραμίδας.



Οι πυραμίδες της Γκίζας

Γνώριζαν επίσης, πολύ πριν από τον Πυθαγόρα, τον κανόνα ότι ένα τρίγωνο με τις πλευρές 3, 4 και 5 μονάδες αποδίδει τέλεια ορθή γωνία και οι Αιγύπτιοι οικοδόμοι χρησιμοποίησαν σχοινιά δεμένα σε διαστήματα 3, 4 και 5 μονάδων για να εξασφαλίσουν τις σωστές γωνίες για την τοιχοποιία τους (στην πραγματικότητα, το ορθογώνιο τρίγωνο 3-4-5 ονομάζεται συχνά *αιγυπτιακό*).



Αιγυπτιακό τρίγωνο

Απο αυτά που μαθαίνουμε-συνήθως με στρεβλό τρόπο-στο σχολείο, μένουμε με την εντύπωση ότι οι Αρχαίοι Έλληνες είναι αυτοί που ανακάλυψαν τα Μαθηματικά. Είδαμε στην ενότητα αυτή ότι η αλήθεια είναι παντελώς διαφορετική. Από όλη την προηγούμενη συζήτηση είναι φανερό ότι αρχής γενομένης από τους προϊστορικούς χρόνους, η ανάπτυξη των Μαθηματικών υπήρξε ραγδαία έως τις απαρχές της ανθρώπινης Ιστορίας. Δύο τεράστιοι πολιτισμοί, ο Μεσοποταμιακός και ο Αιγυπτιακός, που προηγήθηκαν χιλιετίες του αρχαιοελληνικού, είχαν αναπτύξει σε σημαντικό βαθμό τα Μαθηματικά. Οι πρώτες μεγάλες μητροπόλεις του ανθρωπίνου πολιτισμού, οι Σουμεριακές πόλεις ανάμεσα στον Τίγρη και τον Ευφράτη, καθώς και τα τεράστια μνημεία των Αιγυπτίων εκατέρωθεν των οχθών του Νείλου προηγούνται το λιγότερο κατά 2000 χρόνια από το χτίσιμο των Μνημείων της Ακρόπολης. Και σαφώς, όπως είδαμε, για να χτιστούν αυτά, χρειάστηκαν αρκετά Μαθηματικά, πράγμα που αποδεικνύεται από τις πάρα πολλές σφηνοειδείς επιγραφές των Σουμερίων καθώς και από τους παπύρους και τις εγχάρακτες επιγραφές των Αιγυπτίων. Τι είναι λοιπόν αυτό που αναδεικνύει τα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά; Η απάντηση είναι: η ανακάλυψη της έννοιας της *απόδειξης*. Οι προαναφερθέντες πολιτισμοί παρήγαγαν γνώση μέσω ενός πανίσχυρου ιερατείου που αντιπροσώπευε την απόλυτη εξουσία του εκάστοτε βασιλέα ή φαράω. Οι επιγραφές των Αιγυπτίων αναφέρουν συστηματικά: για να λύσεις το τάδε πρόβλημα, θα κάνεις τα εξής και προχωρούν στην παράθεση της λύσης χωρίς απολύτως καμμία δικαιολόγηση. Την εποχή της άνθησης των πόλεων της Ιωνίας κατά τον 7ο-6ο αι. π.Χ., οι οποίες είχαν κατά κανόνα πολύ πιο φιλελεύθερα καθεστώτα, οι ναυτικοί και έμποροι στην πλειοψηφία τους κάτοικοι μεταλαμπάδευσαν τις γνώσεις που απόκτησαν από τα ταξίδια τους στις πόλεις τους (είναι γνωστό πως το επάγγελμα του θαλή του Μιλήσιου ήταν έμπορος και ότι είχε ταξιδέψει επανειλημμένα στην Αίγυπτο). Όμως, η μεταλαμπάδευση αυτή δεν έγινε με άκριτο τρόπο. Η φυσική Φιλοσοφία που αναπτύχθηκε

ταυτόγχρονα στα ίδια μέρη, έβαλε το μέγα ερώτημα: γιατί; Το ερώτημα αυτό δεν θα μπορούσαν να το θέσουν ούτε οι Σουμερίοι, ούτε οι Αιγύπτιοι, ακριβώς λόγω των καθεστώτων που τους εξουσίαζαν. Η απόδειξη ήταν αχρείαστη, λόγω της ολοκληρωτικής φύσης των πολιτισμών αυτών. Η απόδειξη ανακαλύφθηκε στην Ιωνία, λόγω φιλελεύθερων πολιτευμάτων και του εμπορίου. Έτσι, η απόδειξη στα Μαθηματικά είναι σύμφυτη με τη δημοκρατία.

1.3 Έλληνες

Καθώς οι Έλληνες άρχισαν να μεγαλώνουν τη σφαίρα επιρροής τους στη Μικρά Ασία μέσω των αποικιών, στη Μεσοποταμία και στις ακτές της Μεσογείου μέσω του εμπορίου, υιοθέτησαν και προσαρμόσαν χρήσιμα στοιχεία από τις κοινωνίες που κατελάμβαναν/αλληλεπιδρούσαν. Αυτό ισχύει τόσο για τα Μαθηματικά τους όσο για οτιδήποτε άλλο: υιοθέτησαν στοιχεία Μαθηματικών τόσο από τους Βαβυλώνιους όσο και από τους Αιγύπτιους. Σύντομα, άρχισαν να κάνουν σημαντικές συνεισφορές και, για πρώτη φορά, μπορούμε να καταγράψουμε τις συνεισφορές των ατόμων. Μέχρι την Ελληνιστική περίοδο, οι Έλληνες πρωταγωνιστούν σε μια από τις πιο δραματικές και σημαντικές επαναστάσεις στη μαθηματική σκέψη όλων των εποχών.

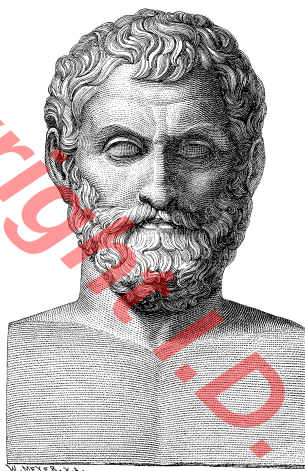
1.3.1 Αττικοί ή Ηρωδιακοί αριθμοί

Το αρχαιότερο Ελληνικό αριθμητικό σύστημα, γνωστό ως Αττικό ή Ηρωδιακό, αναπτύχθηκε πλήρως έως το 450 π.Χ., και ήταν σε τακτική χρήση πιθανώς ήδη από τον 7ο αιώνα π.Χ. Ήταν ένα σύστημα βάσης 10 παρόμοιο με το προηγούμενο Αιγυπτιακό (και ακόμη πιο παρόμοιο με το μεταγενέστερο Ρωμαϊκό σύστημα), με σύμβολα για τα 1, 5, 10, 50, 100, 500 και 1.000 επαναλαμβανόμενα όσες φορές χρειαζόταν για να αντιπροσωπεύσουν τον επιθυμητό αριθμό. Η προσθήκη γινόταν αθροίζοντας χωριστά τα σύμβολα στους αριθμούς που προστίθενταν και ο πολλαπλασιασμός ήταν μια επίπονη διαδικασία βασισμένη σε διαδοχικούς διπλασιασμούς (η διαίρεση βασίστηκε στο αντίστροφο αυτής της διαδικασίας).

I	1
II	2
III	3
IIII	4
Γ	5
ΓΙ	6
ΓΙΙ	7
ΓΙΙΙ	8
ΓΙΙΙΙ	9
Δ	10
ΔΓ	15
ΔΔ	20
Γ²	50
Η	100
Χ	1000
Μ	10 000

1.3.2 Θαλής και απαρχές της Γεωμετρίας

Τα περισσότερα από τα Ελληνικά Μαθηματικά βασίστηκαν στη Γεωμετρία της απόδειξης. Ο Θαλής, ένας από τους Επτά Σοφούς της Αρχαίας Ελλάδας, που έζησε στις ακτές της Ιωνίας το πρώτο μισό του 6ου αιώνα π.Χ., θεωρείται συνήθως ο πρώτος που έθεσε κατευθυντήριες γραμμές για την αφηρημένη ανάπτυξη της Γεωμετρίας, αν και αυτό που γνωρίζουμε για το έργο του (όπως σε όμοια και ορθογώνια τρίγωνα) φαίνεται τώρα πολύ στοιχειώδες. Είναι πολύ λίγα αυτά που γνωρίζουμε για τον Θαλή, τον πρώτο (Φυσικό) φιλόσοφο και Μαθηματικό της Ιστορίας. Αυτό που γνωρίζουμε όμως είναι ότι ήταν έμπορος και ότι είχε ταξιδέψει στην Αίγυπτο. Είναι πολύ πιθανόν εκεί να ήρθε σε επαφή με ανθρώπους του ιερατείου και να έλαβε γνώση κάποιων από τα μαθηματικά επιτεύγματα των Αιγυπτίων.



Θαλής ο Μιλήσιος, 626/623-548/545 π.Χ.

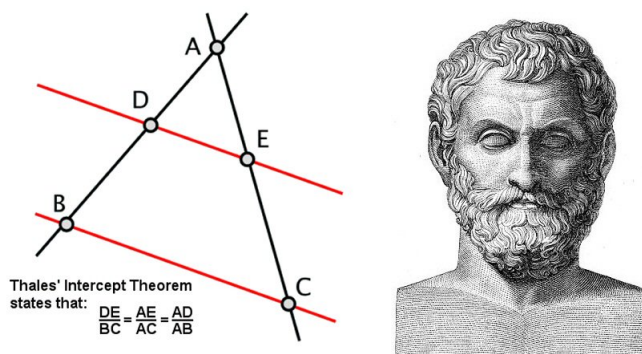
Πάρα πολλά στοιχειώδη θεωρήματα της Γεωμετρίας αποδίδονται στον Θαλή.

Θεώρημα 1.3.1. *Οι παρά τη βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*

Ο Θρύλος λέγει ότι πρόκειται περί του πρώτου αποδεδειγμένου θεωρήματος. Από τη χαρά του για την ανακάλυψή του αυτή, ο Θαλής πρόσφερε εκατόμβη (εκατό βόδια) στον Ποσειδώνα. Ένα άλλο θεώρημα του Θαλή είναι και το:

Θεώρημα 1.3.2. *Πλευρά τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ίση με τη διάμετρο του κύκλου βλέπει σε ορθή γωνία.*

Ο Θαλής όμως πιστώνεται επίσης με ένα άλλο μεγάλο και καθόλου στοιχειώδες θεώρημα, του περίφημου Θεωρήματος των Παραλλήλων του Θαλή, περί των αναλογιών των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται εάν δύο τεμνόμενες ευθείες τέμνονται από ζεύγος παραλλήλων ευθειών.

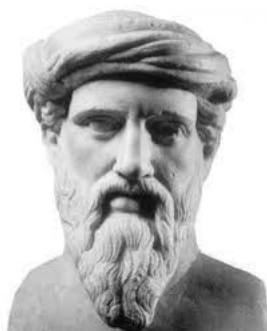


Το Θεώρημα του Θαλή

Λίγα ακόμα για τον Θαλή:

- Προέβλεψε έκλειψη Ηλίου, πράγμα που τον κατέστησε σεβαστό στην πατρίδα του την Μίλητο.
- Λέγεται ότι μέτρησε το ύψος της Πυραμίδας του Χέοπα, χρησιμοποιώντας το μπαστούνι του (τη βακτηρία του) και όμοια τρίγωνα. Πάλι με όμοια τρίγωνα, υπολόγιζε αποστάσεις πλοίων από την ακτή.
- Θεωρείται ο πρώτος Φιλόσοφος. Για τον Θαλή, αρχή πάντων το ὕδωρ.

1.3.3 Πυθαγόρας, ο γενάρχης



Πυθαγόρας ο Σάμιος, περ. 570-περ. 495 π.Χ.

Σε ένα πολύ μεγάλο βαθμό, ο θρύλος του Πυθαγόρα του Σαμίου έγινε συνώνυμος με τη γέννηση των Ελληνικών Μαθηματικών. Πράγματι, πιστεύεται ότι αυτός επινόησε τόσο τις λέξεις «φιλοσοφία» («αγάπη της σοφίας») όσο και «μαθηματικά» («αυτό που μαθαίνεται»). Ο Πυθαγόρας ήταν ίσως ο πρώτος που συνειδητοποίησε ότι θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένα πλήρες σύστημα Μαθηματικών, όπου τα γεωμετρικά στοιχεία αντιστοιχούσαν με τους αριθμούς (εν προκειμένω, τους θετικούς ρητούς). Το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι ένα από τα πλέον γνωστά μαθηματικά θεωρήματα. Αλλά ο ίδιος ο Πυθαγόρας ήταν όπως θα δούμε ένα μάλλον αμφιλεγόμενο πρόσωπο. Σε κάθε περίπτωση, τα Ελληνικά Μαθηματικά δεν περιορίστηκαν καθόλου σε έναν άνθρωπο, απλώς ο Πυθαγόρας θεωρείται ο πρώτος «αληθινός»

Μαθηματικός και όπως ισχυρίζονται πολλοί, χρωστάμε τα αμιγή (καθαρά) Μαθηματικά στον Πυθαγόρα. Ο ίδιος, δεν άφησε καθόλου μαθηματικά γραπτά, και πολλά από αυτά που γνωρίζουμε για την Πυθαγόρεια σκέψη προέρχονται από τα γραπτά του Φιλολάου και άλλων μεταγενέστερων Πυθαγόρειων μελετητών. Δεν είναι καθόλου σαφές εάν πολλά (ή μάλιστα οποιοδήποτε) από τα θεωρήματα που του αποδίδονται στην πραγματικότητα αποδείχθηκαν από τον Πυθαγόρα προσωπικά ή από τους οπαδούς του.

Βίος του Πυθαγόρα

Διωγμένος από την πατρίδα του τη Σάμο λόγω των απολυταρχικών του απόψεων, ίδρυσε Σχολή στον Κρότωνα της Κάτω Ιταλίας γύρω στο 530 π.Χ. Αν και η Πυθαγόρειος σκέψη κυριαρχούνταν σε μεγάλο βαθμό από τα Μαθηματικά, ήταν επίσης βαθιά μυστικιστική και ο Πυθαγόρας επέβαλε τις σχεδόν θρησκευτικές φιλοσοφίες του:

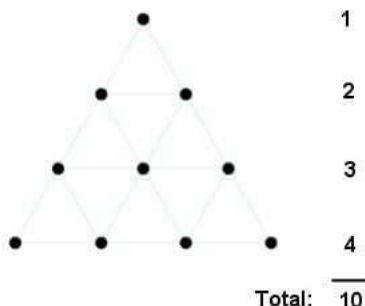
- την αυστηρή χορτοφαγία,
- την κοινοτική ζωή,
- τις μυστικιστικές τελετές,
- περίεργους κανόνες σε όλα τα μέλη της Σχολής του (ποτέ μην ουρείτε προς τον ήλιο, να μην παντρεύεστε ποτέ γυναίκα που φοράει χρυσά κοσμήματα, να μην περνάτε ποτέ πάνω από γαΐδαρο ξαπλωμένο στο δρόμο, να μην τρώτε ούτε να αγγίζετε μαύρα φασόλια και κουκκιά κ.λπ.)

Τα μέλη της Σχολής του χωρίζονταν στους «μαθηματικούς» (ή «μαθητές»), οι οποίοι επέκτειναν και ανέπτυξαν το πιο μαθηματικό και επιστημονικό έργο που ξεκίνησε ο ίδιος ο Πυθαγόρας, και στους «ακουσματικούς» (ή «ακροατές»), που εστίαζαν στις πιο θρησκευτικές και τελετουργικές πτυχές των διδασκαλιών του. Υπήρχε πάντα μια τριβή μεταξύ των δύο ομάδων και τελικά η αίρεση παγιδεύτηκε σε σκληρές διαμάχες ώσπου τελικά διαλύθηκε. Η δυσaréσκεια ενάντια στον μυστικισμό των Πυθαγορείων κλιμακώθηκε το 460 π.Χ.: όλοι οι τόποι συνάντησής τους κήκαν και καταστράφηκαν, με τουλάχιστον 50 μέλη της Σχολής να σκοτώνονται μόνο στο Κρότωνα.

Πυθαγόρεια Φιλοσοφία

Η Πυθαγόρεια φιλοσοφία είχε την αρχή «Αρχή πάντων ὁ ἀριθμός», ή «Θεὸς ἐστὶν ἀριθμός». Οι Πυθαγόρειοι ασκούσαν ένα είδος αριθμολογίας και θεώρησαν ότι κάθε αριθμός έχει τον δικό του χαρακτήρα και νόημα. Ο αριθμός ένα ήταν ο γεννήτορας όλων των αριθμών, το δύο αντιπροσώπευε τη γνώμη, το τρία την αρμονία, το τέσσερα τη δικαιοσύνη, το πέντε τον γάμο, το έξι τη δημιουργία, το επτά τους επτά πλανήτες κ.λπ. Οι περιττοί αριθμοί θεωρούνταν θηλυκοί και οι άρτιοι αριθμοί αρσενικοί. Ο πιο ιερός αριθμός όλων ήταν η «Τετρακτὺς» ή το δέκα, ένας *τριγωνικός* αριθμός που αποτελείται από το άθροισμα $1+2+3+4$. Πρόκειται περί μεγάλου πνευματικού επιτεύγματος των Πυθαγορείων: συνήγαγαν την ιδιαίτερη θέση του αριθμού 10 από ένα αφηρημένο μαθηματικό επιχείρημα και όχι από κάτι τόσο απλό όσο το μέτρο των δαχτύλων των δύο χεριών.

The tetractys, an equilateral triangular figure consisting of 10 points arranged in four rows of 1, 2, 3 and 4, was both a mathematical idea and a metaphysical symbol for the Pythagoreans.



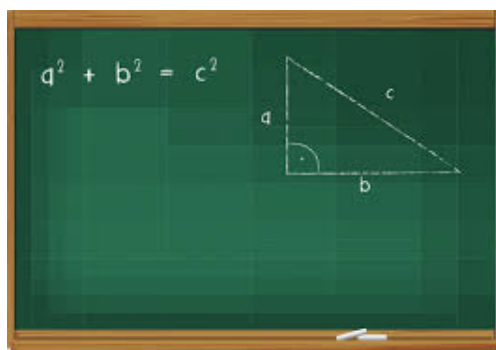
Τετρακτύς

Οφείλουμε στον Πυθαγόρα και τη σχολή του - καθώς και σε ευάριθμους αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς, την εισαγωγή πιο αυστηρών Μαθηματικών από αυτά που υπήρχαν προηγουμένως. Αυτοί ήταν οι αρχιτέκτονες που οικοδόμησαν τις πρώτες αρχές χρησιμοποιώντας αξιώματα και λογική. Πριν τον Πυθαγόρα, η Γεωμετρία ήταν απλώς μια συλλογή κανόνων που προέκυπταν από εμπειρικές μετρήσεις. Ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι θα μπορούσε να κατασκευαστεί ένα πλήρες σύστημα Μαθηματικών, όπου τα γεωμετρικά στοιχεία αντιστοιχούσαν σε αριθμούς, και όπου οι θετικοί ακέραιοι και οι λόγοι τους ήταν τα μόνα απαραίτητα για τη δημιουργία ενός ολόκληρου συστήματος λογικής και αλήθειας.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το όνομα του Πυθαγόρα έμεινε στην αιωνιότητα κυρίως για το θεώρημα που φέρει το όνομά του:

Θεώρημα 1.3.3. (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτεινουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών.



Πυθαγόρειο Θεώρημα

Αναφέρουμε στο σημείο αυτό τις *Πυθαγόρειες τριάδες*. Το απλούστερο και πιο συχνά αναφερόμενο παράδειγμα ενός Πυθαγόρειου τριγώνου είναι αυτό με πλευρές 3, 4 και 5, αλλά υπάρχει ένας άπειρος αριθμός ακεραίων «Πυθαγορείων τριάδων», ξεκινώντας με τις (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41), κ.λπ. Πρέπει να σημειωθεί, ωστόσο, ότι η (6, 8, 10) δεν είναι αυτό που είναι γνωστό ως «πρωταρχική» Πυθαγόρεια τριάδα, επειδή είναι απλώς πολλαπλάσιο (της (3,4,5)).

Το Πυθαγόρειο Θεώρημα και οι ιδιότητες των ορθογωνίων τριγώνων είναι το αρχαιότερο και πλέον διαδεδομένο μαθηματικό επίτευγμα μετά τη στοιχειώδη Αριθμητική και τη Γεωμετρία. Ενώ έχει εντοπιστεί σε αρχαιότερα μαθηματικά κείμενα από τη Βαβυλώνα και την Αίγυπτο, που χρονολογούνται από πάνω από χίλια χρόνια νωρίτερα και μια από τις απλούστερες αποδείξεις προέρχεται από την αρχαία Κίνα και πιθανότατα χρονολογείται πολύ πριν από τη γέννηση του Πυθαγόρα, είναι ο Πυθαγόρας που έδωσε στο θεώρημα την οριστική του μορφή, αν και δεν είναι σαφές εάν ο ίδιος ο Πυθαγόρας το απέδειξε οριστικά ή απλώς το περιέγραψε. Είτε έτσι είτε αλλιώς, έχει γίνει ένα από τα πιο γνωστά από όλα τα μαθηματικά θεωρήματα και υπάρχουν έως και 400 διαφορετικές αποδείξεις, μερικές γεωμετρικές, μερικές αλγεβρικές, μερικές που περιλαμβάνουν προχωρημένες διαφορικές εξισώσεις κ.λπ.

Σύντομα έγινε φανερό ότι ήταν επίσης δυνατές μη ακέραιες Πυθαγόρειες τριάδες, λ.χ. ένα τρίγωνο με πλευρές 1, 1 και $\sqrt{2}$, όπως είχαν ανακαλύψει οι Βαβυλώνιοι αιώνες νωρίτερα. Ωστόσο, ήταν ο μαθητής του Πυθαγόρα Ίππασος ο Μεταποντίνος που στην προσπάθειά του να υπολογίσει την τιμή του $\sqrt{2}$, διαπίστωσε ότι δεν ήταν δυνατό να το εκφράσει ως κλάσμα. Υπέδειξε έτσι την πιθανή ύπαρξη ενός εντελώς νέου κόσμου αριθμών, των *αρρήτων* αριθμών. Αυτή ακριβώς η ανακάλυψη κατέστρεψε οριστικά τον κοινό μαθηματικό κόσμο των Πυθαγορείων κλασμάτων. Η ύπαρξη ενός αριθμού που δεν μπορούσε να εκφραστεί ως η λόγος δύο δημιουργιών του Θεού (που ήταν ο τρόπος με τον οποίο σκέφτονταν οι Πυθαγόρειοι τους θετικούς ακεραίους) έθεσε σε κίνδυνο ολόκληρο το λατρευτικό τους σύστημα.

Ο δυστυχής Ίππασος πνίγηκε προφανώς από τους μυστικιστές Πυθαγόρειους, τιμωρούμενος έτσι για τη μετάδοση αυτής της σημαντικής ανακάλυψης στον έξω κόσμο. Αλλά η αντικατάσταση της ιδέας της θεότητας των ακεραίων από την πλουσιότερη έννοια του συνεχούς, ήταν μια εξαιρετικά ουσιαστική εξέλιξη στα Μαθηματικά. Σημείωσε την πραγματική γέννηση της Ελληνικής Γεωμετρίας, η οποία ασχολείται με τις ευθείες, τα επίπεδα και τις γωνίες, τα οποία είναι συνεχή και όχι διακριτά.

Άλλα επιτεύγματα

Μεταξύ άλλων, ο Πυθαγόρας και οι μαθητές του θεωρείται ότι:

- απέδειξαν ότι το άθροισμα των γωνιών τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές, και πιθανώς και τη γενίκευση που δηλώνει ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός κυρτού πολυγώνου με n πλευρές είναι ίσο με $2n - 4$ ορθές,
- ήταν σε θέση να κατασκευάσουν σχήματα δεδομένου εμβαδού και να χρησιμοποιούν απλή γεωμετρική άλγεβρα, για παράδειγμα για την επίλυση εξισώσεων όπως $a(a-x) = x^2$ με γεωμετρικά μέσα,
- καθιέρωσαν τα θεμέλια της Θεωρίας Αριθμών, με τις έρευνές τους για τριγωνικούς, τετράγωνους και επίσης τέλειους αριθμούς (αριθμοί που είναι το άθροισμα των διαιρετών

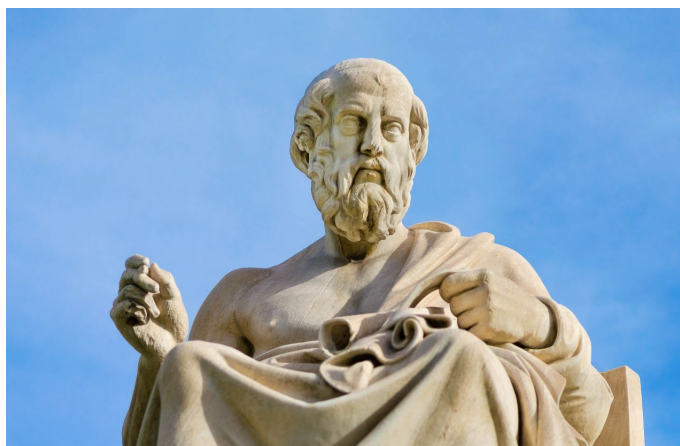
τους). Ανακάλυψαν αρκετές νέες ιδιότητες των τετραγωνικών αριθμών, όπως το τετράγωνο ενός αριθμού n είναι ίσο με το άθροισμα των πρώτων n περιττών αριθμών (π.χ. $4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$). Ανακάλυψαν επίσης τουλάχιστον το πρώτο ζεύγος φίλων αριθμών, 220 και 284 (οι φίλοι αριθμοί είναι ζεύγη αριθμών για τους οποίους το άθροισμα των διαιρετών του ενός αριθμού ισούται με τον άλλο αριθμό, π.χ. 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 και 110, είναι οι διαιρέτες του 220 των οποίων το άθροισμα είναι 284 και οι διαιρέτες των 284 είναι 1, 2, 4, 71 και 142, των οποίων το άθροισμα είναι 220),

- ανακάλυψαν ότι τα διαστήματα μεταξύ αρμονικών μουσικών νοτών έχουν πάντα αναλογίες θετικών ακεραίων αριθμών. Λ.χ., παίζοντας μισό μήκος μιας χορδής κιθάρας δίνει την ίδια νότα με την ανοιχτή χορδή, αλλά μια οκτάβα υψηλότερη. Στο ένα τρίτο του μήκους δίνει μια διαφορετική αλλά αρμονική νότα, κ.λπ.
- Οι αναλογίες μη ακεραίων, τείνουν να δίνουν ανυπόφορους ήχους. Ο Πυθαγόρας περιέγραψε τους τέσσερις πρώτους τόνους της μουσικής αρμονίας: η οκτάβα (1: 1), η τέλεια πέμπτη (3: 2), η τέλεια τέταρτη (4: 3) και το μεγαλύτερο (ματζόρε) τρίτο (5: 4). Ο παλαιότερος τρόπος συντονισμού της χρωματικής κλίμακας 12 νοτών είναι γνωστός ως Πυθαγόρειος συντονισμός.

Ο μυστικιστής Πυθαγόρας ήταν τόσο ενθουσιασμένος από αυτήν την ανακάλυψη, που πείστηκε ότι ολόκληρο το Σύμπαν βασίστηκε σε ακέριους αριθμούς και ότι οι πλανήτες και τα αστέρια κινούνταν σύμφωνα με μαθηματικές εξισώσεις, οι οποίες αντιστοιχούσαν σε μουσικές νότες. Έτσι, οι Πυθαγόρειοι παρήγαγαν ένα είδος συμφωνίας, την «Μουσική των Σφαιρών».

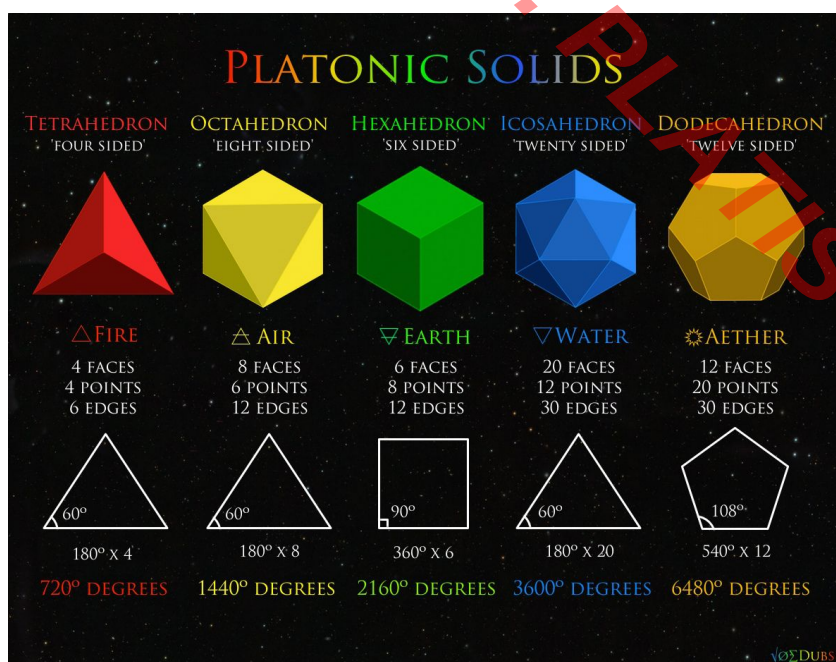
1.3.4 Πλάτων και μαθηματική αυστηρότητα

Αν και συνήθως αναφέρεται ως μέγας φιλόσοφος, ο Πλάτων ήταν επίσης ένας από τους σημαντικότερους αρχαίους Έλληνες Μαθηματικούς. Εμπνευσμένος από τον Πυθαγόρα, ίδρυσε την Ακαδημία του στην Αθήνα το 387 π.Χ., όπου τόνισε τα Μαθηματικά ως τρόπο κατανόησης της πραγματικότητας. Ειδικότερα, ήταν πεπεισμένος ότι η Γεωμετρία ήταν το κλειδί για το ξεκλείδωμα των μυστικών του Σύμπαντος. Επάνω από την είσοδο της Ακαδημίας έγραφε: «Άγεωμέτρητος μηδείς εισίτω».



Πλάτων, 428/27-348/47 π.Χ.

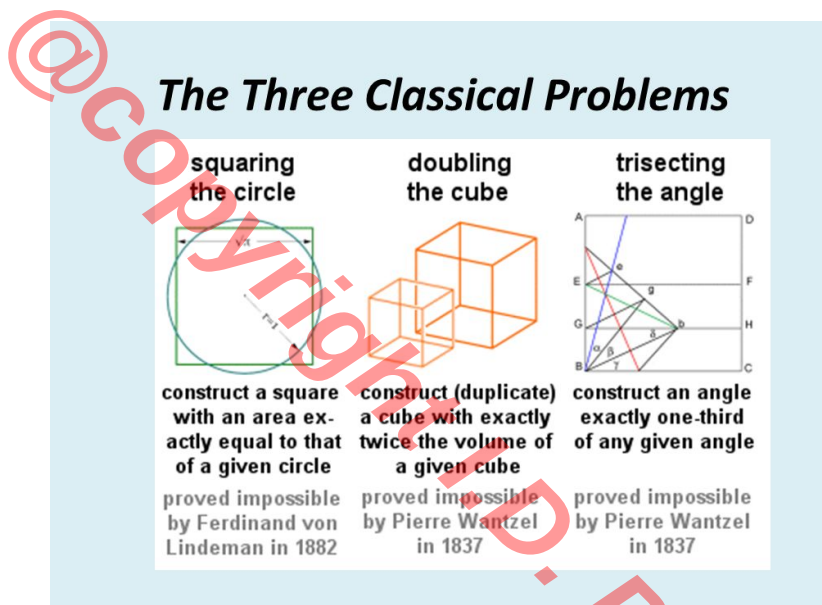
Ο Πλάτων έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ενθάρρυνση και την έμπνευση των Ελλήνων διανοουμένων να μελετήσουν τα Μαθηματικά και τη Φιλοσοφία. Η Ακαδημία του δίδασκε τα Μαθηματικά ως κλάδο της Φιλοσοφίας, όπως είχε κάνει ο Πυθαγόρας, και τα πρώτα δέκα χρόνια του δεκαπενταετούς κύκλου μαθημάτων στην Ακαδημία αφορούσαν τη μελέτη της Γεωμετρίας, της Αστρονομίας και της Μουσικής. Ο Πλάτων έγινε γνωστός ως ο «δημιουργός μαθηματικών», και η Ακαδημία του καυχόταν για μερικούς από τους σημαντικότερους Μαθηματικούς του αρχαίου κόσμου, συμπεριλαμβανομένων των Ευδόξου, Θεαίτητου και Αρχύτα. Απαιτούσε από τους μαθητές του ακριβείς ορισμούς, σαφώς δηλωμένες παραδοχές, και λογική επαγωγική απόδειξη. Επέμενε ότι οι γεωμετρικές αποδείξεις πρέπει να επιδεικνύονται χωρίς βοηθήματα άλλα πλύν του κανόνα και του διαβήτη. Μεταξύ των πολλών μαθηματικών προβλημάτων που έθεσε ο Πλάτων για την έρευνα των μαθητών του ήταν τα λεγόμενα Τρία Κλασικά Προβλήματα που θα δούμε λίγο παρακάτω. Σε κάποιο βαθμό, αυτά τα προβλήματα έχουν ταυτιστεί με τον Πλάτωνα, αν και δεν ήταν ο πρώτος που τα έθεσε. Ο Μαθηματικός Πλάτων είναι ίσως πιο γνωστός για την αναγνώριση των πέντε κανονικών συμμετρικών τρισδιάστατων σχημάτων, τα οποία θεωρούσε ως βάση ολόκληρου του Σύμπαντος, και τα οποία έχουν γίνει γνωστά ως Πλατωνικά Στερεά: το τετράεδρο (κατασκευασμένο από 4 κανονικά τρίγωνα και που για τον Πλάτωνα αντιπροσώπευε τη φωτιά), το οκτάεδρο (αποτελούμενο από 8 τρίγωνα, που αντιπροσωπεύουν τον αέρα), το εικοσάεδρο (αποτελούμενο από 20 τρίγωνα και που αντιπροσωπεύει το νερό), τον κύβο (αποτελούμενο από 6 τετράγωνα, και που αντιπροσωπεύει τη γη), και το δωδεκάεδρο αποτελούμενο από 12 πεντάγωνα, (τα οποία ο Πλάτων ασαφώς περιέγραψε ως αυτά που «ο Θεός χρησιμοποιούσε για την τακτοποίηση των αστερισμών σε ολόκληρο τον ουρανό»).



Πλατωνικά στερεά

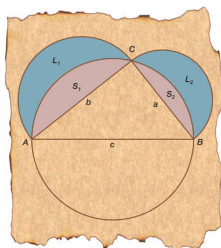
1.3.5 Τρία προβλήματα και τα πρώτα Στοιχεία

Τρία συγκεκριμένα γεωμετρικά προβλήματα, που συχνά αναφέρονται ως τα Τρία Κλασικά Προβλήματα, και που όλα τα οποία πρέπει να επιλυθούν με κανόνα και διαβήτη, χρονολογούνται από τις πρώτες μέρες της Ελληνικής Γεωμετρίας: ο τετραγωνισμός του κύκλου, ο διπλασιασμός του κύβου και η τριχοτόμηση της γωνίας. Αυτά τα άλυτα προβλήματα επηρέασαν σε μεγάλο βαθμό τη μελλοντική Γεωμετρία και οδήγησαν σε πολλές γόνιμες ανακαλύψεις, αν και οι πραγματικές λύσεις τους (ή, όπως αποδείχθηκε, οι αποδείξεις της αδυναμίας λύσης τους) έπρεπε να περιμένουν μέχρι τον 19ο αιώνα.



Τα Τρία Κλασικά Προβλήματα

Ο Ιπποκράτης ο Χίος (δεν πρέπει να συγχέεται με τον μεγάλο ιατρό Ιπποκράτη της Κω), ήταν ο Μαθηματικός που καταπιάστηκε με αυτά τα προβλήματα κατά τη διάρκεια του 5ου αιώνα π.Χ., υπολογίζοντας το εμβαδόν των γνωστών Μηνίσκων του Ιπποκράτη.



Μηνίσκοι του Ιπποκράτη

Το ιδιοφυές (και χαμένο) βιβλίο του «Τα Στοιχεία», που χρονολογείται γύρω στο 440 π.Χ., ήταν η πρώτη συλλογή των Στοιχείων της Γεωμετρίας και το έργο του αποτέλεσε σημαντική πηγή για τη μετέπειτα εργασία του Ευκλείδη.



Ιπποκράτης ο Χίος, 470-410 π.Χ.

1.3.6 Άπειρο και παράδοξα

Πρώτοι οι Έλληνες καταπιόστηκαν με την ιδέα του απείρου, όπως περιγράφεται στα γνωστά παράδοξα που αποδίδονται στον φιλόσοφο Ζήνωνα τον Ελεάτη του 5ου αιώνα π.Χ. Το πιο διάσημο από τα παράδοξά του είναι αυτό του Αχιλλέα και της χελώνας, το οποίο περιγράφει έναν θεωρητικό αγώνα μεταξύ του γοργόφτερου Αχιλλέα και μιας χελώνας. Ο Αχιλλέας δίνει προβάδισμα στην πολύ πιο αργή χελώνα, αλλά όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο εκκίνησης της χελώνας, η χελώνα έχει ήδη προχωρήσει. Μέχρι τη στιγμή που ο Αχιλλέας φτάσει και σε αυτό το σημείο, η χελώνα έχει προχωρήσει πιο πολύ κ.λπ.



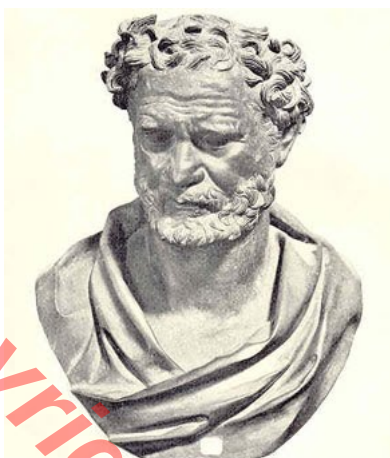
Ο Αχιλλέας και η γεμάτη αυτοπεποίθηση χελώνα

Τα παράδοξα όπως αυτό αλλά και το λεγόμενο *Παράδοξο Διχοτομίας* του Ζήνωνα, βασίζονται στην άπειρη διαιρετότητα του χώρου και του χρόνου και στηρίζονται στην ιδέα ότι το άπειρο άθροισμα

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

δεν συγκλίνει σε κάποιον αριθμό. Το παράδοξο πηγάζει από την υπόθεση ότι είναι αδύνατο να ολοκληρωθεί ένας άπειρος αριθμός διακριτών παύσεων σε ένα πεπερασμένο χρόνο. Εμείς βέβαια γνωρίζουμε πλέον ότι για το συγκεκριμένο παράδοξο η υπόθεση αυτή είναι λανθασμένη. Το άπειρο άθροισμα της γεωμετρικής σειράς με λόγο $1/2$ και πρώτο όρο $1/2$ είναι 1.

Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να διαψεύσει τα παράδοξα, ειδικά επειδή ήταν σταθερά πιστός στην ιδέα ότι το άπειρο θα μπορούσε μόνο να είναι δυναμικό και όχι πραγματικό. Ο Δημόκριτος ο Αβδηρίτης, ο διάσημος για τις προφητικές του ιδέες περί των ατόμων, ήταν επίσης πρωτοπόρος των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας τον 5ο - 4ο αιώνα π.Χ.



Δημόκριτος, περ. 460-περ. 370 π.Χ.

Τα έργα του «Περὶ ἐφαπτομένων», «Περὶ ἀπεικονίσεως» και «Περὶ ἀρρήτων» ἔχουν ὅλα χαθεί. Γνωρίζουμε ὅτι ἦταν ἀπὸ τοὺς πρῶτους που παρατήρησαν ὅτι ἓνας κῶνος (αντ. μία πυραμίδα) ἔχει ὄγκο ἴσο το ἓνα τρίτο τοῦ ὄγκου ἑνὸς κυλίνδρου (αντ. ἑνὸς πρίσματος) με τὴν ἴδια βάση καὶ ὕψος. Ὁ Δημόκριτος ἴσως εἶναι ὁ πρῶτος που ἐξέτασε σοβαρὰ τὴν ἀνάλυση ἀντικειμένων σε ἄπειρο ἀριθμὸ διατομῶν. Ὁ Εὐδόξος ὁ Κνίδιος, μαθητὴς τοῦ Πλάτωνα, πιστώνεται συνήθως με τὴν «μέθοδο τῆς ἐξάντλησης» (που ἀργότερα ἀναπτύχθηκε ἰδιοφυῶς ἀπὸ τὸν Ἀρχιμήδη). Ἡ μέθοδος αὐτὴ συνιστᾷ μιὰ πρῶιμη μέθοδο ολοκλήρωσης μέσω διαδοχικῶν προσεγγίσεων, που ὁ Εὐδόξος χρησιμοποίησε γιὰ τὸν υπολογισμὸ τῶν ὀγκῶν τῆς πυραμίδας καὶ τοῦ κῶνου.



Εὐδόξος, 395/390-342/337 π.Χ.

Ὁ Εὐδόξος ἀνέπτυξε ἐπίσης μιὰ γενικὴ θεωρία ἀναλογιῶν, ἡ ὁποία ἦταν ἐφαρμόσιμη σε ἄρρητα μεγέθη (που δὲν μποροῦν νὰ ἐκφραστοῦν ὡς ἀναλογία δύο ἀκέραιων ἀριθμῶν), ἐπεκτείνοντας ἔτσι τὶς ἀτελεῖς ιδέες τοῦ Πυθαγόρα.

1.4 Η Αξιοματική Γεωμετρία του Ευκλείδη

1.4.1 Απόδειξη και αξιωματική θεμελίωση

Έχουμε ήδη τονίσει ότι η σημαντικότερη συνεισφορά των Ελλήνων στα Μαθηματικά είναι η ιδέα της απόδειξης. Κατά την απόδειξη, χρησιμοποιείται η επαγωγική μέθοδος της χρήσης λογικών βημάτων για τη βεβαίωση ή την απόρριψη των θεωρημάτων. Τα βήματα αυτά βασίζονται σε κάποιες εξ' αρχής υποτιθέμενες αληθείς παραδοχές, τα αξιώματα. Οι Σουμέριοι, Βαβυλώνιοι και Αιγύπτιοι, είχαν στηριχθεί σε επαγωγικό συλλογισμό: επαναλαμβανόμενες επιβεβαιωμένες παρατηρήσεις θεσπίζουν τους κανόνες. Είναι αυτή η έννοια της απόδειξης που δίνει στα Μαθηματικά τη δύναμή της και διασφαλίζει ότι τα αποδεδειγμένα θεωρήματα είναι τόσο αληθή σήμερα όσο ήταν πριν από 2500 χρόνια. Η απόδειξη αποτέλεσε τον θεμέλιο λίθο της συστηματικής αξιωματικής θεώρησης των Μαθηματικών από τον Ευκλείδη και από όλους όσους ήρθαν μετά από αυτόν.

1.5 Ευκλείδης και Στοιχεία

Ο Ευκλείδης ο Αλεξανδρεύς, ο επονομαζόμενος *Πατέρας της Γεωμετρίας και Στοιχειωτής*, έζησε και άκμασε στην Αλεξάνδρεια της Αιγύπτου περί το 300 π.Χ., κατά τη διάρκεια της βασιλείας του Πτολεμαίου Ι. Σχεδόν τίποτα δεν είναι γνωστό για τη ζωή του, και καμία περιγραφή της φυσικής του εμφάνισης δεν έχει επιβιώσει από την αρχαιότητα. Έτσι, οι ύστερες απεικονίσεις του με μακριά γενειάδα και υφασμάτινο καπέλλο σε έργα τέχνης είναι προϊόντα της φαντασίας του αναγεννησιακού καλλιτέχνη.



Ευκλείδης, περ. 325-περ. 270 π.Χ.

Πιθανότατα σπούδασε στην Ακαδημία του Πλάτωνα στην Αθήνα, αλλά, μέχρι την εποχή του Ευκλείδη, η Αλεξάνδρεια υπό την αιγίδα των Πτολεμαίων και με την περίφημη και περιεκτική Βιβλιοθήκη της, είχε ήδη καταστεί αξιόλογος αντίπαλος της μεγάλης Ακαδημίας.

Στοιχεία

Ο Ευκλείδης έγραψε ίσως το πιο σημαντικό και επιτυχημένο μαθηματικό βιβλίο όλων των εποχών, τα «Στοιχεία». Τα Στοιχεία είναι το αποκορύφωμα της μαθηματικής επανάστασης που είχε λάβει χώρα στην Ελλάδα μέχρι εκείνη τη στιγμή. Έγραψε επίσης έργα σχετικά με τη διαίρεση των γεωμετρικών σχημάτων σε μέρη με δεδομένες αναλογίες, για τα κάτοπτρα (τη μαθηματική θεωρία της οπτικής) και για τη σφαιρική αστρονομία (τον προσδιορισμό της θέσης των αντικειμένων στην «ουράνια σφαίρα»), όπως καθώς και σημαντικά κείμενα για τη μουσική.

Τα «Στοιχεία» είναι μια διαυγής και περιεκτική συλλογή και εξήγηση όλων των γνωστών μαθηματικών της εποχής του Ευκλείδη, συμπεριλαμβανομένων των έργων του Πυθαγόρα, του Ιπποκράτη, του Θεαίτητου και του Ευδόξου. Συνολικά, τα Στοιχεία αποτελούνται από 13 βιβλία, που περιέχουν 465 θεωρήματα (προτάσεις) και τις αποδείξεις τους, που περιγράφονται σε καθαρό, λιτό, λογικό και κομψό στυλ. Για τις αποδείξεις χρησιμοποιούνται μόνο ο κανόνας και ο διαβήτης, στις επιταγές του Πλάτωνα. Ο Ευκλείδης επεξεργάστηκε εκ νέου τις μαθηματικές έννοιες των προκατόχων του σε ένα συνεκτικό σύνολο, που έγινε γνωστό ως Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία εξακολουθεί να ισχύει τόσο σήμερα όσο και πριν από 2.300 χρόνια, ακόμη και σε Ανώτερα Μαθηματικά που ασχολούνται με χώρους υψηλότερων διαστάσεων. Μόνο με το έργο των Bolyai, Lobachevsky και Riemann κατά το πρώτο μισό του 19ου αιώνα, θεωρήθηκε καν οποιοδήποτε είδος μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Τα «Στοιχεία» αποτελούσαν το καθοριστικό βιβλίο για τη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά για πάνω από δύο χιλιετίες, επιβιώνοντας στην Ευρώπη κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα μέσω Αραβικών μεταφράσεων. Καθόρισε, για πάντα, το μοντέλο για τη μαθηματική γραφή, που χρησιμοποιεί λογικές επαγωγές από αρχικές υποθέσεις προκειμένου να αποδείξει θεωρήματα.

Στην αρχή του Βιβλίου Α', ο Ευκλείδης παραθέτει τα πλαίσια των γενικών παραδοχών μέσα στα οποία θα κινηθεί εφεξής. Παραθέτει 23 ορισμούς (όροι), 5 αξιώματα (αιτήματα) και κατόπιν 9 γενικές έννοιες (κοιναι έννοιαι) πρὸς συμπλήρωση των προηγούμενων.

Οι πρώτοι 6 ορισμοί:

- α'. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
- β'. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
- γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
- δ'. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κείται.
- ε'. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
- ς'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

Τα 5 αξιώματα:

- α'. Ἡτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
- β'. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχές ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
- γ'. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.
- δ'. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
- ε'. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένης τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Οι 9 γενικές έννοιες:

- α'. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
- β'. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ'. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.

δ'. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

ε'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ς'. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ζ'. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

η'. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μείζον [ἐστίν].

θ'. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Μεταξὺ πολλῶν ἄλλων μαθηματικῶν διαμαντιῶν, τα δεκατρία βιβλία των «Στοιχείων» περιέχουν:

- τύπους για τον υπολογισμό του όγκου στερεών όπως κώνοι, πυραμίδες και κύλινδροι,
- αποδείξεις σχετικά με τις γεωμετρικές σειρές, τους τέλειους και τους πρώτους αριθμούς,
- αλγόριθμους για την εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη και του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου δύο αριθμών,
- μια απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος και του αντιστρόφου του,
- την απόδειξη ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός Πυθαγορείων Τριάδων,
- την οριστική απόδειξη ότι μπορούν να υπάρχουν μόνο πέντε πιθανά κανονικά πλατωνικά στερεά.

Τα «Στοιχεία» περιλαμβάνουν επίσης μια σειρά θεωρημάτων σχετικά με τις ιδιότητες των αριθμών, σηματοδοτώντας τις πρώτες πραγματικές αρχές της θεωρίας αριθμών. Ο Ευκλείδης:

- απέδειξε αυτό που έχει γίνει γνωστό ως *Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής*, ότι δηλαδή κάθε θετικός ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος από 1 μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών (ή είναι ο ίδιος πρώτος αριθμός). Έτσι, λ.χ.:

$$21 = 3 \cdot 7, \quad 113 = 1 \cdot 113, \quad 1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2, \quad 6936 = 2^3 \cdot 3 \cdot 17^2,$$

κ.λπ. Η απόδειξή του θεωρήματος ήταν το πρώτο γνωστό παράδειγμα απόδειξης με *ἀπαγωγή εἰς ἄτοπον*.

- Ήταν ο πρώτος που συνειδητοποίησε - και απέδειξε - ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. Η βάση της απόδειξής του, που είναι συχνά γνωστή ως Θεώρημα Πρώτων του Ευκλείδη, είναι ότι για οποιοδήποτε δοθέν (πεπερασμένο) σύνολο πρώτων, εάν τα στοιχεία του πολλαπλασιαστούν όλα μαζί και στη συνέχεια προστεθεί στο γινόμενο το ένα, τότε απλώς έχει προστεθεί ένας νέος πρώτος στο σύνολο. Η διαδικασία αυτή, μπορεί να επαναληφθεί επ' αόριστον.
- Ο Ευκλείδης εντόπισε επίσης τους πρώτους τέσσερις «τέλειους αριθμούς», δηλαδή, αριθμούς που είναι το άθροισμα όλων των διαιρετών τους (εξαιρουμένου του ίδιου του αριθμού):
 $6 = 1 + 2 + 3,$
 $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14,$
 $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248,$
 $8128 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064.$
 Έδειξε επίσης πολλές άλλες ενδιαφέρουσες ιδιότητες των αριθμών αυτών.

- Παρόλο που οι Πυθαγόρειοι ίσως γνώριζαν τη Χρυσή Τομή (ϕ , περίπου ίση με 1,618), ο Ευκλείδης ήταν ο πρώτος που την καθόρισε μέσω της αναλογίας ($AB: AC = AC: CB$) και έδειξε την φυσιολογική εμφάνισή του σε πολλά γεωμετρικά σχήματα.

1.5.1 20 αιώνες σε μια ανάσα

Λίγο μεταγενέστερος του Ευκλείδη ήταν ο Αρχιμήδης ο Συρακόσιος, ο μεγαλύτερος Έλληνας Μαθηματικός, Φυσικός και Μηχανικός.



Αρχιμήδης, περ. 287-περ. 212 π.Χ.

Έστω και μία απλή παράθεση των επιτευγμάτων του Αρχιμήδη και των θρύλων γύρω από το πρόσωπό του, είναι μία αρκετά μακρόχρονη διαδικασία. Αναφέρουμε εδώ απλώς ότι ο Αρχιμήδης, χρησιμοποιώντας την ιδιοφυή μέθοδο της καθόδου του Ευδόξου, υπολόγισε το πρώτο ολοκλήρωμα (εμβαδόν παραβολικού χωρίου). Χρησιμοποιώντας μεθόδους πέραν του κανόνα και του διαβήτη, κατασκεύασε περίπλοκες καμπύλες, όπως η Αρχιμήδεια σπείρα. Όμως, ο Αρχιμήδης δεν άφησε Σχολή πίσω του, και τα Ελληνιστικά Μαθηματικά, παρ'όλη την κομψότητά τους, δεν σημείωσαν πρόοδο σε σημείο πέραν αυτού που είχε φτάσει ο μέγας Γεωμέτρης.

Στη χρονική διάρκεια μέχρι το 400 μ.Χ. περίπου όπου και ολοκληρώθηκε σε μεγάλο βαθμό η κατάρρευση του αρχαίου κόσμου και η είσοδος στον Μεσαίωνα, σημειώνουμε τη συνεισφορά Μαθηματικών όπως ο Ερατοσθένης, ο Μέναιχμος, ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, ο Μενέλαος, ο Πάππος, κ.α. Ορισμένοι απ'αυτούς, παρατήρησαν ήδη από τότε ορισμένες ασυνέπειες στο μεγαλύτερο έργο του Ευκλείδη-ο Πάππος συνέγραψε και σχόλια πάνω στο Βιβλίο Α'. Μία σπουδαία παρατήρηση που είχε ήδη γίνει από τότε, ήταν ότι το Πέμπτο Αίτημα των παραλλήλων, φαινόταν ανεξάρτητο από τα άλλα τέσσερα Ευκλείδεια αιτήματα, και υπήρξαν προσπάθειες απόδειξής του ως θεώρημα. Με την τελική επικράτηση του Χριστιανισμού, το κλείσιμο των Φιλοσοφικών Σχολών και την είσοδο στις Σκοτεινές Εποχές, κάθε μαθηματική δραστηριότητα σταμάτησε παντελώς.

Μέχρι την Αναγέννηση, οι θεματοφύλακες των μαθηματικών ήταν οι Άραβες. Ερχόμενοι μέσω των κατακτήσεων τους σε επαφή με τα Ελληνικά Μαθηματικά, όχι μόνο τα μετέφρασαν και τα επεξεργάστηκαν, αλλά και σημείωσαν αξιοσημείωτες προόδους την εποχή της ακμής τους παρουσιάζοντας πληθώρα σπουδαίων Μαθηματικών. Είναι γνωστό ότι οι λέξεις άλγεβρα (al-gebr) και αλγόριθμος είναι αραβικής προέλευσης, με την τελευταία να αποτελεί παραφθορά του επωνύμου του σπουδαίου αλγεβριστή Al-Qwarismi. Οι Άραβες διακρίθηκαν μεταξύ άλλων στη λύση εξισώσεων και η μεταλαμπάδευση της γνώσης που είχαν στην Αναγεννησιακή Ιταλία, οδήγησε λ.χ. τον Cardano στην εύρεση τύπων για τη λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης τον 15ο αϊ. μ. Χ.

Το μέγα άλμα στα Μαθηματικά όμως συνέβη λόγω των εργασιών του Νεύτωνα και του Λάϊμπνιτς πάνω στον Απειροστικό Λογισμό καθώς και του Καρτέσιου με την εισαγωγή των συντεταγμένων του. Μετά απ' αυτούς, τα Μαθηματικά δεν ξανακοίταξαν πίσω. Στις αρχές του 19ου αι. συνέβη ίσως το συγκλονιστικότερο γεγονός για τα Μαθηματικά, από την εποχή του Ευκλείδη. Σχεδόν ταυτόχρονα, και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον, οι Bolyai και Lobatchevsky παρατήρησαν ότι απλώς αντικαθιστώντας το Πέμπτο Αίτημα με κάποιο άλλο, προκύπτει μία νέα, μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, που θα γίνει έκτοτε γνωστή ως *Υπερβολική Γεωμετρία*.



János Bolyai, 1802-1860 &
Nikolay Lobatchevsky, 1792-1856

Λίγο αργότερα ο Riemann, μαθητής του Gauss, παρουσιάζει την επαναστατική ιδέα του περί δυνατότητας κατασκευής διαφόρων ειδών Γεωμετριών, εξειδικεύοντας κάθε φορά τον τρόπο που μετράμε την απόσταση πάνω σε ένα γεωμετρικό αντικείμενο.



Bernhardt Riemann, 1826-1866

Ο Klein, μέσω του περίφημου Προγράμματος Erlangen, θεώρησε τις Γεωμετρίες ως ζεύγη αποτελούμενα από ένα αντικείμενο και μία ομάδα που δρά στο αντικείμενο μέσω μετασχηματισμών (1-1 και επί απεικονίσεων).



Felix Klein, 1849-1925

Την ιδέα του Klein εξέλιξε ο Cartan περί το 1930, και αυτή ακριβώς η εξέλιξη απηχεί στην σύγχρονη θεώρηση της Γεωμετρίας.

Και ο Ευκλείδης;

Σε όλη αυτή τη μοντέρνα θεώρηση, η Ευκλείδεια Γεωμετρία εξακολουθεί να παίζει κομβικό ρόλο, τουλάχιστον σε τοπικό επίπεδο. Ήταν λοιπόν αδήριτη η ανάγκη για τους Μαθηματικούς του 19ου αι., και υπό το πλαίσιο της άνθησης της Θεωρίας Συνόλων, να απαλλάξουν την Ευκλείδεια Γεωμετρία από τις όποιες ασυνέπειες. Το μεγαλειώδες αυτό έργο, ανέλαβαν αρκετοί, αλλά το ολοκλήρωσε πρώτος ο Hilbert.

1.6 Σύγχρονη Θεμελίωση της Γεωμετρίας

Τα θεμέλια της Γεωμετρίας είναι η μελέτη των Γεωμετριών ως αξιωματικών συστημάτων. Το πρώτο αξιωματικό σύστημα ήταν αυτό που περιγράφεται από τα αιτήματα τους ορισμούς και τις κοινές έννοιες των Στοιχείων του Ευκλείδη. Ο όρος *Αξιωματική Γεωμετρία* μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε Γεωμετρία που αναπτύσσεται μέσω ενός συστήματος αξιωμάτων, αλλά χρησιμοποιείται συχνά για να σημαίνει την Ευκλείδεια Γεωμετρία που μελετήθηκε πρώτη από αυτήν την άποψη.

Σε ένα αξιωματικό σύστημα παίζουν ιδιαίτερο ρόλο η *πληρότητα* και η *ανεξαρτησία*. Αυτές είναι σημαντικές μαθηματικές ιδιότητες, αλλά υπεισέρχονται επίσης ζητήματα που σχετίζονται με τη διδασκαλία της Γεωμετρίας που εμφανίζονται ως μέρος της όλης εικόνας.

1.6.1 Αξιωματικά συστήματα

Βασιζόμενοι στους Έλληνες και ιδίως στον Ευκλείδη, θεωρούμε ένα *αξιωματικό σύστημα* ως μια φορμαλιστική περιγραφή ενός τρόπου καθιέρωσης της μαθηματικής αλήθειας που πηγάζει από ένα δοθέν και σταθερό σύνολο υποθέσεων. Αν και ισχύει για οποιαδήποτε περιοχή των Μαθηματικών, η Γεωμετρία είναι ο κλάδος εκείνος των στον οποία η μέθοδος αυτή έχει εφαρμοστεί εκτενώς και με επιτυχία.

Σε ένα αξιωματικό σύστημα, υπάρχουν πολλά στοιχεία:

Α. Πρωταρχικοί (απροσδιόριστοι) όροι. Αποτελούν τις πλέον βασικές ιδέες και συνήθως περιλαμβάνουν αντικείμενα και σχέσεις.

Στη Γεωμετρία, τα αντικείμενα είναι πράγματα όπως σημεία, ευθείες και επίπεδα. Θεμελιώδης εδώ είναι η σχέση της *πρόσπτωσης* - δηλαδή του πώς ένα αντικείμενο συναντά ή συνδέεται με ένα άλλο. Οι πρωταρχικοί όροι αυτοί καθαυτοί είναι απροσδιόριστοι και αποτελούν προλογικές έννοιες. Ο Hilbert είπε κάποτε ότι αντί για σημεία, ευθείες και επίπεδα ίσως θα μπορούσαμε να μιλάμε για τραπέζια, καρέκλες και κούπες μπύρας. Με αυτό ήθελε να τονίσει είναι ότι οι πρωταρχικοί όροι είναι απλά κενά κελύφη, και δεν έχουν εγγενείς ιδιότητες.

Β. Αξιώματα. Τα αξιώματα είναι δηλώσεις σχετικές με τους πρωταρχικούς όρους. Λ.χ., δύο σημεία ορίζουν μοναδική ευθεία.

Τα αξιώματα θεωρούνται εκ προοιμίου αληθή και δεν χρήζουν απόδειξης. Είναι τα δομικά στοιχεία των γεωμετρικών εννοιών, δεδομένου ότι καθορίζουν τις ιδιότητες που έχουν οι πρωταρχικοί όροι.

Γ. Οι νόμοι της Λογικής.

Δ. Τα θεωρήματα. Τα θεωρήματα είναι οι λογικές συνέπειες των αξιωμάτων, και προκύπτουν από αυτά μέσω των νόμων της επαγωγικής λογικής.

Ορισμός 1.6.1. Μία *αναπαράσταση* ενός αξιωματικού συστήματος είναι ένας συγκεκριμένος τρόπος για να δοθούν συγκεκριμένες έννοιες στους πρωταρχικούς όρους του συστήματος αυτού.

- Εάν αυτή η συσχέτιση νοημάτων τρέπει τα αξιώματα του συστήματος αληθείς δηλώσεις, τότε η αναπαράσταση ονομάζεται **μοντέλο** του συστήματος.
- Σε ένα μοντέλο, όλα τα θεωρήματα του συστήματος είναι αυτόματα αληθείς δηλώσεις.

1.6.2 Ιδιότητες

Ορισμός 1.6.2. Τα αξιώματα ενός αξιωματικού συστήματος λέγεται ότι είναι *συνεπή* εάν δεν μπορεί να υπάρξει λογική αντίφαση που να προέρχονται από αυτά.

Εκτός ίσως από τα απλούστερα συστήματα, η συνέπεια είναι δύσκολο να δημιουργηθεί σε ένα αξιωματικό σύστημα. Από την άλλη, εάν υπάρχει ένα μοντέλο για το αξιωματικό σύστημα, τότε οποιαδήποτε αντίθεση που παράγεται στο σύστημα μπορεί επίσης να παραχθεί στο μοντέλο, και το αξιωματικό σύστημα είναι τόσο συνεπές όσο οποιοδήποτε σύστημα στο οποίο ανήκει το μοντέλο (αυτό λέγεται και *σχετική συνέπεια* ή *συνέπεια μοντέλου*).

Ορισμός 1.6.3. Ένα αξίωμα ονομάζεται *ανεξάρτητο* εάν δεν μπορεί να αποδειχθεί ή να διαψευστεί από τα άλλα αξιώματα του αξιωματικού συστήματος. Ένα αξιωματικό σύστημα λέγεται ανεξάρτητο εάν κάθε ένα από τα αξιώματά του είναι ανεξάρτητο.

Εάν μια αληθής δήλωση είναι μια λογική συνέπεια ενός αξιωματικού συστήματος, τότε θα είναι επίσης αληθής δήλωση σε κάθε μοντέλο αυτού του συστήματος. Για να αποδείξουμε ότι ένα αξίωμα είναι ανεξάρτητο των υπολοίπων αξιωμάτων του συστήματος, αρκεί να βρεθούν δύο μοντέλα των υπολοίπων αξιωμάτων, ώστε το δοθέν αξίωμα να είναι αληθές στο ένα μοντέλο και ψευδές στο άλλο.

Ορισμός 1.6.4. Ένα αξιωματικό σύστημα ονομάζεται *πλήρες* εάν κάθε δήλωση που εκφράζεται με όρους του συστήματος είναι είτε αποδείξιμη είτε διαψεύσιμη (έχει αποδεκτή άρνηση).

Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι ότι καμμία ανεξάρτητη δήλωση δεν μπορεί να προστεθεί σε ένα πλήρες αξιωματικό σύστημα που είναι συνεπές με τα αξιώματά του.

Ορισμός 1.6.5. Ένα αξιωματικό σύστημα είναι *κατηγορικό* εάν οποιαδήποτε δύο μοντέλα του συστήματος είναι ισομορφικά (ουσιαστικά, υπάρχει μόνο ένα μοντέλο για το σύστημα).

Ένα κατηγορικό σύστημα είναι απαραίτητα πλήρες, αλλά η πληρότητα δεν συνεπάγεται την κατηγορικότητα. Σε ορισμένες περιπτώσεις η κατηγορικότητα δεν είναι επιθυμητή, δεδομένου ότι τα κατηγορικά αξιωματικά συστήματα δεν μπορούν να γενικευτούν. Για παράδειγμα, η αξία του αξιωματικού συστήματος της Θεωρίας Ομάδων, έγκειται στο ότι δεν είναι κατηγορικό. Έτσι, αποδεικνύοντας ένα αποτέλεσμα στην Θεωρία Ομάδων σημαίνει ότι το αποτέλεσμα ισχύει σε όλα τα διαφορετικά μοντέλα της και δεν χρειάζεται να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα σε καθένα από τα μη ισομορφικά μοντέλα.

1.6.3 Κριτική (με σέβας) στον Ευκλείδη

Τα πρότυπα της μαθηματικής αυστηρότητας έχουν αλλάξει δραματικά από την εποχή που ο Ευκλείδης έγραψε τα Στοιχεία. Έχουν υπάρξει σύγχρονες στάσεις και απόψεις σύμφωνα με τις οποίες ο Ευκλείδης προσέγγισε το θέμα ατημέλητα ή/και απρόσεκτα. Όλα αυτά, είναι **ανιστορικές ψευδαισθήσεις**. Ουσιαστική ανάγκη για επανεξέταση των Στοιχείων υπήρξε κατόπιν της ανακάλυψης των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών. Για 2.200 χρόνια τα Στοιχεία λειτούργησαν ως το κύριο βιβλίο αναφοράς για τη Γεωμετρία σε εκατοντάδες γενεών. Διά του αποτελέσματος συνάγεται ότι μάλλον ήταν και το καταλληλότερο βιβλίο για τον σκοπό αυτό. Παραθέτουμε έναν κατάλογο προβληματικών σημείων στην αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη:

- Έλλειψη αναγνώρισης στις έννοιες των πρωταρχικών όρων μεταξύ των αντικειμένων και των εννοιών που πρέπει να παραμείνουν απροσδιόριστο στην ανάπτυξη ενός αξιωματικού συστήματος.
- Η χρήση της υπέρθεσης σε ορισμένες αποδείξεις χωρίς να υπάρχει αξιωματική αιτιολόγηση αυτής της μεθόδου.
- Έλλειψη μιας έννοιας συνέχειας, η οποία απαιτείται για να αποδειχθεί η ύπαρξη ορισμένων σημείων και ευθειών που κατασκευάζει ο Ευκλείδης.
- Έλλειψη σαφήνειας σχετικά με το αν μια ευθεία είναι άπειρη ή χωρίς όρια στο δεύτερο αξίωμα.
- Έλλειψη της έννοιας του *ενδιαμέσου* ή του *μεταξύ* που χρησιμοποιείται, μεταξύ άλλων, για τη διάκριση του μέσα από το έξω σε διάφορα σχήματα.

Ο κατάλογος των αξιωμάτων στα Στοιχεία δεν ήταν εξαντλητικός, αλλά αντιπροσώπευε τις αρχές που φαίνονταν ως οι πλέον σημαντικές. Οι αποδείξεις του συχνά επικαλούνται αξιωματικές έννοιες που δεν παρουσιάστηκαν αρχικά στον κατάλογο των αξιωμάτων του. Δεν αποδεικνύει εσφαλμένα πράγματα όμως εξαιτίας αυτού, εφόσον κάνει χρήση σιωπηρών υποθέσεων των οποίων η εγκυρότητα φαίνεται να δικαιολογείται από τα σχήματα τα οποία συνοδεύουν τις αποδείξεις του. Αργότερα, όπως θα δούμε λίγο παρακάτω πολλοί Μαθηματικοί ενσωμάτωσαν νέα αξιώματα στον επίσημο ας πούμε αξιωματικό κατάλογο του Ευκλείδη, επεκτείνοντας τον κατά πολύ.

Για παράδειγμα, ήδη στην Πρόταση 1 του Βιβλίου Α', ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί μια υπόθεση που ούτε παρουσιάστηκε αξιωματικά ούτε αποδείχθηκε: ότι δύο κύκλοι με κέντρα σε άκρα ευθυγράμμου τμήματος και ακτίνα ίση με το μήκος του τμήματος αυτού τέμνονται σε δύο σημεία. Λίγο αργότερα, στην Πρόταση 4, χρησιμοποιεί την υπέρθεση (τοποθετεί τρίγωνα το ένα πάνω στο άλλο) για να αποδείξει το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ των τριγώνων. Οι ιδιότητες της υπέρθεσης δεν περιγράφονται ρητά στις κοινές έννοιες ή στα αξιώματα. Εάν η υπέρθεση μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη μέθοδος γεωμετρικής απόδειξης, τότε όλη η Γεωμετρία θα ήταν γεμάτη από τέτοιες αποδείξεις. Για παράδειγμα, οι Προτάσεις 1 έως 3 του Βιβλίου Α' μπορούν να αποδειχθούν τετριμμένα χρησιμοποιώντας υπέρθεση.

1.6.4 Καλύπτοντας τα κενά των Στοιχείων

Για την αντιμετώπιση αυτών των ζητημάτων, διάφοροι συγγραφείς προσπάθησαν είτε να συμπληρώσουν τα κενά στην παρουσίαση του Ευκλείδη, με την πλέον αξισημείωτη προσπάθεια αυτή του D. Hilbert, είτε να παρουσιάσουν ένα αξιωματικό σύστημα γύρω από διαφορετικές έννοιες, όπως έκανε ο G.D. Birkhoff. Από τις προ-Χίλμπερτικές προσπάθειες, ξεχωρίζουν αυτές των Pasch, Peano και Pieri.

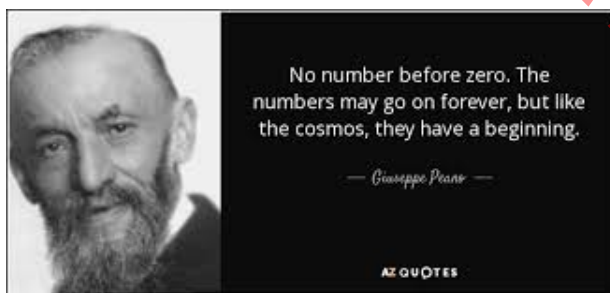


Moritz Pasch, 1843-1930

Ο Pasch:

- έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης αξιωματικής μεθόδου,
- θεώρησε την έννοια των πρωταρχικών όρων,
- μαζί με τα αξιώματα κατασκεύασε ένα φορμαλιστικό σύστημα σχετικά απαλλαγμένο από διαισθητικές επιρροές: θεωρούσε ότι στο μόνο μέρος όπου η διαίσθηση πρέπει να διαδραματίζει ρόλο είναι να αποφασίζει ποιες πρέπει να είναι πρωταρχικές έννοιες και ποια τα αξιώματα. Έτσι, για τον Pasch, το σημείο είναι μια πρωταρχική έννοια αλλά η ευθεία δεν είναι, μιας και έχουμε καλή διαίσθηση για σημεία, αλλά κανείς δεν έχει δει ποτέ ή είχε εμπειρία μιας άπειρης ευθείας. Η πρωταρχική έννοια που χρησιμοποιεί ο Pasch στη θέση της ευθείας είναι το ευθύγραμμο τμήμα.

Η εργασία του Pasch ενέπνευσε τόσο τον Hilbert, όσο και τον Peano.



Giuseppe Peano, 1858-1932

Το έργο του Peano του 1889 για τη Γεωμετρία, που είναι σε μεγάλο βαθμό μια μετάφραση της πραγματείας του Pasch πάνω στο συμβολισμό της λογικής (τον οποίο εφηύρε ο Peano), χρησιμοποιεί τις πρωταρχικές έννοιες του σημείου και του ενδιάμεσου. Ο Peano σπάει οριστικά τον εμπειρικό δεσμό στην επιλογή πρωταρχικών όρων και αξιωμάτων που απαιτούσε ο Pasch. Για τον Peano, το όλο σύστημα είναι καθαρά φορμαλιστικό, απαλλαγμένο από οποιαδήποτε εμπειρική πληροφορία.



Mario Pieri, 1860-1913

Ο Pieri πήρε μια διαφορετική προσέγγιση και θεώρησε ένα σύστημα στο οποίο υπήρχαν μόνο δύο πρωταρχικές έννοιες, αυτές του σημείου και της κίνησης. Ο Pasch είχε χρησιμοποιήσει τέσσερις πρωταρχικές έννοιες και ο Peano τις είχε μειώσει σε τρεις, αλλά και οι δύο αυτές προσεγγίσεις βασίστηκαν στην έννοια του ενδιαμέσου που ο Pieri αντικατέστησε με την έννοια της κίνησης. Το 1905 ο Pieri έδωσε την πρώτη αξιωματική επεξεργασία στις Μιγαδικής Προβολικής Γεωμετρίας που δεν βασιζόταν στην κατασκευή της Πραγματικής Προβολικής Γεωμετρίας.

1.6.5 Η θεμελίωση του Hilbert

Στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, κατά τη χειμερινή περίοδο 1898-1899, ο περίφημος Γερμανός μαθηματικός Hilbert παρουσίασε μια σειρά μαθημάτων σχετικά με τα θεμέλια του Pieri. Κατόπιν αιτήματος του Klein, ο Hilbert έγραψε τις σημειώσεις των διαλέξεων αυτών εγκαίρως για το καλοκαίρι του 1899, ώστε να παρουσιαστούν σε μία τελετή αφιερωμένη στη μνήμη των C.F. Gauss και W. Weber που πραγματοποιήθηκε στο πανεπιστήμιο. Οι σημειώσεις αυτές δημοσιεύθηκαν τον Ιούνιο του 1899 με τον τίτλο Grundlagen der Geometrie (Θεμέλια της Γεωμετρίας). Η επιρροή του βιβλίου αυτού ήταν άμεση.



David Hilbert, 1862-1943

Αναφέρει ο Eves στην *Ιστορία των Μαθηματικών* του: *Η ανάπτυξη ενός συνόλου αξιωμάτων για την Ευκλείδεια γεωμετρία δεν απομακρύνεται πολύ από το πνεύμα του Ευκλείδη. Με τη χρήση ενός minimum συμβολισμού, ο Hilbert κατάφερε να πείσει τους μαθηματικούς, σε πολύ μεγαλύτερη έκταση από ό, τι οι Pasch και Peano, για την καθαρά υποθετική-επαγωγική φύση της γεωμετρίας. Αλλά, η επιρροή του έργου του Hilbert προχώρησε πολύ πέρα από αυτό: διότι, υποστηριζόμενη από την αυθεντία του συγγραφέα, εμφύτευσε καίρια την αξιωματική μέθοδο όχι μόνο στη γεωμετρία, αλλά και ουσιαστικά σε κάθε άλλο κλάδο των μαθηματικών. Το κίνητρο για την ανάπτυξη των θεμελίων των μαθηματικών που παρέχεται στο μικρό βιβλίο του Hilbert είναι δύσκολο να υπερεκτιμηθεί. Χωρίς τον περιεργο συμβολισμό των έργων του Pasch και του Peano, η εργασία του Hilbert μπορεί να διαβαστεί από κάθε έξυπνο μαθητή του γυμνασίου.*

Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert θεωρεί έξι πρωταρχικές έννοιες: σημείο, ευθεία, επίπεδο, μεταξύ, κείται επί (περιέχεται) και ισοδυναμίας (congruence). Όλα τα σημεία, οι ευθείες και τα επίπεδα στα ακόλουθα αξιώματα είναι διακριτά εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

I. Πρόσπτωση.

1. Για κάθε δύο σημεία A και B υπάρχει μια ευθεία α που περιέχει και τα δύο.
2. Για κάθε δύο σημεία δεν υπάρχουν περισσότερες από μία ευθείες που να περιέχουν και τα δύο.
3. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία σε μία ευθεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία που δεν βρίσκονται στη ίδια ευθεία.
4. Για κάθε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία υπάρχει ένα επίπεδο α που περιέχει όλα τα σημεία. Για κάθε επίπεδο υπάρχει σημείο που κείται στο επίπεδο.
5. Για κάθε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, δεν υπάρχουν περισσότερα από ένα επίπεδα που τα περιέχει όλα.
6. Εάν δύο σημεία A, B μιας ευθείας βρίσκονται σε επίπεδο α , τότε κάθε σημείο βρίσκεται στο α .
7. Εάν δύο επίπεδα α , β έχουν κοινό σημείο A, τότε έχουν τουλάχιστον ένα δεύτερο κοινό σημείο B.
8. Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

II. Διάταξη.

1. Εάν το σημείο B βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και C, το B βρίσκεται επίσης μεταξύ C και A και υπάρχει μια ευθεία που περιέχει τα διακριτά σημεία A, B, C.
2. Εάν τα A και C είναι δύο σημεία μιας ευθείας, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο B που βρίσκεται μεταξύ των A και C.
3. Από τα τρία σημεία που βρίσκονται σε μια ευθεία, δεν υπάρχουν περισσότερα από ένα που βρίσκονται μεταξύ των άλλων δύο.
4. *Αξίωμα του Pasch*: Έστω A, B, C να είναι τρία σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και έστω α μια ευθεία που βρίσκεται στο επίπεδο ABC και δεν διέρχεται από κανένα από τα σημεία A, B, C. Τότε, εάν η ευθεία α διέρχεται από σημείο του τμήματος AB, θα διέρχεται επίσης είτε από ένα σημείο του τμήματος BC είτε από ένα σημείο του τμήματος AC.

III. Ισοδυναμία.

1. Αν τα A, B είναι δύο σημεία στην ευθεία α , και αν το A' είναι ένα σημείο στην ίδια ή άλλη ευθεία α' , τότε, επάνω σε μια δοθείσα πλευρά του A' και στην ευθεία α' , μπορούμε πάντα να βρούμε ένα σημείο B' έτσι ώστε το τμήμα AB να είναι ισοδύναμο με το τμήμα A'B' ($AB \cong A'B'$).

2. Εάν το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι ισοδύναμο με το τμήμα $A'B'$ και επίσης με το τμήμα $A''B''$, τότε το τμήμα $A'B'$ είναι ισοδύναμο με το τμήμα $A''B''$ ($AB \simeq A'B', AB \simeq A''B'' \implies A'B' \simeq A''B''$).
3. Έστω AB και BC δύο τμήματα ευθείας α με μόνο κοινό σημείο το B , και έστω $A'B'$ και $B'C'$ δύο τμήματα της ίδιας ή άλλης ευθείας με μόνο κοινό σημείο το B' . Τότε, εάν $AB \simeq A'B'$ και $BC \simeq B'C'$, έχουμε $AC \simeq A'C'$.
4. Εάν η $\angle ABC$ είναι γωνία και εάν το $B'C'$ είναι τμήμα, τότε υπάρχει ακριβώς ένα τμήμα $B'A'$ σε κάθε πλευρά του $B'C'$ έτσι ώστε η $\angle A'B'C'$ να είναι ισοδύναμη με την $\angle ABC$. Επιπλέον, κάθε γωνία είναι ισοδύναμη με τον εαυτό της.
5. Το κριτήριο ΠΓΠ της περιεχομένης γωνίας.

IV. Παράλληλοι.

1. Ευκλείδειο Αξίωμα: από σημείο εκτός δοθείσης ευθείας, περνά το πολύ μία παράλληλος προς την ευθεία.

V. Συνέχεια.

1. (Αρχιμήδειο Αξίωμα). Εάν τα AB και CD είναι τμήματα, τότε υπάρχει ένας αριθμός n έτσι ώστε n αντίγραφα του CD που κατασκευάζονται συνεχώς από το A κατά μήκος της ακτίνας AB θα περάσουν πέραν του σημείου B .
2. (Πληρότητα των ευθειών). Είναι αδύνατη η επέκταση του συνόλου σημείων μιας ευθείας με τις σχέσεις διάταξης και ισοδυναμίας που θα διατηρούσαν τις υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των αρχικών στοιχείων καθώς και τις θεμελιώδεις ιδιότητες της διάταξης ευθειών και ισοδυναμίας (Αξιώματα I-III και V-1).

Προχωρώντας πέρα από την καθιέρωση ενός ικανοποιητικού συνόλου αξιωμάτων, ο Hilbert απέδειξε επίσης τη συνέπεια του συστήματός του σε σχέση με τη θεωρία των πραγματικών αριθμών, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο του συστήματος από τους πραγματικούς αριθμούς. Απέδειξε την ανεξαρτησία ορισμένων από τα αξιώματά του κατασκευάζοντας μοντέλα Γεωμετριών που ικανοποιούν όλα εκτός από το ένα υπό εξέταση αξίωμα. Έτσι, υπάρχουν παραδείγματα Γεωμετριών που ικανοποιούν όλα εκτός από το Αρχιμήδειο Αξίωμα (μη Αρχιμήδεια Γεωμετρία), εκτός από το Αξίωμα των Παράλληλων IV.1 (μη Ευκλείδεια γεωμετρίες) κ.ο.κ.

Χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική επίσης έδειξε πώς ορισμένα σημαντικά θεωρήματα εξαρτώνταν από ορισμένα αξιώματα και ήταν ανεξάρτητα από άλλα. Μερικά από τα μοντέλα του ήταν πολύ περίπλοκα και άλλοι Μαθηματικοί προσπάθησαν να τα απλοποιήσουν. Για παράδειγμα, το μοντέλο του Hilbert που χρησιμοποίησε για να δείξει την ανεξαρτησία του Θεωρήματος Desargues (θα το δούμε στην Προβολική Γεωμετρία) από ορισμένα αξιώματα, οδήγησε τον R. Moulton να ανακαλύψει το μη-Desarguesian Moulton επίπεδο. Αυτές οι έρευνες του Hilbert ουσιαστικά εγκαινίασαν τη σύγχρονη μελέτη της αφηρημένης Γεωμετρίας τον εικοστό αιώνα. Άλλες θεμελιώσεις ήταν λ.χ. αυτές του Birkhoff και του Weblen. Κατά τη διάρκεια του 20ου αι. υπήρξε μεγάλη συζήτηση για το πως μπορούσε να περάσει η θεώρηση του Hilbert στη διδασκαλία της σχολικής Γεωμετρίας. Αυτό ώθησε τον Saunders MacLane στην εισαγωγή μίας ακόμη θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, προσιτής στους μαθητές. Με την ανακάλυψη των μη-Ευκλειδίων Γεωμετριών προέκυψε μεταξύ άλλων και το πρόβλημα θεμελίωσης τους. Η μεγαλοφυής ιδέα του Klein να ορίσει ως Γεωμετρία κάθε ζεύγος που αποτελείται από έναν μη κενό χώρο και μία ομάδα μετασχηματισμών του, μας απαλλάσσει από αυτό το πρόβλημα. Σε τέτοιες Γεωμετρίες, όπως θα δούμε στην επόμενο κεφάλαιο, δεν υπάρχουν αξιώματα παρά μόνο θεωρήματα.

Κεφάλαιο 2

Γεωμετρία κατά Klein

Οι ομάδες παίζουν κεντρικό ρόλο στην πραγμάτευση των σημειώσεων αυτών αλλά και στη Γεωμετρία ειδικότερα. Το 1872 ο Felix Klein δημοσίευσε το πρόγραμμα Erlangen όπου πρότεινε ένα σύστημα ταξινόμησης και σύγκρισης των έως τότε υπαρχουσών Γεωμετριών. Η ιδέα ήταν να χρησιμοποιήσει την άλγεβρα για να περιγράψει τους μετασχηματισμούς που διατηρούν τις αναλλοίωτες του υποκείμενου χώρου της Γεωμετρίας. Οι μετασχηματισμοί σχηματίζουν μια αλγεβρική ομάδα που δρα στο χώρο, καθιστώντας τον *ομογενή*. Ήταν ο Klein αυτός που πρώτος παρατήρησε ότι τα περισσότερα (αν όχι όλα) ενδιαφέροντα γεωμετρικά αντικείμενα μπορούν να παρασταθούν από πηλίκια ομάδων. Από την άλλη, όπως θα δούμε παρακάτω, μία Γεωμετρία κατά τον Klein δεν είναι τίποτε άλλο από ένας μη κενός χώρος εφοδιασμένος με μία ομάδα μετασχηματισμών που δρα πάνω στον χώρο αυτόν. Προς το παρόν, παραθέτουμε τα απολύτως απαραίτητα από τη Θεωρία Ομάδων που πρέπει να κατέχει ο αναγνώστης και η αναγνώστριά.

2.1 Στοιχειώδης Θεωρία Ομάδων

2.1.1 Ομάδες και υποομάδες

Έστω σύνολο $G \neq \emptyset$ και πράξη $\cdot$ ορισμένη στο $G \times G$ με τιμές στο G που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Προσεταιριστική: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, για κάθε $x, y, z \in G$.
2. Ουδέτερο στοιχείο: υπάρχει $e \in G$ τέτοιο ώστε $x \cdot e = e \cdot x = x$, για κάθε $x \in G$.
3. Αντίστροφο στοιχείο: για κάθε $x \in G$ υπάρχει $x^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Εάν ικανοποιούνται τα παραπάνω τότε το ζεύγος $(G, \cdot)$ (ή απλώς η G αν δεν χρειάζεται να τονίσουμε την πράξη) καλείται *ομάδα* (με πράξη (ή πολλαπλασιασμό) $\cdot$).

Εαν επιπλέον ισχύει και η ιδιότητα

(Ab)

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \text{για κάθε } x, y \in G,$$

τότε η G καλείται *αβελιανή ομάδα*.

Ορισμένα σημαντικά παραδείγματα ομάδων, του άμεσου ενδιαφέροντός μας είναι τα παρακάτω:

Παράδειγμα 2.1.1. Η γενική γραμμική ομάδα

$$\mathrm{GL}(n, F) = \{A \in M^{n \times n}(F) \mid \det(A) \neq 0\},$$

όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $M^{n \times n}(F)$ είναι το σύνολο των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F . Η πράξη είναι ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

Δείχνουμε ότι η $\mathrm{GL}(n, F)$ είναι ομάδα:

- Κλειστότητα: για κάθε $A, B \in \mathrm{GL}(n, F)$,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0.$$

- Προσεταιριστικότητα (από τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων): για κάθε $A, B, C \in \mathrm{GL}(n, F)$,

$$(AB)C = A(BC).$$

- Ουδέτερο στοιχείο είναι ο τετραγωνικός μοναδιαίος πίνακας I_n : για κάθε $A \in \mathrm{GL}(n, F)$,

$$AI_n = I_n A = A.$$

- Αντίστροφο στοιχείο: κάθε $A \in \mathrm{GL}(n, F)$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Αν A^{-1} είναι ο αντίστροφός του, τότε

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Προσοχή! Η $\mathrm{GL}(n, F)$ δεν είναι αβελιανή ομάδα εφόσον ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι εν γένει μεταθετική πράξη.

Σχόλιο 2.1.2. Κάθε στοιχείο A της $\mathrm{GL}(n, F)$ μπορεί να ταυτιστεί με μία 1-1 και επί γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ (ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$): αν $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία γραμμική απεικόνιση και $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ είναι τα στοιχεία της κανονικής βάσης, τότε ο πίνακας A της α είναι ο πίνακας εκείνος που έχει στήλες τα $(\alpha(\mathbf{e}_1))^T, \dots, (\alpha(\mathbf{e}_n))^T$, δηλαδή τα αντίστοιχα ανάστροφα των διανυσμάτων $\alpha(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$. Από την άλλη, αν είναι τετραγωνικός πίνακας και $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, n$ είναι οι γραμμές του, τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ η απεικόνιση

$$\alpha(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \right)$$

(αυτή δηλαδή που προκύπτει από την

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto A\mathbf{x}),$$

είναι γραμμική. Στο εξής θα εναλλασσόμαστε μεταξύ της γραμμικής απεικόνισης α και του πίνακα A που αντιστοιχεί σε αυτήν, έχοντας πάντα υπόψη αυτή τη σχέση μεταξύ τους.

Παράδειγμα 2.1.3. • Η ειδική γραμμική ομάδα

$$\mathrm{SL}(n, F) = \{A \in \mathrm{GL}(n, F) \mid \det(A) = 1\}.$$

• Η ορθογώνια ομάδα

$$\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}.$$

• Η ειδική ορθογώνια ομάδα

$$\mathrm{SO}(n) = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\}.$$

• Η μονική (unitary) ομάδα

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \mid A^{-1} = \overline{A^T}\}.$$

• Η ειδική μονική ομάδα

$$\mathrm{SU}(n) = \mathrm{SU}(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathrm{U}(n) \mid \det(A) = 1\}.$$

Σχόλιο 2.1.4. Για κάθε $A \in \mathrm{O}(n)$,

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(A^{-1}) = 1/\det(A) \implies \det(A) = \pm 1.$$

Για κάθε $A \in \mathrm{U}(n)$,

$$\begin{aligned} |\det(A)|^2 &= \det(A) \cdot \overline{\det(A)} \\ &= \det(A) \cdot \det(\overline{A^T}) \\ &= \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

Εξ ορισμού κάθε δύο διαφορετικές μεταξύ τους γραμμές (αντ. στήλες) ενός ορθογωνίου (ααντ. μονικού) πίνακα είναι κάθετες όταν ειπωθούν σαν διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ (αντ. του $\mathbb{C}^n$). Επίσης, πάλι εξ ορισμού, το εσωτερικό (αντ. ερμιτιανό) γινόμενο κάθε γραμμής (αντ. στήλης) ενός ορθογωνίου (αντ. μονικού) πίνακα με τον εαυτό της είναι πάντοτε 1 (θα ορίσουμε αυστηρά το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ στο επόμενο κεφάλαιο).

Μέχρι στιγμής, είδαμε ομάδες που είναι ομάδες πινάκων. Άλλες, στοιχειώδεις ομάδες είναι οι $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R}_*, \cdot)$. Η πρώτη μη στοιχειώδης ομάδα που θα συναντήσουμε λίγο αργότερα είναι η $E(n)$, η ομάδα των *Ενκλείδειων ισομετριών του $\mathbb{R}^n$* . Η πράξη αυτής της ομάδας είναι η σύνθεση συναρτήσεων. Θα ορίσουμε την ομάδα αυτή (καθώς και την έννοια των *ισομετριών*) αυστηρά στο επόμενο κεφάλαιο, αλλά προς το παρόν, θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι η $E(2)$ αποτελείται από μεταφορές κατά διάνυσμα, περιστροφές και ανακλάσεις πάνω σε ευθείες του $\mathbb{R}^2$.

2.1.2 Υποομάδες

Έστω $(G, \cdot)$ ομάδα και $\emptyset \neq H \subset G$ υποσύνολό της για το οποίο ισχύουν τα εξής:

1. $e \in H$.
2. Αν $h \in H$ τότε και $h^{-1} \in H$.
3. Αν $h_1, h_2 \in H$ τότε και $h_1 \cdot h_2 \in H$.

Τότε, η H λέγεται *υποομάδα της G* και συμβολίζουμε με $H < G$ (απαντάται και ο συμβολισμός $H \leq G$).

Το παρακάτω κριτήριο συμπυκνώνει τις ιδιότητες της υποομάδας σε μία:

Κριτήριο 2.1.5. $H < G$ αν και μόνο αν $e \in H$ και για κάθε $h_1, h_2 \in H$ είναι και

$$h_1 \cdot h_2^{-1} \in H.$$

Παράδειγμα 2.1.6. • Η $\{e\}$ είναι υποομάδα κάθε ομάδας που έχει το e ως ουδέτερο στοιχείο.

- $SL(n, F) < GL(n, F)$.
- $SO(n) < O(n)$.
- $O(n) < E(n)$. Αυτό, θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 2.1.7. Έστω G ομάδα και $H < G$. Το (αριστερό) πλευρικό σύνολο (*left coset*) gH της H ως προς $g \in G$ είναι το

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Σχόλιο 2.1.8. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται τα δεξιά πλευρικά σύνολα Hg της H ως προς $g \in G$. Τα (αριστερά ή δεξιά) πλευρικά σύνολα είναι ισομεγέθη σύνολα με τα οποία μπορούμε να διαιρέσουμε την G μέσω της H .

Παράδειγμα 2.1.9. Έστω $G = \mathbb{Z}$ η προσθετική ομάδα των ακεραίων και H η υποομάδα των αρτίων. Αν $g = 1$, τότε

$$1 + H = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}.$$

Παρατηρήστε: Το $1 + H$ δεν είναι υποομάδα της $\mathbb{Z}$.

Εάν $g \in H$, τότε $gH = Hg = H$. Γενικά όμως, δεν ισχύει $gH = Hg$ για τυχαίο $g \in G$.

Ορισμός 2.1.10. Εάν η H είναι υποομάδα της G , τότε λέγεται *κανονική* αν $gH = Hg$ για κάθε $g \in G$. Συμβολίζουμε $H \triangleleft G$.

Παράδειγμα 2.1.11. • $\{e\} \triangleleft G, G \triangleleft G$.

- Κάθε υποομάδα αβελιανής ομάδας είναι κανονική.
- $(\mathbb{R}^n, +) \triangleleft E(n)$. (Θα το δούμε αργότερα).

Ένα κριτήριο για να διαπιστώσουμε εάν μία υποομάδα είναι κανονική, είναι το παρακάτω:

Κριτήριο 2.1.12. Έστω G ομάδα και $H < G$. Τότε $H \triangleleft G$ αν και μόνο αν

$$ghg^{-1} \in H, \text{ για κάθε } g \in G, h \in H.$$

2.1.3 Γινόμενα ομάδων

Ορισμός 2.1.13. Έστω G ομάδα, $H < G$ και $N \triangleleft G$. Τότε το σύνολο

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$$

λέγεται γινόμενο των H, N .

Επειδή $N \triangleleft G$, το HN είναι ομάδα, με πράξη την πράξη της G . Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση αυτή είναι $HN = NH$ οπότε η σειρά που γράφουμε το γινόμενο δεν έχει σημασία.

Ορισμός 2.1.14. Έστω $(G_1, \cdot)$ και $(G_2, \star)$ ομάδες. Το *ευθύ γινόμενο* των G_1, G_2 είναι το σύνολο $G_1 \times G_2$ εφοδιασμένο με την πράξη

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1 \cdot h_1, g_2 \star h_2), \quad (2.1)$$

για κάθε $(g_i, h_i) \in G_1 \times G_2, i = 1, 2$. Η πράξη αυτή δίνει δομή ομάδας στο $G_1 \times G_2$.

Παράδειγμα 2.1.15.

$$(\mathbb{R}^n, +) = (\mathbb{R}, +) \times \cdots \times (\mathbb{R}, +).$$

2.1.4 Ομάδα πηλίκου

Ορισμός 2.1.16. Έστω G ομάδα και $N \triangleleft G$. Το σύνολο όλων των αριστερών πλευρικών συνόλων

$$G/N = \{gN \mid g \in G\},$$

καλείται ομάδα πηλίκου της G με την N .

Η ομάδα πηλίκου G/N είναι όντως ομάδα:

- Το ουδέτερο στοιχείο της είναι το eN , όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G ,
- η πράξη είναι η $(aN) \cdot (bN) = (a \cdot_G b)N$,
- για κάθε $aN \in G/N, (aN)^{-1} = a^{-1}N$.

2.1.5 Ομομορφισμοί ομάδων

Ορισμός 2.1.17. Έστω G_1, G_2 ομάδες και $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ απεικόνιση. Η ϕ λέγεται *ομομορφισμός* αν

$$\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y), \quad \text{για κάθε } x, y \in G_1.$$

Τονίζουμε ότι η πράξη στο αριστερό σκέλος είναι η πράξη της G_1 ενώ η πράξη στο δεξιό σκέλος είναι η πράξη της G_2 . Η ϕ λέγεται:

- *μονομορφισμός* αν η ϕ είναι 1-1.
- *επιμορφισμός* αν η ϕ είναι επί.
- *ισομορφισμός* αν η ϕ είναι 1-1 και επί.

2.1.6 Ισομορφισμοί ομάδων

Ο ισομορφισμός είναι ένα εύχρηστο εργαλείο ελέγχου του αν δύο ομάδες έχουν την ίδια αλγεβρική δομή. Έστω $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ ομομορφισμός.

- Ο πυρήνας του ομομορφισμού ϕ είναι το σύνολο

$$\ker(\phi) = \{x \in G_1 \mid \phi(x) = e_2\}.$$

Είναι $\ker(\phi) \triangleleft G_1$ και η ϕ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\ker(\phi) = \{e_1\}$.

- Η εικόνα του ομομορφισμού ϕ είναι το σύνολο

$$\text{Im}(\phi) = \{y \in G_2 \mid \exists x \in G_1 : y = \phi(x)\}.$$

Είναι $\text{Im}(\phi) < G_2$ και η ϕ είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $\text{Im}(\phi) = G_2$.

- Η $G_1/\ker(\phi)$ είναι ισόμορφη με την $\text{Im}(\phi)$ (Πρώτο Θεώρημα Ισομορφισμού Ομάδων).

Παράδειγμα 2.1.18. Με χρήση των παραπάνω θα δείξουμε ότι $\text{SL}(n, F) \triangleleft \text{GL}(n, F)$. Έστω η πολλαπλασιαστική ομάδα $(F_*, \cdot)$ και ο ομομορφισμός

$$\text{GL}(n, F) \ni A \mapsto \det(A) \in F_*.$$

Ο πυρήνας είναι η $\text{SL}(n, F) \triangleleft \text{GL}(n, F)$. Παρομοίως αποδεινύεται ότι $\text{SO}(n) \triangleleft \text{O}(n)$, $\text{SU}(n) \triangleleft \text{U}(n)$.

Ενας ισομορφισμός $\phi : G \rightarrow G$ καλείται *αυτομορφισμός*. Το σύνολο των αυτομορφισμών της G συμβολίζεται με $\text{Aut}(G)$ και αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

2.1.7 Ημιευθέα γινόμενα ομάδων

Η ακόλουθη πρόταση ορίζει το ημιευθύ γινόμενο ομάδων.

Πρόταση 2.1.19. Έστω G ομάδα, $H < G$, $N \triangleleft G$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $G = NH$, $N \cap H = \{e\}$.
2. Κάθε στοιχείο $g \in G$ γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν $g = nh$, $n \in N$, $h \in H$.
3. Η απεικόνιση $\phi : H \rightarrow G/N$, $h \mapsto hN$, είναι ισομορφισμός.

Εξηγούμε στο σημείο αυτό ότι η $\phi : H \rightarrow G/N$ είναι η σύνθεση $\pi \circ \iota$ του επιμορφισμού $\pi : G \rightarrow G/N$, $g \mapsto gN$ και του μονομορφισμού $\iota : H \rightarrow G$, $h \mapsto h$.

Ορισμός 2.1.20. Εάν ισχύει ένα από τα παραπάνω, λέμε ότι η G είναι το ημιευθύ γινόμενο των N και H και γράφουμε

$$G = N \rtimes H.$$

Το υποβόσκον σύνολο είναι το καρτεσιανό γινόμενο $N \times H$, όμως η πράξη της ομάδας είναι διαφορετική. Για την ακρίβεια, αν $(n_i, h_i) \in N \times H$, $i = 1, 2$, τότε

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 h_1 n_2 h_1^{-1}, h_1 h_2).$$

Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι

$$E(n) = T(n) \rtimes O(n),$$

όπου $T(n)$ είναι η ομάδα μεταφορών του $\mathbb{R}^n$ και $O(n) = O(n, \mathbb{R})$ η πραγματική ορθογώνια ομάδα. Προς το παρόν, θα μελετήσουμε σε λίγο μεγαλύτερο βάθος την $E(2)$ στην επόμενη ενότητα.

Οι ομάδες $T(2)$, $O(2)$ ως υποομάδες της $E(2)$

Έχουμε ήδη αναφέρει την $E(n)$ ως την ομάδα των Ευκλείδειων ισομετριών του $\mathbb{R}^n$. Γινόμαστε τώρα λίγο πιο συγκεκριμένοι για την περίπτωση $n = 2$. Θυμίζουμε ότι αν $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ τότε $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μήκος του διανύσματος (x, y) (Ευκλείδεια νόρμα). Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ μία απεικόνιση επί. Η f θα καλείται *ισομετρία* αν

$$\|f(x, y) - f(x', y')\| = \|(x, y) - (x', y')\|,$$

για κάθε $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$. Με άλλα λόγια, *μία ισομετρία διατηρεί τα μήκη*. Παρατηρήστε ότι μία ισομετρία είναι αναγκαστικά μία 1-1 απεικόνιση.

Το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^2$ αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση και είναι ακριβώς η $E(2)$.

Η ομάδα μεταφορών $T(2)$ του $\mathbb{R}^2$,

$$T(2) = \{T_{(a,b)} \mid T_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\},$$

είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση, ισόμορφη με την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^2, +)$:

$$T(2) \ni T_{(a,b)} \mapsto (a, b) \in (\mathbb{R}^2, +).$$

Από την άλλη, $T(2) < E(2)$. Προφανώς, $T_{(0,0)}$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της $E(2)$ και αν $T_{(a,b)} \in T(2)$ και $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, τότε

$$\begin{aligned} \|T_{(a,b)}(x_1, y_1) - T_{(a,b)}(x_2, y_2)\| &= \|(x_1 + a, y_1 + b) - (x_2 + a, y_2 + b)\| \\ &= \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \\ &= \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|. \end{aligned}$$

Για την ομάδα $O(2)$, προκύπτει από τις σχέσεις $AA^T = I$ και $A^T A = I$ ότι για ένα στοιχείο

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$$

ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, & \quad ab + cd = 0, \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, & \quad ac + bd = 0. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $A \in O(2)$ αν και μόνο αν

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix},$$

για κάποιο $\phi \in \mathbb{R}$. Τα στοιχεία αριστερά αποτελούν την $SO(2)$. Παριστάνουν περιστροφές $A_\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$A_\phi(x, y) = (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi),$$

αντίθετα με τη φορά των δεικτών κατά ϕ . Από την άλλη, ένα στοιχείο του δεξιού τύπου μπορεί να γραφεί ως

$$R(x, y) = (-x, -y) + 2((a, b) \cdot (x, y))(a, b),$$

όπου $(a, b) = (\cos(\phi/2), \sin(\phi/2))$ και το παριστάνει το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^2$. Ο παραπάνω τύπος είναι η ανάκλαση σε ευθεία από την αρχή στην κατεύθυνση του (a, b) . Το σύνολο των ανακλάσεων δεν αποτελεί ομάδα.

Η $O(2)$ είναι υποομάδα της $E(2)$: για $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$, έστω

$$\alpha(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

η αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^2$. Αν $\mathbf{x} = (x, y)$ και $\mathbf{x}' = (x', y')$ τότε

$$\begin{aligned} \|\alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{x}')\|^2 &= \|(a(x - x') + b(y - y'), c(x - x') + d(y - y'))\|^2 \\ &= (a^2 + c^2)(x - x')^2 + (b^2 + d^2)(y - y')^2 + 2(ab + cd)(x - x')(y - y'). \end{aligned}$$

Όμως, επειδή $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$ και έπεται το ζητούμενο.

Δεχόμενοι ότι η $E(2)$ παράγεται από περιστροφές, μεταφορές και ανακλάσεις, δείχνουμε ότι $T(2) \triangleleft E(2)$. Παίρνουμε $T_{(x_0, y_0)} \in T(2)$ και $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Τότε, με απευθείας υπολογισμό, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$AT_{(x_0, y_0)}A^{-1} \in T(2) \triangleleft E(2),$$

δείχνοντας ότι η απεικόνιση

$$\alpha \circ T_{(x_0, y_0)} \circ \alpha^{-1}$$

είναι στοιχείο της $T(2)$.

Θα δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο το Ισομετρικό Θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο κάθε ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ είναι σύνθεση μεταφοράς και στοιχείου της $O(n)$. Από αυτό, θα συνάγουμε ότι $E(n) = T(n) \rtimes O(n)$. Επειδή η απόδειξη δεν διαφέρει στις μεγάλες διαστάσεις δεν θα την

παρουσιάσουμε εδώ, αλλά ως το τέλος του παρόντος κεφαλαίου θα δεχόμαστε σιωπηρά ότι $E(2) = T(2) \rtimes O(2)$.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με μία επιπλέον παρατήρηση. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$(\mathbb{R}, +) \ni \phi \mapsto A_\phi \in SO(2).$$

Η απεικόνιση αυτή είναι επιμορφισμός, με πυρήνα $2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Άρα, από το Θεώρημα Ισομορφισμού,

$$SO(2) \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}.$$

Η ομάδα $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ περιέχει στοιχεία $[x] = \{x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Από την άλλη, ο μοναδιαίος κύκλος S^1 ταυτίζεται με το σύνολο των μιγαδικών αριθμών μέτρου 1. Η απεικόνιση

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni [x] \mapsto e^{ix} \in S^1$$

είναι 1-1 και επί. Συμπεραίνουμε πως υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση από την $SO(2)$ στον S^1 .

2.1.8 Δράσεις ομάδων

Οι ομάδες μπορούν να δρουν είτε από αριστερά είτε από δεξιά επάνω σε ένα σύνολο, αντιστοιχίζοντας μία μετάταξη των σημείων του συνόλου σε ένα στοιχείο της ομάδας.

Ορισμός 2.1.21. Μία ομάδα G λέγεται ότι δρά από αριστερά πάνω σε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$, αν υπάρχει μία απεικόνιση

$$G \times X \rightarrow X, \quad (g, x) \mapsto gx, \quad \forall g \in G, x \in X,$$

τέτοια ώστε:

1. $ex = x$ για κάθε $x \in X$,
2. $g(hx) = (gh)x$, για κάθε $g, h \in G$ και για κάθε $x \in X$.

Για κάθε δοθέν $x \in X$, το σύνολο

$$\text{Orb}(x) = \{gx \mid g \in G\},$$

καλείται τροχιά του x . Σε κάθε τροχιά $\text{Orb}(x)$, ορίζουμε πράξη

$$(gx) \cdot (hx) = (gh)x$$

και με την πράξη αυτή η τροχιά αποκτά δομή ομάδας ισόμορφης με την G . Εάν η G δρα από αριστερά στον X , ορίζουμε τη σχέση

$$x \sim y \iff x \in \text{Orb}(y).$$

Αυτή είναι σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας (τροχιών) λέγεται χώρος πηλίκου του X με την G και συμβολίζεται με X/G (σπανιότερα με G/X).

Ορισμός 2.1.22. Η αριστερή δράση της G στον X καλείται *μεταβατική* αν για κάθε $y \in X$ υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $y = gx$ για κάποιο $g \in G$.

Στην περίπτωση της μεταβατικής δράσης, ο χώρος πηλίκου X/G αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο και τότε ο X καλείται *ομογενής*.

Ο *σταθεροποιητής* ενός στοιχείου $x \in X$ είναι το σύνολο

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Ορισμός 2.1.23. Η δράση της G στον X λέγεται *ελεύθερη*, αν όλοι οι σταθεροποιητές είναι οι τετριμμένοι.

Στην περίπτωση δράσης που είναι μεταβατική και ελεύθερη, ο X καλείται *πρωταρχικά ομογενής*. Το απλούστερο παράδειγμα είναι το ακόλουθο.

Παράδειγμα 2.1.24. Για τη δράση της προσθετικής ομάδας $G = (\mathbb{R}^n, +)$ στον $X = \mathbb{R}^n$, έχουμε τα παρακάτω.

- Η δράση: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$.
- Η δράση είναι μεταβατική: αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$, τότε

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \mathbf{x}.$$

Συνεπώς ο χώρος των τροχιών αποτελείται από ένα σημείο.

- Η δράση είναι ελεύθερη: για κάθε $\mathbf{x} \in X$, $\text{Stab}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{0}\}$.

Η προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα μεταφορών $T(n)$ του $\mathbb{R}^n$:

$$T(n) = \{T_{\mathbf{a}} \mid T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Η $T(n)$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων και ο ισομορφισμός με την $(\mathbb{R}^n, +)$ δίνεται από την

$$T_{\mathbf{a}} \mapsto \mathbf{a}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν έχει σημασία εδώ η μεριά από την οποία δρα η $T(n)$ στον $\mathbb{R}^n$, εφόσον $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{x}$.

Παράδειγμα 2.1.25. Θεωρούμε τη δράση της ορθογώνιας ομάδας $G = O(2)$ στον $X = \mathbb{R}^2$: Η δράση είναι:

$$(A, (x, y)) \mapsto \alpha(x, y),$$

όπου α η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στον A . Διαισθητικά καταλαβαίνουμε (αλλά δείχνεται και απευθείας αναλυτικά), ότι η τροχιά ενός (x, y) είναι ένα σημείο αν $(x, y) = (0, 0)$, ενώ είναι κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα $\|(x, y)\|$ αλλιώς. Άρα, ο χώρος των τροχιών αποτελείται από όλους τους κύκλους με κέντρο την αρχή, μαζί με τον εκφυλισμένο κύκλο $(0, 0)$. Το σύνολο αυτό είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $[0, +\infty)$. Η δράση είναι μεταβατική μόνο επάνω στους κύκλους με κέντρο την αρχή. Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$, ο σταθεροποιητής του στην $O(2)$ αποτελείται από την ανάκλαση στην ευθεία από την αρχή και το (x, y) . Από την άλλη, για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$, ο σταθεροποιητής του στην $SO(2)$ είναι τετριμμένος.

2.1.9 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι όλα τα σύνολα του Παραδείγματος 2.1.3 είναι ομάδες.
2. Αποδείξτε ότι οι $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}_*, \cdot)$ είναι αβελιανές ομάδες. Είναι η $(\mathbb{Z}_*, \cdot)$ ομάδα;
3. Αποδείξτε τις τρεις πρώτες σχέσεις στο Παράδειγμα 2.1.6.
4. Έστω G ομάδα και $H_1 < H_2 < G$. Δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ είναι

$$gH_1 \subseteq gH_2.$$

5. Αποδείξτε ότι κάθε αβελιανή υποομάδα ομάδας G είναι κανονική υποομάδα της G .
6. Αποδείξτε το Κριτήριο 2.1.12.
7. Έστω G ομάδα και $H \triangleleft G$. Έστω επίσης $K < G$ με $H \subseteq K$. Αποδείξτε ότι $H \triangleleft K$.
8. Αποδείξτε μέσω του Κριτηρίου 2.1.12 ότι $SL(n, F) \triangleleft GL(n, F)$ και $SO(n) \triangleleft O(n)$.
9. Αποδείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο $G_1 \times G_2$ δύο ομάδων $(G_1, \cdot)$ και $(G_2, \star)$ με πράξη που δίνεται από την (2.1) είναι ομάδα.
10. Αποδείξτε ότι το ευθύ γινόμενο $G_1 \times G_2$ δύο ομάδων G_1, G_2 είναι αβελιανή ομάδα αν και οι δύο αυτές ομάδες είναι αβελιανές.
11. Ταυτίζοντας τις G_1, G_2 , με τις $G_1 \times \{e_2\}$ και $\{e_1\} \times G_2$, αντίστοιχα, αποδείξτε ότι είναι κανονικές υποομάδες του ευθέως γινομένου $G_1 \times G_2$.
12. Αποδείξτε ότι εάν $H_i \triangleleft G_i, i = 1, 2$, τότε και $H_1 \times H_2 \triangleleft G_1 \times G_2$.
13. Συμπληρώστε όσες λεπτομέρειες λείπουν στον Ορισμό 2.1.16 της ομάδας πηλίκου.
14. Δικαιολογήστε γιατί σε έναν ομομορφισμό $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ έχουμε πάντοτε
 - (α') $\phi(e_1) = e_2$.
 - (β') $\ker(\phi) \triangleleft G_1, \text{Im}(\phi) < G_2$.
15. Έστω G ομάδα, $N \triangleleft G$ και $\pi : G \rightarrow G/N$ με $\pi(g) = gN$. Δείξτε ότι η π είναι επιμορφισμός ομάδων (κανονική προβολή).
16. Έστω $\phi : G \rightarrow H$ επιμορφισμός και $N \triangleleft G$. Αποδείξτε ότι $\phi(N) \triangleleft H$.
17. Αποδείξτε ότι σε κάθε αριστερή δράση $G \times X \rightarrow X$, οι σταθεροποιητές των στοιχείων του X είναι υποομάδες της G .
18. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\text{Aut}(G)$ των αυτομορφισμών μιας ομάδας G είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Δείξτε ότι η $\text{Aut}(G)$ δρα από αριστερά στην G και προσδιορίστε τον χώρο των τροχιών $G/\text{Aut}(G)$.

19. Δείξτε ότι η απεικόνιση $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot) \times \mathbb{R}^n$, όπου

$$(\delta, \mathbf{x}) \mapsto \delta \mathbf{x},$$

είναι αριστερή δράση. Βρείτε τον χώρο τροχιών. Είναι η δράση αυτή μεταβατική; Ελεύθερη;

20. Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες στο Παράδειγμα 2.1.25.

2.2 Η Γεωμετρία κατά τον Klein

Έστω $X \neq \emptyset$. Ένας μετασχηματισμός g του X είναι μία 1-1 και επί απεικόνιση $g : X \rightarrow X$. Το σύνολο όλων των μετασχηματισμών του X συμβολίζεται με $\text{Sym}(X)$ και καλείται *συμμετρική ομάδα του X* .

Πρόταση 2.2.1. Η $\text{Sym}(X)$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

Κατά τον Klein, μία Γεωμετρία είναι ένα ζεύγος (X, G) , όπου $X \neq \emptyset$ και $G < \text{Sym}(X)$. Τα σημεία της Γεωμετρίας (X, G) είναι τα στοιχεία του συνόλου X και τα σχήματα της Γεωμετρίας (X, G) είναι τα υποσύνολα του X . Η ομάδα G δρα στον X :

$$(g, x) \mapsto gx (= g(x)).$$

(Η επιλογή της αριστερής δράσης είναι αυθαίρετη). Δύο σχήματα P, Q και λέγονται G -ισοδύναμα, εάν υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $g(P) = Q$. Μία γεωμετρική ιδιότητα (G -ιδιότητα) λέγεται μία ιδιότητα του X που παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση της G .

Σχόλιο 2.2.2. Αν δύο σχήματα P, Q είναι G -ισοδύναμα τότε έχουν ταυτόσημες G -ιδιότητες, λόγω του αναλλοίωτου των G -ιδιοτήτων από τη δράση της G .

Η μελέτη της Γεωμετρίας (X, G) αποτελείται από:

1. την περιγραφή των κλάσεων G -ισοδυναμίας και ειδικότερα του χώρου τροχιών X/G ,
2. τον προσδιορισμό των G -ιδιοτήτων και
3. τα θεωρήματα σχετικά με τις κλάσεις G -ισοδυναμίας και τις G -ιδιότητες.

Στη Γεωμετρία κατά Klein δεν υπάρχουν αξιώματα - μόνο θεωρήματα. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι μια τέτοια «Γεωμετρία» είναι συνεπής. Με την αξιωματική προσέγγιση, είναι πάντα πιθανό τα αξιώματα να οδηγούν σε αντίφαση. Σε μια τέτοια περίπτωση, δεν μπορεί να υπάρχει «μοντέλο» για τη Γεωμετρία.

Παράδειγμα 2.2.3. Η Ευκλείδεια επιπεδομετρία είναι η Γεωμετρία $(\mathbb{R}^2, E(2))$ κατά Klein. Η $E(2)$ είναι η ομάδα που γεννάται από τις μεταθέσεις, περιστροφές και ανακλάσεις του επιπέδου και είναι ισομορφή με την $\mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$. Η ομάδα αυτή περιέχει όλες τις Ευκλείδειες ισομετρίες του επιπέδου. Επειδή όλοι οι παραπάνω μετασχηματισμοί διατηρούν τα μήκη (είναι δηλαδή ισομετρίες), το μήκος είναι γεωμετρική ιδιότητα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Στη Γεωμετρία αυτή, μπορούμε να αποδείξουμε όλα τα Ευκλείδεια αξιώματα σαν θεωρήματα.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της προσέγγισης του Klein είναι ότι μας επιτρέπει να συσχετίζουμε διαφορετικές Γεωμετρίες. Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα μετασχηματισμών του συνόλου X , και ότι η H είναι μια υποομάδα της G . Τότε, η H είναι επίσης μια ομάδα μετασχηματισμών του X , και έτσι ορίζει μια άλλη Γεωμετρία στο X .

Θεώρημα 2.2.4. (K1) *Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα μετασχηματισμών ενός συνόλου X , και ότι η H είναι μια υποομάδα της G . Εάν δύο σχήματα είναι H -ισοδύναμα, τότε είναι και G -ισοδύναμα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα P και Q είναι H -ισοδύναμα. Τότε υπάρχει ένα $h \in H$ με $h(P) = Q$. Δεδομένου ότι $H < G$, το $h \in G$, έτσι το P και το Q είναι G -ισοδύναμα. $\square$

Σχόλιο 2.2.5. Προκύπτει ότι κάθε κλάση G -ισοδυναμίας είναι μια ένωση κλάσεων H -ισοδυναμίας, έτσι ώστε στη Γεωμετρία που ορίζεται από την G , υπάρχουν λιγότερες (αλλά μεγαλύτερες) κλάσεις ισοδυναμίας.

Παράδειγμα 2.2.6. Η Γεωμετρία των Ευκλείδειων ομοιοθεσιών: Η $E(2)$ επεκτείνεται στην ομάδα $\text{Sim}(2)$ που περιέχει επιπλέον τις ομοιοθεσίες

$$D_\delta(x, y) = (\delta x, \delta y),$$

$\delta > 0, \delta \neq 1$. Έστω C ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$. Θεωρώντας γνωστό ότι η $E(2)$ απαρτίζεται από ισομετρίες, αν $g \in E(2)$ τότε $g(C)$ θα είναι κύκλος κέντρου $g(0, 0)$ και ακτίνας 1. Από την άλλη, οποιοσδήποτε κύκλος κέντρου p και ακτίνας 1 είναι η μεταφορά του C κατά p . Συμπεραίνουμε ότι η $E(2)$ -κλάση του C περιέχει όλους τους κύκλους ακτίνας 1. Τώρα, αν $h \in \text{Sim}(2)$, η $h(C)$ είναι πάλι κύκλος κέντρου κάποιου p , αλλά η ακτίνα του μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Και πάλι, αν C' είναι κύκλος οποιουδήποτε κέντρου και ακτίνας, μπορούμε με μία μεταφορά και μία ομοιοθεσία να τον απεικονίσουμε στον C . Συμπεραίνουμε ότι η $\text{Sim}(2)$ -κλάση του C περιέχει όλους τους κύκλους, οποιασδήποτε ακτίνας και έτσι η $\text{Sim}(2)$ -κλάση του C περιέχει την $E(2)$ -κλάση του C .

Θεώρημα 2.2.7. (K2) *Ας υποθέσουμε ότι η G είναι μια ομάδα μετασχηματισμών ενός συνόλου X , και η H είναι μια υποομάδα του G . Τότε, εάν η D είναι G -ιδιότητα, τότε είναι και H -ιδιότητα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το D είναι μια G -ιδιότητα, έτσι είναι αναλλοίωτη από όλα τα g στη G . Αν $h \in H$, $h \in G$ εφόσον $H < G$, άρα η D είναι αναλλοίωτη από το h . $\square$

Συμπεραίνουμε ότι η Γεωμετρία που ορίζεται από τη G μπορεί να έχει λιγότερες ιδιότητες.

Παράδειγμα 2.2.8. Μήκη και γωνίες στην Ευκλείδεια επιπεδομετρία: θεωρούμε σαφές ότι η $E(2)$ διατηρεί τα μήκη και τις γωνίες. Από την άλλη, είναι επίσης σαφές ότι μία ομοιοθεσία διατηρεί μεν τις γωνίες, αλλά όχι τα μήκη. Συμπεραίνουμε ότι το αναλλοίωτο των μηκών και των γωνιών είναι $E(2)$ -ιδιότητες, αλλά μόνο το αναλλοίωτο των γωνιών είναι $\text{Sim}(2)$ -ιδιότητα.

2.2.1 Ασκήσεις

1. Ορίσετε τις δράσεις και τους χώρους των τροχιών των Γεωμετριών $(X, \{id_X\})$ και $(X, \text{Sym}(X))$, περιγράψτε τις τροχιές και τους σταθεροποιητές και εξετάστε αν κάθε μία από αυτές τις δράσεις είναι α) μεταβατική και β) ελεύθερη.

2. Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $\text{Sym}(X)$ συμμετρική του ομάδα. Μία Γεωμετρία (X, G_1) λέγεται ότι περιέχεται στην (X, G_2) , αν $G_1 < G_2$.

(α') Δείξτε ότι κάθε Γεωμετρία (X, G) περιέχει την $(X, \{id_X\})$ και περιέχεται στην $(X, \text{Sym}(X))$.

(β') Αν $G_1 < G_2$ τότε δείξτε ότι $\text{orb}_{G_1}(x) < \text{orb}_{G_2}(x)$. Είναι σωστό ότι τότε ισχύει και $X/G_1 \subseteq X/G_2$;

3. Έστω $X \neq \emptyset$. Μία συλλογή τ_X υποσυνόλων του X λέγεται τοπολογία στο X αν ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

(α') $\emptyset, X \in \tau_X$.

(β') Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους στοιχείων της τ_X ανήκει στην τ_X .

(γ') Η τομή οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους στοιχείων της τ_X ανήκει στην τ_X .

Μία απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ λέγεται συνεχής αν για κάθε $B \in \tau_X$ η αντίστροφη εικόνα του $f^{-1}(B) \in \tau_X$. Μία 1-1 και επί απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ λέγεται ομοιομορφισμός αν οι f, f^{-1} είναι συνεχείς. Δείξτε ότι το σύνολο $\text{Hom}(X)$ των ομοιομορφισμών του X είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση και ορίσετε τον χώρο των τροχιών της Γεωμετρίας $(X, \text{Hom}(X))$.

4. Έστω $X = \{1, 2, 3\}$. Εδώ η $\text{Sym}(X)$ είναι η ομάδα μετατάξεων S_3 που αποτελείται από τα στοιχεία

$$(123), (132), (213), (231), (312), (321).$$

Για να καταλάβουμε τη Γεωμετρία (X, S_3) , τοποθετούμε τα 1, 2, 3 στις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου με κέντρο βάρους στην αρχή. Με μία στροφή κατά $2\pi/3$ αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου, η κορυφή 1 θα συμπίψει με την 2, η 2 με την 3 και η 3 με την 1 και παίρνουμε έτσι το στοιχείο (231). Με μία στροφή τώρα κατά $4\pi/3$ αντίθετα με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου, η κορυφή 1 θα συμπίψει με την 3, η 2 με την 1 και η 3 με την 2 και παίρνουμε έτσι το στοιχείο (312). Με ανάκλαση στην ευθεία $x = 0$ η κορυφή 1 παραμένει σταθερή, και οι κορυφές 2, 3, εναλλάσσονται-παίρνουμε έτσι το στοιχείο (132). Με περιστροφή κατά $\pi/3$ ακολουθούμενη από την παραπάνω ανάκλαση παίρνουμε το στοιχείο (213). Τέλος, με περιστροφή κατά $2\pi/3$ ακολουθούμενη από την παραπάνω ανάκλαση παίρνουμε το στοιχείο (321). Δείξτε ότι η Γεωμετρία αυτή είναι η Γεωμετρία ενός ισοπλεύρου τριγώνου (εδώ το τρίγωνο νοείται σαν ένα σχήμα που καθορίζεται πλήρως από τις κορυφές του) με κέντρο βάρους στην αρχή, στην οποία δρα μία πεπερασμένη υποομάδα της $O(2)$.

5. (Συμμετρία ως προς σημείο στο επίπεδο.) Έστω σημείο $K = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε το συμμετρικό του $S_K(x, y)$ ως προς K ως εξής: επάνω στην ευθεία

$$c(t) = (1 - t)(k_1, k_2) + t(x, y), \quad t \in \mathbb{R}$$

που ενώνει τα K και (x, y) , θεωρούμε το μοναδικό σημείο $S_K(x, y) = (x', y') \neq (x, y)$ για το οποίο ισχύει

$$\|(x', y') - K\| = \|(x, y) - K\|.$$

Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α') $S_K(x, y) = 2(k_1, k_2) - (x, y)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (β') $(S_K \circ S_K)(x, y) = (x, y)$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- (γ') $S_K(x, y) = (x, y)$, αν και μόνο αν $(x, y) = (k_1, k_2) = K$.
- (δ') Η συμμετρία ως προς σημείο είναι $E(2)$ -ιδιότητα.

@copyright I.D. PLATIS

@copyright I.D. PLATIS

Κεφάλαιο 3

Ευκλείδεια Γεωμετρία

3.1 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

Ο n -διάστατος πραγματικός χώρος είναι ο βασικός μας χώρος στη μελέτη της Γεωμετρίας. Οι πολλές και πλούσιες ιδιότητές του, που περιγράφονται εν συντομία στην ενότητα αυτή, είναι σημείο αναφοράς για τους περισσότερους από τους γεωμετρικούς χώρους και ιδίως για αυτούς που θα μελετήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.

3.1.1 Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Ο χώρος μας είναι ο n -διάστατος πραγματικός χώρος

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\},$$

με τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ να καλούνται εδώ και *διανύσματα*. (Με άλλα λόγια, θα υπάρχει σιωπηρή ταύτιση των σημείων $\mathbf{x}$ με τα διανύσματα που έχουν αρχή το $\mathbf{0}$ και τέλος το $\mathbf{x}$). Η πρόσθεση $+$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. Μεταθετική: $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. Προσεταιριστική: $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.
3. Ουδέτερο στοιχείο: $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$.
4. Αντίθετο στοιχείο: $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, όπου $-\mathbf{x} = (-x_1, \dots, -x_n)$.

Συμπεραίνουμε πως το ζεύγος $(\mathbb{R}^n, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα (η προσθετική πραγματική ομάδα).

Ορίζεται επίσης και ένας βαθμωτός πολλαπλασιασμός $\cdot$ ως εξής: αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
4. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Συνεπώς, η τριάδα $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος υπεράνω του $\mathbb{R}$. Η διάσταση του δ.χ. $\mathbb{R}^n$ είναι n . Η κανονική βάση του αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, όπου

$$\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

με το 1 να βρίσκεται στην i -συντεταγμένη. Αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ τότε

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Υπόχωροι

Ένα υποσύνολο $V \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται *διανυσματικός υπόχωρος* του $\mathbb{R}^n$ αν

1. $\mathbf{0} \in V$,
2. $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in V$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$.

Αν ο $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, δηλαδή, παράγεται από k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k,$$

για κάθε $\mathbf{v} \in V$, τότε λέμε ότι έχει *διάσταση* k , $\dim(V) = k$. Υπενθυμίζουμε ότι η γραμμική ανεξαρτησία των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ εξασφαλίζει ότι κάθε σχέση της μορφής

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k,$$

συνεπάγεται ότι $\lambda_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Θα θεωρήσουμε γνωστό ότι μπορούμε να συμπληρώσουμε μία βάση του $\mathbb{R}^n$ από τα διανύσματα που παράγουν τον V . Δηλαδή, υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα $\mathbf{v}'_{k+1}, \dots, \mathbf{v}'_n$ του $\mathbb{R}^n$ ώστε τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_{k+1}, \dots, \mathbf{v}'_n$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και για κάθε $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^k a_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=k+1}^n b_i \mathbf{v}'_i.$$

Τέλος, αν V_1 και V_2 είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, τέτοιοι ώστε $V_1 \cap V_2 = \{\mathbf{0}\}$ και για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν $\mathbf{v}_i \in V_i$ $i = 1, 2$, τέτοια ώστε $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, τότε λέμε ότι ο $\mathbb{R}^n$ αναλύεται στο *ευθύ άθροισμα* των V_1 και V_2 και συμβολίζουμε

$$\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2.$$

3.1.2 Ευκλείδεια (τυπική) τοπολογία του $\mathbb{R}^n$

Η Ευκλείδεια απόσταση $e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ δύο σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από τη σχέση

$$e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, e_n)$ είναι μετρικός χώρος. Πράγματι, ισχύουν τα ακόλουθα αξιώματα μετρικής:

1. Η e_n είναι μία συνάρτηση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.
2. $e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
3. $e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e_n(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
4. (Τριγωνική ανισότητα)

$$e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq e_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + e_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, είναι συνευθειακά.

Το σύνολο

$$B_{\mathbf{x}}(\epsilon) = \{\mathbf{y} \mid e_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) < \epsilon\}$$

καλείται ανοικτή περιοχή του $\mathbf{x}$ ακτίνας ϵ . Το σύνολο

$$\overline{B_{\mathbf{x}}(\epsilon)} = \{\mathbf{y} \mid e_n(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leq \epsilon\}$$

καλείται κλειστή περιοχή του $\mathbf{x}$ ακτίνας ϵ .

Ορισμός 3.1.1. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ καλείται ανοικτό, αν

$$\forall \mathbf{x} \in A, \exists \epsilon > 0 : B_{\mathbf{x}}(\epsilon) \subset A.$$

Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ καλείται κλειστό, αν το $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ είναι ανοικτό.

Παρατηρήστε ότι μία ανοικτή περιοχή είναι ανοικτό σύνολο (δείτε το γεωμετρικά), ενώ μία κλειστή περιοχή είναι ένα κλειστό σύνολο. Ισχύουν επίσης τα ακόλουθα:

1. Το $\emptyset$ και ο $\mathbb{R}^n$ είναι τα μόνα σύνολα που είναι ταυτόχρονα ανοικτά και κλειστά.
2. Οποιαδήποτε ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο (και οποιαδήποτε τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο).
3. Πεπερασμένες τομές ανοικτών συνόλων δίνουν ανοικτά σύνολα (και πεπερασμένες ενώσεις κλειστών συνόλων δίνουν κλειστά σύνολα).

Ορισμός 3.1.2. Η συλλογή όλων των ανοικτών συνόλων του $\mathbb{R}^n$ καλείται Ευκλείδεια (ή τυπική) τοπολογία του $\mathbb{R}^n$. Η συλλογή όλων των ανοικτών περιοχών καλείται βάση της τοπολογίας.

3.1.3 Ο νορμικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Η Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|$ ορίζεται για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ από την

$$\|\mathbf{x}\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Παρατηρήστε ότι η νόρμα του $\mathbf{x}$ ίση με την απόσταση $e_n(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ του $\mathbf{x}$ από το $\mathbf{0}$. Συνεπώς η Ευκλείδεια νόρμα ορίζεται μέσω της Ευκλείδειας απόστασης. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι *χώρος με νόρμα*. Τα ακόλουθα αξιώματα της νόρμας ικανοποιούνται:

1. Η $\|\cdot\|$ είναι μία συνάρτηση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$.
2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. (Τριγωνική ανισότητα)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, είναι γραμμικά εξαρτημένα: υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, τέτοιο ώστε $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$. Ισοδύναμα, τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ και $\mathbf{0}$ είναι συνευθειακά.

Σχόλιο 3.1.3. Αν έχουμε έναν διανυσματικό χώρο με νόρμα, έστω τον $(X, \|\cdot\|_X)$ τότε τον τρέπουμε σε μετρικό χώρο ορίζοντας τη μετρική d_X στον X από τη σχέση

$$d_X(x, y) = \|x - y\|_X, \quad x, y \in X.$$

Στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου είδαμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, κάτι που δεν ισχύει εν γένει σε τυχαίους μετρικούς χώρους.

3.1.4 Βαθμωτό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 3.1.4. Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ και $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. Το *βαθμωτό (εσωτερικό) τους γινόμενο* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ορίζεται από την

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

Παρατηρήστε ότι

$$4 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2.$$

Συνεπώς, το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο ορίζεται από την Ευκλείδεια νόρμα. Ο $(\mathbb{R}^n, \cdot)$ είναι *χώρος με εσωτερικό γινόμενο*. Πράγματι, ισχύουν οι εξής ιδιότητες για την $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ και $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$. (Θετικά ορισμένο).
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. (Συζυγία).

3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. (Γραμμικότητα Ι).

4. $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, για κάθε $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (Γραμμικότητα ΙΙ).

Σχόλιο 3.1.5. Αν έχουμε έναν διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο, έστω τον $(X, \cdot)$, τότε τον τρέπουμε σε νορμικό χώρο ορίζοντας τη νόρμα $\|\cdot\|_X$ στον X από τη σχέση

$$\|x\|_X = \sqrt{x \cdot x}, \quad x \in X.$$

Στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου είδαμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, κάτι που δεν ισχύει εν γένει σε τυχαίους χώρους με νόρμα.

Ανισότητα CSB και γωνία διανυσμάτων

Πρόταση 3.1.6. Έστω $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Τότε ισχύει η Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Bunyakowski:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|. \quad (3.1)$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (δηλαδή είναι παράλληλα).

Απόδειξη. Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ και $x \in \mathbb{R}$. Εάν κάποιος από αυτά είναι το μηδενικό διάνυσμα, η πρόταση ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι και τα δύο διανύσματα είναι μη μηδενικά. Τότε

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n (u_i x + v_i)^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 x^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})x + \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2.$$

Η διακρίνουσα είναι αυστηρά μικρότερη του μηδενός αν και μόνο αν το τριώνυμο είναι μεγαλύτερο του μηδενός για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν δεν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $u_i x + v_i = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, δηλαδή, αν και μόνο αν τα διανύσματα δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα. $\square$

Μέσω της ανισότητας CSB ορίζεται τώρα η γωνία $\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ δύο διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ως εξής: αν ένα από τα δύο διανύσματα είναι το μηδενικό διάνυσμα, ορίζουμε τη γωνία να είναι 0. Αν και τα δύο είναι μη μηδενικά τότε

$$\angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \arccos \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \right) \in [0, \pi].$$

Κατά συνέπεια, αν $\theta = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, έχουμε τον τύπο

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ λέγονται *κάθετα μεταξύ τους* (ή *ορθογώνια*) ($\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$) αν η γωνία τους είναι $\pi/2$. Ισοδύναμα, $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \iff \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Δεχόμαστε ότι $\mathbf{0} \perp \mathbf{u}$ για όλα τα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$.

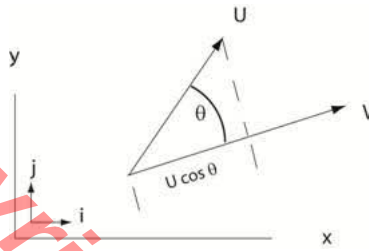
Τα διανύσματα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ λέγονται *παράλληλα* αν η γωνία τους είναι 0 (ομόρροπα) ή π (αντίρροπα).

Τελεστής προβολής και ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt

Ο τελεστής προβολής ορίζεται από την

$$\text{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Θα γίνει φανερό στην αμέσως επόμενη ενότητα ότι ο τελεστής προβάλλει το διάνυσμα $\mathbf{v}$ ορθογώνια πάνω στην ευθεία από το $\mathbf{u}$ που έχει κατεύθυνση $\mathbf{u}$. Εάν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, ορίζουμε $\text{pr}_{\mathbf{0}}(\mathbf{v}) := \mathbf{0}$, δηλαδή, η απεικόνιση προβολής είναι η μηδενική απεικόνιση που απεικονίζει κάθε διάνυσμα στο μηδενικό διάνυσμα.



Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα

Πρόταση 3.1.7. Ο τελεστής προβολής $\text{pr}_{\mathbf{u}}$ όπως ορίστηκε στην (3.2), είναι γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{pr}_{\mathbf{u}} \circ \text{pr}_{\mathbf{u}} = \text{pr}_{\mathbf{u}}. \quad (3.3)$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τη γραμμικότητα. Για $\mathbf{v}_i, i = 1, 2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mathbf{u}}(\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2) &= \frac{(\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \frac{\lambda(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \lambda \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} + \mu \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \lambda \text{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_1) + \mu \text{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}_2). \end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\mathbf{u}}(\text{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) &= \text{pr}_{\mathbf{u}}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}\right) \\ &= \frac{\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u}\right) \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \frac{\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}\right) \|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \\ &= \text{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

□

Δοθείσης μίας βάσης $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε από αυτήν μία νέα ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$, δηλαδή μία βάση που αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα, κάθετα μεταξύ τους ανά δύο:

$$\|\mathbf{a}_i\| = 1, \quad \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Η διαδικασία αυτή λέγεται διαδικασία *Gram-Schmidt* και έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{a}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}, \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \text{pr}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{v}_2), & \mathbf{a}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}, \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \text{pr}_{\mathbf{u}_i}(\mathbf{v}_k), & \mathbf{a}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{\|\mathbf{u}_k\|}, \quad 2 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι ισχύει το παρακάτω χρήσιμο λήμμα:

Λήμμα 3.1.8. *Εάν τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^n$, αμοιβαία ορθογώνια μεταξύ τους, τότε σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι τα $\mathbf{v}_i$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε ας υποθέσουμε ότι

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$. Παίρνοντας βαθμωτό γινόμενο σε κάθε πλευρά της εξίσωσης με $\mathbf{v}_k$ βρίσκουμε $\lambda_k = 0$. Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $k = 1, \dots, n$, παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Καλούμε ορθοσυμπλήρωμα ενός υποχώρου V το σύνολο

$$V^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0, \mathbf{v} \in V\}.$$

Πρόταση 3.1.9. *Έστω V υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $k \leq n$ και έστω $V^\perp$ το ορθοσυμπλήρωμα $V^\perp$ του V . Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$.
2. Το $V^\perp$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - k$.
3. Για κάθε $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in V^\perp$ τέτοια ώστε $\mathbf{a} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{a} \in V \cap V^\perp$, τότε $\mathbf{a} \in V$ και $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ για κάθε $\mathbf{v} \in V$. Άρα, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Κατόπιν, έστω $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V^\perp$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Για κάθε $\mathbf{v} \in V$,

$$(\lambda \mathbf{w}_1 + \mu \mathbf{w}_2) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}) + \mu(\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}) = 0.$$

Έστω $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$. Συμπληρώνουμε μέσω της διαδικασίας Gram-Schmidt σε μία ορθοκανονική βάση

$$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_{k+1}, \dots, \mathbf{v}'_n\}$$

του $\mathbb{R}^n$. Ο υπόχωρος $V' = \langle \mathbf{v}'_{k+1}, \dots, \mathbf{v}'_n \rangle$ είναι ίσος με το $V^\perp$ και με αυτό η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

3.1.5 Ευθείες και υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$

Κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^n$ που περνά από το $\mathbf{a}$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ειδικότερα, κάθε ευθεία που περνά από τα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ του $\mathbb{R}^n$ παραμετράζεται από την

$$\mathbf{c}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ακόμα πιο συγκεκριμένα, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ δέχεται την παραμέτρηση

$$\mathbf{c}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}, \quad t \in [0, 1].$$

Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ είναι

$$\ell = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|.$$

Στην περίπτωση όπου $n = 2$, γνωρίζουμε ότι η γενική εξίσωση ευθείας είναι

$$Ax + By = C, \quad |A| + |B| \neq 0.$$

Θέτοντας $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{A} = (A, B)/\|(A, B)\|$ και $b = C/\|(A, B)\|$, βλέπουμε ότι μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b.$$

Η ευθεία περνά από την αρχή αν και μόνο αν $b = 0$. Αυτό γενικεύεται στις πολλές διαστάσεις με την έννοια του υπερεπιπέδου. Καλούμε *υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$* κάθε σύνολο της μορφής

$$W_{\mathbf{A},b} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{A}\| = 1, b \in \mathbb{R}\}. \quad (3.4)$$

Πρόταση 3.1.10. Εάν $b = 0$, τότε το $W_{\mathbf{A}} = W_{\mathbf{A},0} = \{\mathbf{A}\}^\perp$ και άρα είναι $(n-1)$ -διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 3.1.11. Κάθε $(n-1)$ -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι υπερεπίπεδο που περνά από την αρχή.

Απόδειξη. Εάν W είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-1$, τότε παράγεται από κάποια γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$. Το ορθοσυμπλήρωμα του W είναι ένας υπόχωρος διάστασης 1 που μπορούμε να υποθέσουμε ότι παράγεται από μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{A}$. Έτσι, για κάθε $\mathbf{x} \in W$ έχουμε $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0$. $\square$

3.1.6 Ανακλάσεις σε υπερεπίπεδα

Έστω $\mathbf{A}$ μοναδιαίο διάνυσμα και $W = W_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0\}$ υπερεπίπεδο από την αρχή. Η ανάκλαση στο υπερεπίπεδο W ορίζεται ως εξής: αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, έστω η ευθεία $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{A}$ που περνά από το $\mathbf{x}$ και είναι κάθετη στο W . Η ευθεία αυτή τέμνει το W στο σημείο

$$\text{pr}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$$

που το ονομάζουμε *προβολή του $\mathbf{x}$ στο υπερεπίπεδο W* . Παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{x} \in W$, τότε $\text{pr}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ και επίσης, για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$\text{pr}_W(\text{pr}_W(\mathbf{x})) = \mathbf{x}.$$

Η απόσταση του $\mathbf{x}$ από το $\text{pr}_W(\mathbf{x})$ είναι ίση με $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}|$. Επάνω στην ευθεία $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{A}$ υπάρχουν δύο σημεία που απέχουν $2|\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}|$ από το $\mathbf{x}$, τα $\mathbf{x} \pm 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$. Τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x} + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}$ ανήκουν στον ίδιο ημιχώρο που ορίζει το W : αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} > 0$ (αντ. < 0) τότε και $(\mathbf{x} + 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = 3(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}) > 0$ (αντ. < 0). Από την άλλη, αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} > 0$ (αντ. < 0) τότε $(\mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} < 0$ (αντ. > 0). Είναι λογικό λοιπόν να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.1.12. Η ανάκλαση $r_W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ στο υπερεπίπεδο $W = W_{\mathbf{A}}$ δίνεται από τη σχέση

$$r_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Από την κατασκευή της r_W φαίνεται ότι τα σημεία $\mathbf{x}$ και $r_W(\mathbf{x})$ είναι άκρα σε διαμέτρου σφαίρας κέντρου $\text{pr}_W(\mathbf{x})$ και ακτίνας $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}|$. Επίσης,

$$r_W(\mathbf{x}) = \text{pr}_W(\mathbf{x}) - \text{pr}_A(\mathbf{x}).$$

Παράδειγμα 3.1.13. Οι απλούστερες ανακλάσεις είναι αυτές στα υπερεπίπεδα $x_k = 0$. Δίνονται από τις

$$r_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Η παρακάτω πρόταση περιγράφει τις κυριότερες ιδιότητες των ανακλάσεων σε υπερεπίπεδα.

Πρόταση 3.1.14. Έστω r_W ανάκλαση σε υπερεπίπεδο όπως στην (3.4). Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η r_W είναι γραμμική απεικόνιση.
2. Η r_W είναι ενελικτική: $R_W \circ R_W = id$.
3. Η r_W αφήνει αναλλοίωτο κατά σημείο το υπερεπίπεδο W .
4. Αν $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε η $\{r_W(\mathbf{e}_1), \dots, r_W(\mathbf{e}_n)\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 3.1.15. Έστω r_W όπως πιο πάνω και R_W ο πίνακας της r_W ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε $\det(R_W) = -1$.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_n)$,

$$r_W(x_1, \dots, x_n) = \left(x_1 - 2A_1 \sum_{i=1}^n A_i x_i, \dots, x_n - 2A_n \sum_{i=1}^n A_i x_i \right),$$

και

$$R_W = \begin{pmatrix} 1 - 2A_1^2 & -2A_1A_2 & \dots & -2A_1A_n \\ -2A_2A_1 & 1 - 2A_2^2 & \dots & -2A_2A_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -2A_nA_1 & -2A_nA_2 & \dots & 1 - 2A_n^2 \end{pmatrix}.$$

Για να αποδείξουμε ότι $\det(R_W) = -1$, παρατηρούμε ότι επειδή $R_W^2 = I$ συνεπάγεται ότι οι ιδιοτιμές του R_W είναι $+1, -1$. Αν $\mathbf{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί την ιδιοτιμή $+1$, τότε $r_W(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \implies \mathbf{v} \perp \mathbf{A}$, δηλαδή το $\mathbf{v}$ ανήκει στο W που είναι $(n-1)$ -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Από την άλλη, αν $\mathbf{w}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1 , τότε $r_W(\mathbf{w}) = -\mathbf{w} \implies \mathbf{w} = 2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{w})\mathbf{A}$, δηλαδή το $\mathbf{w}$ ανήκει σε ευθεία (1-διάστατος υπόχωρος) ορθογώνια στο W . Καταλήγουμε στο ότι ο R_W είναι διαγωνίσιμος, $R_W = QDQ^{-1}$, και ότι στην κύρια διαγώνιο του διαγωνίου πίνακα D που του αντιστοιχεί, το $+1$ εμφανίζεται $n-1$ φορές ενώ το -1 μόνο μία φορά. Το ζητούμενο έπεται. $\square$

Σχόλιο 3.1.16. Αν $r_i, i = 1, 2$ είναι ανακλάσεις σε υπερεπίπεδα W_i , τότε η σύνθεσή τους δεν είναι ανάκλαση σε υπερεπίπεδο: $\det(R_i R_j) = 1$.

3.1.7 Ασκήσεις

1. Έστω V υπόχωρος $\mathbb{R}^n$, $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$, $k \leq n$.

(α') Αποδείξτε πως οσαδήποτε $l \leq k$ από τα διανύσματα $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(β') Έστω τα σύνολα $W = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l \rangle$ και $W' = \langle \mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$. Δείξτε ότι α) W, W' είναι υπόχωροι του V , β) $W \cap W' = \{\mathbf{0}\}$ και γ) κάθε $v \in V$ γράφεται ως $v = w + w'$, για κάποια $w \in W, w' \in W'$. (Τα παραπάνω ορίζουν το ευθύ άθροισμα υποχώρων: $V = W \oplus W'$).

2. Αποδείξτε αναλυτικά ότι η Ευκλείδεια μετρική e_n ικανοποιεί τα Αξιώματα 1–4 της μετρικής. Για την Τριγωνική Ανισότητα, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} e_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i + z_i - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - z_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i) \\ &\leq e_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + e_n^2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + 2 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i). \end{aligned}$$

Για να δείξετε ότι

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)(y_i - z_i) \leq e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot e_n(\mathbf{y}, \mathbf{z}),$$

μιμηθείτε την απόδειξη της Ανισότητας CSB.

3. Αποδείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ είναι:

$$|e_n(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - e_n(\mathbf{z}, \mathbf{y})| \leq e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

4. Αποδείξτε ότι η Ευκλείδεια τοπολογία είναι όντως τοπολογία, δηλαδή ικανοποιεί τα αξιώματα 1–3 της τοπολογίας.
5. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά επιχειρήματα, αποδείξτε ότι κάθε ανοικτή περιοχή $B_{\mathbf{x}}(\epsilon)$ κάθε σημείου $\mathbf{x}$ είναι ανοικτό σύνολο, ενώ κάθε κλειστή περιοχή $\overline{B_{\mathbf{x}}(\epsilon)}$ κάθε σημείου $\mathbf{x}$ είναι κλειστό σύνολο. Δείξτε επίσης ότι η σφαίρα $S_{\mathbf{x}}(\epsilon) = \overline{B_{\mathbf{x}}(\epsilon)} \setminus B_{\mathbf{x}}(\epsilon)$ είναι κλειστό σύνολο και έχει τη εξής ιδιότητα: αν $\mathbf{y} \in S_{\mathbf{x}}(\epsilon)$ και $B_{\mathbf{y}}(\delta)$ είναι ανοικτή περιοχή του, τότε τα σύνολα $B_{\mathbf{y}}(\delta) \cap B_{\mathbf{x}}(\epsilon)$ και $B_{\mathbf{y}}(\delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_{\mathbf{x}}(\epsilon))$ είναι αμφότερα μη κενά.
6. Αποδείξτε αναλυτικά ότι η Ευκλείδεια νόρμα ικανοποιεί τα Αξιώματα 1–4 της νόρμας. Δείξτε επίσης ότι για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ είναι:

$$|||\mathbf{x}| - |\mathbf{y}||| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

7. Αποδείξτε ότι το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο ικανοποιεί τις ιδιότητες 1–4 του εσωτερικού γινομένου.
8. Αποδείξτε τα παρακάτω για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

(α') $\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \pm 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$

(β') $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$ (Κανόνας του παραλληλογράμμου)

(γ') $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 4 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (Πολική ταυτότητα).

(δ') $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του).

(ε') Αν $\theta = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ τότε

$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \pm 2 \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta$$

(Νόμος Συνημιτόνων).

9. Σχεδιάστε δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ και με γεωμετρικά επιχειρήματα επιβεβαιώστε τον τύπο του τελεστή προβολής (3.2). Δείξτε ότι

$$\|\mathbf{v} - \text{pr}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\| \sin \theta,$$

όπου $\theta = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

10. Επιβεβαιώστε ότι η διαδικασία Gram-Schmidt δίνει όντως ορθοκανονική βάση.
11. Έστω $\theta \in \mathbb{R}$ και ο μετασχηματισμός $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ όπου

$$\alpha(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

- Α $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ και $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$, δείξτε ότι τα $\alpha(\mathbf{e}_1), \alpha(\mathbf{e}_2)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^2$. (Στην άσκηση αυτή, αυτό που κάνουμε είναι ότι αντικαθιστούμε το σύνθετο σύστημα συντεταγμένων με ένα νέο σύστημα του οποίου οι ορθογώνιοι άξονες έχουν προκύψει με περιστροφή των αρχικών ορθογωνίων αξόνων κατά θ , αντίστροφα με τη φορά των δεικτών του ωρολογίου).
12. Αποδείξτε ότι κάθε ευθεία που περνά από το $\mathbf{0}$ είναι 1-διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, ενώ μία ευθεία που δεν περνά από την αρχή δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.
13. Αποδείξτε την Πρόταση 3.1.13.

3.2 Η ομάδα $E(n)$

Αρχίζουμε με τον γενικό ορισμό της ισομετρίας μετρικού χώρου.

Ορισμός 3.2.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Μία απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ που είναι επί θα λέγεται ισομετρία του X αν

$$\forall x, y \in X, \quad d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Μία ισομετρία είναι αυτόματα 1-1, συνεπώς είναι μετασχηματισμός του X . Το σύνολο των ισομετριών $\text{Isom}(X, d)$ του αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Συμβολίζουμε

$$E(n) = \text{Isom}(\mathbb{R}^n, e_n).$$

την ομάδα ισομετριών του Ευκλείδειου χώρου.

Πρόταση 3.2.2. $f \in E(n)$ αν και μόνο αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία, τότε

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = e_n(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Από την άλλη, αν ισχύει η σχέση της Πρότασης, τότε

$$e_n(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ας παρατηρήσουμε ότι αν $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ τότε

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Κάθε Ευκλείδεια ισομετρία που διατηρεί την αρχή, διατηρεί επίσης το βαθμωτό γινόμενο: πράγματι, αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, για $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι τότε

$$\begin{aligned} 2 f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) &= \|f(\mathbf{x})\|^2 + \|f(\mathbf{y})\|^2 - \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|^2 \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \\ &= 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε την παρακάτω πρόταση που θα μας χρειαστεί στην απόδειξη του Ισομετρικού Θεωρήματος.

Πρόταση 3.2.3. Έστω $f \in E(n)$, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Τότε αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

1. $\|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$,
2. $f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Στις αμέσως επόμενες ενότητες θα δείξουμε ότι οι μεταφορές και οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι στοιχεία της $E(n)$. Προς το παρόν, δείχνουμε την παρακάτω:

Πρόταση 3.2.4. Κάθε ανάκλαση σε υπερεπίπεδο από την αρχή είναι Ευκλείδεια ισομετρία.

Απόδειξη. Έστω υπερεπίπεδο $W = W_{\mathbf{A}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0\}$ και η ανάκλαση

$$r_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A},$$

στο W . Για $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|r_W(\mathbf{x}) - r_W(\mathbf{y})\|^2 &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y} - 2((\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}\|^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + 4((\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A})^2 - 4((\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{A})^2 \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

□

Επειδή $r_W(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ έχουμε από την Πρόταση 3.2.3 το παρακάτω

Πόρισμα 3.2.5. Αν r_W είναι ανάκλαση σε υπερεπίπεδο W , τότε για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι:

1. $\|r_W(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$,
2. $r_W(\mathbf{x}) \cdot r_W(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Το επόμενο Λήμμα θα μας φανεί χρήσιμο παρακάτω.

Λήμμα 3.2.6. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$. Τότε υπάρχει ανάκλαση r_W σε υπερεπίπεδο W που απεικονίζει το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$. Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, τότε η ανάκλαση αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, τότε η ανάκλαση σε κάθε υπερεπίπεδο που περιέχει το $\mathbf{x}$ είναι η ζητούμενη. Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, παίρνουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{A} = (\mathbf{y} - \mathbf{x})/\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, το υπερεπίπεδο από την αρχή $W = W_{\mathbf{A}}$ και την ανάκλαση r_W που δίνεται από την

$$r_W(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{A})\mathbf{A}.$$

Είναι:

$$\begin{aligned} r_W(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - 2 \left(\mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \right) \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \\ &= \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} + \frac{2\|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{2\|\mathbf{x}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Εάν υπήρχε και άλλη ανάκλαση $r_{W'}$ σε υπερεπίπεδο W' με αυτήν την ιδιότητα, τότε θα έπρεπε $W' \perp \langle \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$. Επειδή τα W και W' έχουν την ίδια διάσταση σαν υπόχωροι, αναγκαστικά ταυτίζονται. $\square$

3.2.1 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι κάθε ισομετρία μετρικού χώρου είναι 1-1 απεικόνιση.
2. Αποδείξτε ότι το σύνολο των ισομετριών ενός μετρικού χώρου (X, d) είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων.
3. Εργαζόμενοι όπως στην Ενότητα 3.1.6, δείξτε ότι η (μη γνήσια) ανάκλαση σε (οποιοδήποτε) υπερεπίπεδο

$$W_{\mathbf{A},b} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b, |\mathbf{A}| = 1, b \in \mathbb{R}\},$$

δίνεται από την

$$r_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2(b - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}))\mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Δείξτε ότι η r_W είναι γραμμική απεικόνιση αν και μόνο αν $b = 0$. Διατυπώστε και αποδείξτε πρόταση για τις μη γνήσιες ανακλάσεις, ανάλογη με την Πρόταση 3.1.13.

3.2.2 Η ομάδα μεταφορών $T(n)$

Έχουμε ήδη αποδείξει στο Παράδειγμα 2.1.24 την παρακάτω:

Πρόταση 3.2.7. Η ομάδα $T(n)$ είναι υποομάδα της $E(n)$ ισομορφική με την προσθετική ομάδα $(\mathbb{R}^n, +)$. Η $T(n)$ δρα μεταβατικά και ελεύθερα στο $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος των τροχιών $\mathbb{R}^n/T(n)$ αποτελείται από ένα στοιχείο που είναι το $\mathbb{R}^n$.

Εξετάζουμε τώρα τη δράση της $T(n)$ σε διάφορα γεωμετρικά αντικείμενα.

Πρόταση 3.2.8. Εάν $\mathbf{c}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$ είναι ευθεία από το $\mathbf{u}$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$, τότε η $T(n)$ -τροχιά της περιέχει όλες τις παράλληλες σε αυτήν ευθείες του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Εάν $T_{\mathbf{a}} \in T(n)$, τότε η

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}(t)) = (\mathbf{a} + \mathbf{u}) + t\mathbf{v}$$

είναι ευθεία παράλληλη με την $\mathbf{c}(t)$. Από την άλλη όλες οι ευθείες με κατεύθυνση το $\mathbf{v}$ είναι μεταφορές της $t\mathbf{v}$, δηλαδή, της ευθείας που περνά από την αρχή στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$. $\square$

Πόρισμα 3.2.9. Η δράση της $T(n)$ διατηρεί την παραλληλία ευθειών.

Σχόλιο 3.2.10. Αν δύο ευθείες $\mathbf{c}_i, i = 1, 2$, τέμνονται στο $\mathbf{u}$, τότε

$$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{c}_2(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}_2,$$

με τη γωνία τομής των ευθειών $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \neq 0, \pi$. Οι εικόνες τους μέσω μία μεταφοράς $T_{\mathbf{a}}$ είναι οι

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{c}_i(t)) = (\mathbf{u} + \mathbf{a}) + t\mathbf{v}_i,$$

δηλαδή, τεμνόμενες ευθείες στην εικόνα του σημείου τομής, υπό την ίδια γωνία. Αν τέλος δύο ευθείες είναι ασύμβατες, λόγω του 1-1 και επί των μεταφορών, οι εικόνες τους υπό μία μεταφορά θα είναι επίσης ασύμβατες ευθείες.

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 3.2.11. Εάν $S(\mathbf{a}, \rho)$ είναι σφαίρα κέντρου $\mathbf{a}$ και ακτίνας ρ , τότε η $T(n)$ -τροχιά της περιέχει όλες τις σφαίρες με ακτίνα ρ .

Ορισμός 3.2.12. Ένας μετασχηματισμός $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται ότι διατηρεί τους όγκους εάν διατηρεί τους όγκους των σχημάτων του $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε γνωστό πως ο n -όγκος ενός χωρίου $A \subset \mathbb{R}^n$ δίνεται από την

$$\text{Vol}_n(A) = \int_A d\mathbf{x},$$

όπου το ολοκλήρωμα είναι n -οστό ολοκλήρωμα και $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$. Το ολοκλήρωμα είναι θετικός αριθμός αν το χωρίο είναι φραγμένο, ενώ απειρίζεται στην αντίθετη περίπτωση. έστω τώρα $T_{\mathbf{a}}$ μεταφορά. Ο πίνακας της παραγώγου $DT_{\mathbf{a}}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n . Συνεπώς, αν A (φραγμένο) σχήμα, έχουμε από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών ότι

$$\text{Vol}_n(T_{\mathbf{a}}(A)) = \int_{T_{\mathbf{a}}(A)} d\mathbf{y} = \int_A |\det(DT_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))| d\mathbf{x} = \int_A d\mathbf{x} = \text{Vol}_n(A).$$

Αποδείξαμε την παρακάτω:

Πρόταση 3.2.13. Η ομάδα μεταφορών αποτελείται από απεικονίσεις που διατηρούν τον όγκο.

3.2.3 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε τα ακόλουθα.

- (α') Η σύνθεση δύο ανακλάσεων (εκ των οποίων η μία είναι αναγκαστικά μη γνήσια) σε παράλληλα υπερεπίπεδα είναι μεταφορά.
- (β') Η σύνθεση μεταφοράς και ανάκλασης είναι ίση με τη σύνθεση μη γνήσιας ανάκλασης με τη μεταφορά.

2. Δείξτε το αντίστροφο της προηγούμενης άσκησης: κάθε στοιχείο της $T(n)$ γράφεται ως σύνθεση δύο ανακλάσεων σε παράλληλα υπερεπίπεδα. (Υπόδειξη: αν $T_{\mathbf{a}} \in T(n)$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ η απόσταση μεταξύ του $\mathbf{x}$ και του $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ είναι $\|\mathbf{a}\| = 2d$. Έστω το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{A} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$ και τα υπερεπίπεδα $W_1 = W_{\mathbf{A},0}$ και $W_2 = W_{\mathbf{A},d}$. Τότε, αν r_1, r_2 είναι οι αντίστοιχες ανακλάσεις, έχουμε $r_2 \circ r_1 = T_{\mathbf{a}}$.)

3. Αποδείξτε την Πρόταση ??.

3.2.4 Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$

Θα ορίσουμε εξ αρχής την ορθογώνια ομάδα μέσω των ορθογωνίων απεικονίσεων.

Ορισμός 3.2.14. Μία γραμμική απεικόνιση $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια αν τα $\alpha(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha(\mathbf{e}_n)$ αποτελούν ορθομοναδιαία βάση του $\mathbb{R}^n$.

Από τον ορισμό των ορθογωνίων απεικονίσεων και την Πρόταση 3.1.13 έχουμε αμέσως το παρακάτω

Πόρισμα 3.2.15. Κάθε ανάκλαση σε υπερεπίπεδο από την αρχή είναι ορθογώνια απεικόνιση.

Η παρακάτω πρόταση δίνει ισοδύναμα κριτήρια ορθογωνιότητας γραμμικών απεικονίσεων.

Πρόταση 3.2.16. Έστω $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η α είναι ορθογώνια απεικόνιση.
2. Η α διατηρεί τα βαθμωτά γινόμενα (για όλα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$, $\alpha(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$).
3. Η α διατηρεί τα μήκη διανυσμάτων (για όλα τα $\mathbf{x}$, $\|\alpha(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$).
4. Εάν η $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση, το ίδιο είναι και η $\{\alpha(\mathbf{v}_1), \dots, \alpha(\mathbf{v}_n)\}$.

Απόδειξη. (1) $\implies$ (2) Έστω $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Λόγω γραμμικότητας,

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \alpha(\mathbf{e}_i), \quad \alpha(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n y_i \alpha(\mathbf{e}_i).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}\alpha(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{y}) &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha(\mathbf{e}_i) \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \alpha(\mathbf{e}_j) \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \alpha(\mathbf{e}_i) \cdot \alpha(\mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.\end{aligned}$$

(2) $\implies$ (3) Έχουμε:

$$\|\alpha(\mathbf{x})\|^2 = \alpha(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2.$$

(3) $\implies$ (4) Είναι για $i, j = 1, \dots, n$,

$$\alpha(\mathbf{v}_i) \cdot \alpha(\mathbf{v}_j) = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j.$$

(4) $\implies$ (1) Προκύπτει αμέσως. □

Περιγράψουτε τώρα τις ορθογώνιες απεικονίσεις μέσω των πινάκων τους ως προς την κανονική βάση.

Πρόταση 3.2.17. Έστω $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση και έστω A ο πίνακας της α ως προς την κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η α είναι ορθογώνια απεικόνιση.
2. Οι στήλες του αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο του $(\mathbb{R}^n)^T$.
3. $A^T A = I$.
4. $AA^T = I$.
5. Οι γραμμές του αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (1) $\iff$ (2) Οι στήλες $\mathbf{c}_j$ του ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{c}_j^T = \alpha(\mathbf{e}_j)$.

(2) $\iff$ (3) Απευθείας από τον ορισμό του γινομένου πινάκων.

(4) $\iff$ (5) Απευθείας από τον ορισμό του γινομένου πινάκων.

(3) $\iff$ (4) Η απόδειξη βασίζεται στο επιχείρημα: αν $AB = I$ για δύο πίνακες A, B , τότε και $BA = I$. Πράγματι, έστω α, β οι γραμμικές απεικονίσεις που αντιστοιχούν στους A, B . Η σχέση $AB = I$ συνεπάγεται την $\alpha \circ \beta = id$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\alpha^{-1} = \beta$ και $\beta^{-1} = \alpha$, άρα και $\beta \circ \alpha = id$. και συνεπώς $BA = I$. □

Ορισμός 3.2.18. Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ αποτελείται από τους πίνακες $A \in GL(n, \mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύει $A^{-1} = A^T$.

Πρόταση 3.2.19. Η $O(n)$ αποτελείται από Ευκλείδειες ισομετρίες: $O(n) < E(n)$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν $A \in O(n)$ και α ο αντίστοιχος γραμμικός μετασχηματισμός, τότε για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι:

$$\begin{aligned}\|\alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{y})\|^2 &= (\alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{y})) \cdot (\alpha(\mathbf{x}) - \alpha(\mathbf{y})) \\ &= \alpha(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) + \alpha(\mathbf{y}) \cdot \alpha(\mathbf{y}) - 2 \alpha(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

□

Έχουμε ήδη δει ότι $\det(A) = \pm 1$ για κάθε $A \in O(n)$ και ότι το υποσύνολο $SO(n)$ της $O(n)$ που αποτελείται από στοιχεία με ορίζουσα 1 είναι υποομάδα της $O(n)$. Θεωρώντας τον ομομορφισμό

$$O(n) \ni A \mapsto \det(A) \in \mathbb{R}_*,$$

βλέπουμε ότι $\ker = SO(n) \triangleleft O(n)$. Επιπλέον, από το Θεώρημα Ισομορφισμού,

$$O(n)/SO(n) \simeq \{1, -1\}.$$

Προκύπτει τώρα αμέσως ότι και

$$O(n) = SO(n) \rtimes \{\pm I_n\}.$$

Το παρακάτω λήμμα θα μας φανεί χρήσιμο στον εντοπισμό της κανονικής μορφής ενός ορθογωνίου πίνακα.

Λήμμα 3.2.20. Έστω $A \in O(n)$. Ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Κάθε (μγαδική) ιδιοτιμή του A έχει μέτρο 1.
2. Εάν ο n είναι περιττός, τότε το 1 ή το -1 είναι ιδιοτιμή του A .
3. Εάν ο n είναι άρτιος, τότε τα 1 και -1 δεν είναι απαραίτητα ιδιοτιμές του A .

Απόδειξη. Για το (1), παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι επειδή ο A είναι πραγματικός πίνακας, αν λ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $A\mathbf{v}^T = \lambda\mathbf{v}^T$, τότε και το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα $\bar{\mathbf{v}}$. Οπότε,

$$|\lambda|^2 \bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T = (\bar{\lambda}\bar{\mathbf{v}})(\lambda\mathbf{v}^T) = (\bar{\mathbf{v}}A^T)(A\mathbf{v}^T) = \bar{\mathbf{v}}(A^T A)\mathbf{v}^T = \bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T.$$

Καθώς $\bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}^T = \sum_{i=1}^n |v_i|^2 > 0$ εφόσον $\mathbf{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα, προκύπτει το ζητούμενο.

Το (2) προκύπτει από το ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι περιττού βαθμού με σταθερό όρο την ορίζουσα (± 1) που είναι ταυτόχρονα το γινόμενο των ιδιοτιμών.

Τέλος για το (3), ως παρατηρήσουμε ότι ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \in SO(4),$$

δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές.

□

Έχουμε τώρα την παρακάτω

Πρόταση 3.2.21. Για κάθε ορθογώνιο πίνακα, υπάρχει ορθοκανονική βάση στην οποία ο πίνακας είναι της μορφής:

$$\begin{pmatrix} R_1 & & & & & \\ & R_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & R_k & & \\ & & & & \pm 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

όπου $R_i \in \text{SO}(2)$:

$$R_i = \begin{pmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{pmatrix}, \quad \phi_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος ??, οι ιδιοτιμές ορθογωνίου πίνακα θα είναι είτε συζυγείς μιγαδικές μέτρου 1, είτε ± 1 . Ανακατατάσσοντας αν είναι απαραίτητο, προκύπτει αμέσως το αποτέλεσμα από το Φασματικό Θεώρημα. $\square$

Ας παρατηρήσουμε ότι $A \in \text{SO}(2)$ αν έχει άρτιο πλήθος -1 στην κανονική του μορφή.

Πόρισμα 3.2.22. (Θεώρημα Περιστροφών του Euler) Κάθε στοιχείο της $\text{SO}(3)$ είναι περιστροφή γύρω από μοναδικά ορισμένο άξονα.

Απόδειξη. Η κανονική μορφή τυχόντος στοιχείου της $\text{SO}(3)$ θα είναι η

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή περιστροφή γύρω από τον άξονα των x . $\square$

Προχωρούμε τώρα στη μελέτη της δράσης της $O(n)$ στον $\mathbb{R}^n$, η οποία δίνεται από την

$$(A, \mathbf{x}) \mapsto \alpha(\mathbf{x}),$$

όπου α η ορθογώνια απεικόνιση που αντιστοιχεί στον A . Επειδή για κάθε $\mathbf{x}$ είναι $\|\alpha(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό α , η τροχιά $\text{orb}(\mathbf{x})$ κάθε $\mathbf{x}$ περιέχεται στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, \|\mathbf{x}\|)$ ακτίνας $\|\mathbf{x}\|$ με κέντρο την αρχή. Από την άλλη, αν $\mathbf{y}$ ανήκει στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, \|\mathbf{x}\|)$, τότε από το Λήμμα ?? υπάρχει ανάκλαση r_W σε υπερεπίπεδο W που απεικονίζει το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$. Συμπεραίνουμε ότι $\text{orb}(\mathbf{x}) = S(\mathbf{0}, \|\mathbf{x}\|)$. Αποδείξαμε την

Πρόταση 3.2.23. Ο χώρος των τροχιών $\mathbb{R}^n/O(n)$ περιέχει όλες τις σφαίρες με κέντρο την αρχή. Η $O(n)$ δρα μεταβατικά σε κάθε σφαίρα με κέντρο την αρχή.

Εάν $n = 1$, $O(1) = \{\pm 1\}$ άρα οι σταθεροποιητές είναι όλοι τετριμμένοι. Για τους σταθεροποιητές της δράσης της $O(n)$ τώρα στην περίπτωση $n > 1$, εντοπίζουμε πρώτα τον σταθεροποιητή $\text{Stab}(\mathbf{e}_n)$. Αν α είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός που ανήκει στον $\text{Stab}(\mathbf{e}_n)$, $\alpha(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n$, τότε ο πίνακας A του α θα είναι της μορφής

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

με τον πίνακα A' να είναι στοιχείο της $O(n-1)$ που αντιστοιχεί σε ορθογώνιο μετασχηματισμό α' του $\mathbb{R}^{n-1}$. Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι η σχέση (3.6) παριστάνει και την εμφύτευση της ομάδας $O(n-1)$ σε μία υποομάδα της $O(n)$, δηλαδή ακριβώς την υποομάδα που περιέχει στοιχεία της μορφής (3.6):

$$O(n-1) \ni A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(n).$$

Η εμφύτευση αυτή είναι μονομορφισμός ομάδων. Συνεπώς, $\text{Stab}(\mathbf{e}_n) \simeq O(n-1)$.

Τώρα, αν $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\|\mathbf{v}\| = 1$, από το Λήμμα ?? υπάρχει ανάκλαση r σε υπερεπίπεδο ορθογώνιο στο

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{e}_n}{\|\mathbf{v} - \mathbf{e}_n\|} = \frac{(v_1, \dots, v_{n-1}, v_n - 1)}{\sqrt{2(1 - v_n^2)}},$$

που απεικονίζει το $\mathbf{e}_n$ στο $\mathbf{v}$:

$$r(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{x_n - \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{1 - v_n^2}(\mathbf{v} - \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Ισχυριζόμαστε πώς $\text{Stab}(\mathbf{v}) = \{r \circ \alpha \circ r, \mid \alpha \in \text{Stab}(\mathbf{e}_n)\}$. Πράγματι, για κάθε στοιχείο $r \circ \alpha \circ r$ είναι $r(\alpha(r(\mathbf{v}))) = r(\alpha(\mathbf{e}_n)) = r(\mathbf{e}_n) = \mathbf{v}$. Από την άλλη, αν $\alpha' \in \text{Stab}(\mathbf{v})$,

$$\alpha'(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \implies \alpha'(r(\mathbf{e}_n)) = r(\mathbf{e}_n),$$

και συνθέτοντας από αριστερά με r παίρνουμε $r \circ \alpha' \circ r \in \text{Stab}(\mathbf{e}_n)$. Άρα, $r \circ \alpha' \circ r = \alpha \in \text{Stab}(\mathbf{e}_n)$, δηλαδή, $\alpha' = r \circ \alpha \circ r$. Προκύπτει τώρα ότι $\text{Stab}(\mathbf{v}) \simeq \text{Stab}(\mathbf{e}_n)$, με τον ισομορφισμό να δίνεται από τη σχέση

$$\text{Stab}(\mathbf{v}) \ni \alpha' \mapsto r \circ \alpha' \circ r.$$

Επομένως, $\text{Stab}(\mathbf{v}) \simeq O(n-1)$. Τέλος, έστω $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^n$. Απευθείας βλέπουμε ότι

$$\text{Stab}(\mathbf{w}) = (\text{Stab})(\mathbf{w}/\|\mathbf{w}\|) \simeq O(n-1).$$

Αποδείξαμε την παρακάτω

Πρόταση 3.2.24. Η δράση της $O(n)$ είναι ελεύθερη για $n = 1$. Όταν $n > 1$, ο σταθεροποιητής κάθε μη μηδενικού στοιχείου είναι ομάδα ισόμορφη με την $O(n-1)$.

3.2.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι κάθε στοιχείο της $SO(2)$ είναι γινόμενο δύο ανακλάσεων. (Υπόδειξη. Δείξτε πρώτα ότι η ανάκλαση r_θ στην ευθεία $y = \tan \theta$ έχει πίνακα

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Δείξτε κατόπιν μέσω του παραπάνω τύπου ότι η σύνθεση δύο ανακλάσεων $r_{\theta_1} \circ r_{\theta_2}$ είναι περιστροφή κατά $2(\theta_1 - \theta_2)$. Αν τώρα α_ϕ είναι δοθέν στοιχείο της $SO(2)$, εντοπίστε τις ζητούμενες ανακλάσεις χρησιμοποιώντας το προηγούμενο συμπέρασμα.)

2. Αποδείξτε ότι κάθε στοιχείο της $O(2)$ είναι γινόμενο το πολύ δύο ανακλάσεων. Τι μπορείτε να πείτε για την $O(1)$;
3. Αποδείξτε ότι για κάθε ανάκλαση r_W σε υπερεπίπεδο $W = W_A$ υπάρχει ορθοκανονική βάση στην οποία ο πίνακας της r_W είναι διαγώνιος, τέτοιος ώστε τα στοιχεία της διαγωνίου να είναι όλα 1, εκτός από ένα που είναι -1. (Υπόδειξη. Επειδή οι ιδιοτιμές της r_W είναι 1 και -1, και τα στοιχεία του W είναι όλα ιδιοδιανύσματα της ιδιοτιμής 1, ο ιδιοχώρος της 1 είναι $(n - 1)$ -διάστατος και το ορθοσυμπλήρωμά του είναι το $\{\mathbf{A}\}$. Η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι μία ορθοκανονική βάση του $\{\mathbf{A}\}^\perp = W$ μαζί με το $\mathbf{A}$.)
4. Ο τελεστής συμμετρίας $s_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ως προς την αρχή δίνεται από την $s_n(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (δείτε και την Άσκηση 2.2.1.1ε'). Ο τελεστής συμμετρίας s_n είναι μία γραμμική απεικόνιση με πίνακα $-I_n$ ως προς την κανονική βάση. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.2.7, αποδείξτε ότι ο s_n δεν μπορεί να είναι το γινόμενο λιγότερων από n ανακλάσεις.
5. Έστω σημείο $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ διαφορετικό από το $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ και $\mathbf{x}' = (x, y, 0)$ η προβολή του στο επίπεδο $z = 0$. Έστω επίσης

$$\theta = \angle(\mathbf{x}', \mathbf{e}_1), \quad \phi = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3).$$

Ξεκινώντας από το $\|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$ εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $\alpha(\theta)$ με πίνακα

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

καταλήγουμε στο σημείο $\mathbf{x}'$. Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζει ταυτόχρονα μία νέα ορθοκανονική βάση για το $\mathbb{R}^3$, την $\{\alpha(\theta)(\mathbf{e}_1), \alpha(\theta)(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_3\}$. Στο επίπεδο τώρα που καθορίζουν τα $\alpha(\theta)(\mathbf{e}_1)$ και $\mathbf{e}_3$, εφαρμόζουμε περιστροφή α' κατά $\pi/2 - \theta$. Ο πίνακας της περιστροφής αυτής ως προς την βάση $\{\alpha(\theta)(\mathbf{e}_1), \alpha(\theta)(\mathbf{e}_2), \mathbf{e}_3\}$ είναι ο

$$A'(\phi) = \begin{pmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix}$$

Προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός $\alpha' \circ \alpha$ με πίνακα ως προς την κανονική βάση

$$A(\theta) \cdot A'(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta & -\cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta & -\cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

απεικονίζει το $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{e}_1}$ στο $\mathbf{x}$.

- (α') Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες της παραπάνω συζήτησης.
- (β') Αποδείξτε ότι η $SO(3)$ δρα μεταβατικά σε σφαίρες με κέντρο την αρχή.
- (γ') Αποδείξτε πως κάθε στοιχείο της $SO(3)$ γράφεται στη μορφή (??).

3.2.6 Το Ισομετρικό Θεώρημα

Θα αποδείξουμε το παρακάτω

Θεώρημα 3.2.25. (Ισομετρικό Θεώρημα) Κάθε στοιχείο της $E(n)$ είναι σύνθεση ενός στοιχείου της $T(n)$ και ενός στοιχείου της $O(n)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in E(n)$. Συνθέτοντας εν ανάγκη με μία μεταφορά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι $f \in O(n)$. Έστω $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Από την Πρόταση 3.2.3 έχουμε

$$\|f(\mathbf{e}_i)\| = \|\mathbf{e}_i\| = 1, \quad f(\mathbf{e}_i) \cdot f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Συνεπώς, τα $f(\mathbf{e}_i), i = 1, \dots, n$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, γράφουμε

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x'_i f(\mathbf{e}_i).$$

Είναι:

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{e}_i) = x'_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Άρα,

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{e}_i).$$

Επομένως, για $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) \mathbf{e}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) f(\mathbf{e}_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n x_i f(\mathbf{e}_i) + \mu \sum_{i=1}^n y_i f(\mathbf{e}_i) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας της ως προς την κανονική βάση έχει γραμμές τα ορθοκανονικά διανύσματα $f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n$, άρα $f \in O(n)$. $\square$

Θα δείξουμε τώρα το εξής:

Θεώρημα 3.2.26. $E(n) = T(n) \rtimes O(n)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε πως κάθε στοιχείο της (n) γράφεται με μοναδικό τρόπο ως σύνθεση ενός στοιχείου της $T(n)$ και ενός στοιχείου της $O(n)$. Πράγματι αν υπήρχε $f \in E(n)$ με $f = T_{\mathbf{a}} \circ A = T_{\mathbf{b}} \circ B$, $T_{\mathbf{a}}, T_{\mathbf{b}} \in T(n)$, $A, B \in O(n)$, τότε

$$T_{\mathbf{a}-\mathbf{b}} = BA^{-1},$$

το οποίο είναι δυνατόν μόνο αν $T_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{b}}$ και $A = B$. $\square$

3.2.7 Αναλλοίωτο του μήκους των καμπυλών

Έστω γ συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη του $\mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I = [a, b]$. Η Ευκλείδεια νόρμα της παραγώγου είναι

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| = \left(\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2 \right)^{1/2}$$

και το Ευκλείδειο μήκος της γ ορίζεται από την

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Πρόταση 3.2.27. Το Ευκλείδειο μήκος είναι αναλλοίωτο από τη δράση της $E(n)$.

Απόδειξη. Έστω $\gamma = \gamma(t)$ συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ και έστω επίσης $T_{\mathbf{a}}$ μία μεταφορά και $A \in O(n)$ με αντίστοιχο ορθογώνιο μετασχηματισμό α . Τότε

1. $\|(T_{\mathbf{a}} \circ \gamma)(t)\| = \|(\gamma(t) + \mathbf{a})\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$ και
2. $\|(\alpha(\gamma))(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)\|$.

Αποδεικνύουμε τη δεύτερη σχέση. Έστω $\alpha = [a_{ij}]_{i,j=1,\dots,n}$ ο πίνακας του α . Τότε $\alpha(\gamma(t)) = \gamma(t)A$ και παίρνοντας παραγώγους στα δύο μέρη χρησιμοποιώντας και τον κανόνα της αλυσίδας¹ έχουμε

$$\dot{\gamma}(t)D\alpha(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)A = \alpha(\dot{\gamma}(t)),$$

με τον $D\alpha$ να είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του α . Επειδή για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1}x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}x_i \right)$$

¹Γράφουμε τον κανόνα της αλυσίδας με τρόπον ώστε να διατηρούνται τα διανύσματα υπό μορφή πινάκων γραμμών.

προκύπτει αμέσως ότι $D\alpha(\mathbf{x}) = A^T$. Ισχύει επίσης ότι $\|\mathbf{x} \cdot A^T\| = \|\alpha^{-1}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$. Συνεπώς,

$$\|(\alpha(\gamma))'(t)\| = \|\dot{\gamma}(t)D\alpha(\gamma(t))\| = \|\alpha^{-1}(\dot{\gamma}(t))\| = \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

□

Αποδεικνύουμε τώρα ένα αποτέλεσμα που μας είναι χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις.

Πρόταση 3.2.28. *Εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ αποτελεί τον συντομότερο δρόμο που τα ενώνει.*

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας μία μεταφορά, μπορούμε να υποθέσουμε $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και εφαρμόζοντας έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathbf{y} = (0, \dots, 0, y_n)$, $y_n > 0$. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι το

$$\mathbf{c}(t) = ty_n \mathbf{e}_n, \quad t \in [0, 1],$$

και εφόσον $\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = y_n$, παίρνουμε

$$\ell(\mathbf{c}) = \int_0^1 y_n dt = y_n.$$

Εάν τώρα γ είναι μία οποιαδήποτε συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$, με $\gamma(a) = \mathbf{0}$, $\gamma(b) = \mathbf{y}$, τότε

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n (\dot{x}_i(t))^2 \right) dt \\ &\geq \int_a^b |\dot{x}_n(t)| dt \\ &\geq \left| \int_a^b \dot{x}_n(t) dt \right| \\ &= |x_n(b) - x_n(a)| \\ &= |y_n - 0| = y_n = \ell(\mathbf{c}). \end{aligned}$$

Παίρνοντας $\inf$ επάνω από όλες τις γ που ενώνουν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Γεωδαισιακότητα

Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ορίζουμε μία νέα μετρική d_1 στον X , την *επαγόμενη εμφυή μετρική* ως εξής:

$$d_1(x, y) = \inf\{\ell(\gamma)\},$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω στα μήκη $\ell(\gamma)$ όλων των δρόμων από το x στο y . Εδώ, ένας τέτοιος δρόμος θα θεωρείται μία συνεχής καμπύλη

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow X$$

με $\gamma(0) = x$ και $\gamma(1) = y$. (Τα μήκη τέτοιων δρόμων ορίζονται όπως τα μήκη ευθυγραμμισμένων καμπυλών). Θέτουμε $d_1(x, y) = \infty$ αν δεν υπάρχει δρόμος πεπερασμένου μήκους από το x στο y .

Ορισμός 3.2.29. Εάν

$$d_1(x, y) = d(x, y),$$

για όλα τα x και y λέμε ότι ο (X, d) είναι *μετρικός χώρος κατά δρόμους* και η d είναι *εμφυής*. Εάν το infimum πιάνεται για κάθε $x, y \in X$, τότε ο μετρικός χώρος (X, d) λέγεται *γεωδαισιακός* και οι δρόμοι πάνω στους οποίους συμβαίνει αυτό καλούνται *γεωδαισιακές*.

Πόρισμα 3.2.30. Ο Ευκλείδειος μετρικός χώρος $(\mathbb{R}^n, e_n)$ είναι γεωδαισιακός. Οι γεωδαισιακές του είναι οι ευθείες.

Χορδική μετρική στην S^{n-1}

Στο σημείο αυτό κάνουμε ένα σχόλιο που θα μας φανεί χρήσιμο στο κεφάλαιο της Γεωμετρίας της Αντιστροφής, δίνοντας ένα παράδειγμα μίας μετρικής που δεν είναι εμφυής. Συμβολίζουμε με S^{n-1} τη μοναδιαία σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$ και θεωρούμε τον περιορισμό c_n της Ευκλείδειας μετρικής e_n στην S^{n-1} :

$$c_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{n-1}.$$

Η c_n καλείται *χορδική μετρική* της S^{n-1} και προκύπτει από το Ισομερικό Θεώρημα ότι

$$C(n) = \text{Isom}(S^{n-1}, c_n) = O(n).$$

(Δείτε την Άσκηση 3.2.6.1(θ')iii.) Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι η $C(n)$ δρά μεταβατικά στην S^{n-1} , άρα ο χώρος των τροχιών της Γεωμετρίας $(S^{n-1}, C(n))$, αποτελείται από ένα σημείο, την $S^{n-1} = \text{orb}(\mathbf{e}_n)$. Από την άλλη, οι σταθεροποιητές κάθε σημείου της S^{n-1} είναι όλοι ομάδες ισόμορφες με την $O(n-1)$. Η Σφαιρική Γεωμετρία $(S^{n-1}, S(n))$ που θα δούμε στο Κεφάλαιο ?? είναι η Γεωμετρία $(S^{n-1}, C(n))$: $S(n) = C(n) = O(n)$. Όμως εκεί, η $S(n) = O(n)$ είναι η ισομετρική ομάδα της *σφαιρικής μετρικής* s_n που είναι η εμφυής μετρική που παράγεται από τη χορδική μετρική αλλά δεν είναι ίση με αυτήν. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας πάρουμε τα σημεία $\mathbf{x} = (1, 0)$ και $\mathbf{y} = (0, 1)$ στον κύκλο S^1 :

$$c_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{2}.$$

Έστω καμπύλη γ του S^1 , $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $\gamma(0) = \mathbf{x}$, $\gamma(1) = \mathbf{y}$. Επειδή η καμπύλη ανήκει στον κύκλο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x(t) = \cos(\theta(t))$, $y(t) = \sin(\theta(t))$, για κάποια (παραγωγίσιμη) συνάρτηση θ με $\theta(0) = 0$, $\theta(1) = \pi/2$. Είναι $\|\dot{\gamma}(t)\| = |\dot{\theta}(t)|$ και

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 |\dot{\theta}(t)| dt \geq |\theta(1) - \theta(0)| = \pi/2.$$

Η τιμή $\pi/2$ πιάνεται για $\dot{\theta}(t) = \pm 1$ και έτσι

$$d_I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (= s_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \pi/2 > \sqrt{2}.$$

3.2.8 Το Θεώρημα των Ανακλάσεων



Élie Joseph Cartan, 1869-1951

Το 1937 ο Élie Cartan δημοσίευσε ένα θεώρημα του κατά το οποίο η ορθογώνια ομάδα $O(n, F)$, $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, γεννάται από ανακλάσεις. Αργότερα το θεώρημα αυτό γενικεύτηκε από τον Dieudonné.



Jean Alexandre Eugène Dieudonné, 1906-1992

Παρακάτω αποδεικνύουμε την εκδοχή του Θεωρήματος Cartan-Dieudonné που μας ενδιαφέρει

Θεώρημα 3.2.31. (Cartan-Dieudonné) Κάθε στοιχείο της ορθογώνιας ομάδας $O(n)$ διαφορετικού του ταυτοτικού στοιχείου γράφεται ως σύνθεση το πολύ n ανακλάσεων. Όταν $n \geq 2$, η ταυτοτική απεικόνιση είναι η σύνθεση κάθε ανάκλασης με τον εαυτό της.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι με επαγωγή στη διάσταση. Όταν $n = 1$, οι μόνοι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι ο ταυτοτικός id και ο αντίθετός του $-id$. Όμως ο $-id$ είναι η ανάκλαση στο $W = \{0\}$. Όταν $n \geq 2$, έχουμε δει ότι κάθε ανάκλαση r_W είναι ενελεκτική, δηλαδή, $r_W \circ r_W = id$.

Έστω τώρα $n \geq 2$ και α ορθογώνιος μετασχηματισμός διαφορετικός από την ταυτοτική απεικόνιση. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. Ο α έχει ιδιοτιμή το 1. Στην περίπτωση αυτή, έστω $\mathbf{v}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, $\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. Αν $\mathbf{A} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, έστω το υπερεπίπεδο από την αρχή $W = W_{\mathbf{A}}$, ώστε $\mathbb{R}^n = W \oplus \langle \mathbf{A} \rangle$. Ισχυριζόμαστε πως $\alpha(W) \subset W$. Πράγματι, αν

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$$

για κάθε $\mathbf{w} \in W$, τότε και

$$\alpha(\mathbf{w}) \cdot \alpha(\mathbf{v}) = 0,$$

επειδή η α είναι ισομετρία με $\alpha(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Επειδή όμως $\alpha(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ έπεται ότι

$$\alpha(\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} = 0 \implies \alpha(W) \subset W.$$

Επιπλέον, επειδή ο α δεν είναι ο ταυτοτικός, ο περιορισμός α_W του α στο W και πάλι δεν είναι ο ταυτοτικός στο W . Επειδή $\dim(W) = n - 1$, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι ο α_W γράφεται σαν σύνθεση το πολύ $k \leq n - 1$ ανακλάσεων σε υπερεπίπεδα $W_i, i = 1, \dots, k$ (εδώ τα υπερεπίπεδα είναι $n - 2$ -διάστατα):

$$\alpha_W = r'_k \circ \dots \circ r'_1.$$

Επεκτείνουμε τώρα κάθε ανάκλαση r'_i σε ανάκλαση r_i ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}^n$ με τον εξής τρόπο: έχουμε κατ' αρχάς ότι $W = W_i \oplus V_i, V_i = W_i^\perp, i = 1, \dots, k$. Εάν $V = \langle \mathbf{v} \rangle$, επειδή $V \perp W$ προκύπτει ότι τα $U_i = W_i \oplus V, i = 1, \dots, k$, είναι υπερεπίπεδα. Για κάθε $\mathbf{x} \in W$, είναι

$$r'_i(\mathbf{x}) = \text{pr}_{W_i}(\mathbf{x}) - \text{pr}_{V_i}(\mathbf{x}).$$

Τώρα,

$$\mathbb{R}^n = U_i \oplus V_i = W_i \oplus V \oplus V_i,$$

οπότε, ορίζουμε τις r_i στο $\mathbb{R}^n$ από τις σχέσεις:

$$r_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = r'_i(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{v},$$

για κάθε $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v} \in W \oplus V = \mathbb{R}^n$. Λόγω των υποθέσεών μας, είναι

$$r_i(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) = \text{pr}_{U_i}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}) - \text{pr}_{V_i}(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{v}),$$

επομένως οι r_i είναι ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα U_i . Επειδή τώρα η α είναι η ταυτοτική στον V έπεται ότι

$$\alpha = r_k \circ \dots \circ r_1.$$

II. Ο α δεν έχει ιδιοτιμή το 1. Έστω $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ και υπερεπίπεδο $W \perp (\alpha(\mathbf{v}) - \mathbf{v})$. Επειδή ο α είναι ισομετρία που διατηρεί την αρχή, είναι $\|\alpha(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ από την Πρόταση 3.2.3. Επίσης, από το Λήμμα ?? έχουμε

$$r_W(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}),$$

όπου r_W είναι η ανάκλαση στο W . Τώρα, η $r_W \circ \alpha$ σταθεροποιεί το $\mathbf{v}$:

$$r_W(\alpha(\mathbf{v})) = r_W(r_W(\mathbf{v})) = \mathbf{v}.$$

Επειδή $r_W^2 = id.$, εάν ήταν $r_W \circ \alpha = id.$, τότε

$$r_W \circ (r_W \circ \alpha) = r_W \implies \alpha = r_W$$

το οποίο είναι άτοπο διότι $\alpha(\mathbf{v}) \neq \mathbf{v}$ για κάθε $\mathbf{v}$. Άρα, βρισκόμαστε στην Περίπτωση I: υπάρχουν το πολύ $k \leq n - 1$ ανακλάσεις r_k σε υπερεπίπεδα W_k ώστε

$$r_W \circ \alpha = r_k \circ \dots \circ r_1.$$

Συνεπώς,

$$\alpha = r_W \circ r_k \circ \dots \circ r_1.$$

□

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται και στην περίπτωση οποιασδήποτε Ευκλείδειας ισομετρίας αν επιτρέψουμε *μη γνήσιες ανακλάσεις*, δηλαδή, ανακλάσεις σε υπερεπίπεδα που δεν περνούν αναγκαστικά από την αρχή (Άσκηση ??). Αν τώρα $f \in E(n)$, γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$f = T_{\mathbf{a}} \circ \alpha, \quad T_{\mathbf{a}} \in T(n), \quad \alpha \in O(n).$$

Από το Θεώρημα 3.2.13 υπάρχουν $k \leq n$ ανακλάσεις $r_i, i = 1, \dots, k$ σε υπερεπίπεδα από την αρχή ώστε

$$f = T_{\mathbf{a}} \circ r_k \circ \dots \circ 1.$$

Όμως, η σύνθεση μεταφοράς και ανάκλασης σε υπερεπίπεδο από την αρχή είναι μη γνήσια ανάκλαση (Άσκηση 3.2.2.1(θ')i). Προκύπτει το

Θεώρημα 3.2.32. (Θεώρημα των Ανακλάσεων) Κάθε στοιχείο της $E(n)$ γράφεται είτε ως σύνθεση το πολύ n ανακλάσεων είτε ως σύνθεση μίας μη γνήσιας ανάκλασης και το πολύ n ανακλάσεων.

3.2.9 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε πως για κάθε ισομετρία $f \in E(n)$ υπάρχει ισομετρία $\tilde{f} \in E(n+1)$ τέτοια ώστε $\tilde{f}|_{\mathbb{R}^n} = f$. (Υπόδειξη. Θέσατε

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (f(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}),$$

και αποδείξτε ότι $\tilde{f} \in E(n+1)$.)

2. Έστω Γεωμετρία (X, G) . Η G λέμε ότι δρα *διπλά μεταβατικά* στον X αν για κάθε ζεύγη $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ διαφορετικών σημείων υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $g(x_i) = y_i, i = 1, 2$. Αποδείξτε ότι στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ισχύει ότι αν $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ είναι ζεύγη διαφορετικών σημείων, τότε υπάρχει Ευκλείδεια ισομετρία g με $g(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i, i = 1, 2$, αν και μόνο αν

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|.$$

(Υπόδειξη. Θεωρήστε τις ισομετρίες που απεικονίζουν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ στα $\mathbf{0}, \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, και τα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ στα $\mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$, αντίστοιχα.)

3. Έστω $X \neq \emptyset$ σύνολο, και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση

$$\iota_X : X \rightarrow (\mathbb{R}^n, e_n).$$

Για κάθε $x, y \in X$ ορίζουμε

$$d(x, y) = e_n(\iota_X(x), \iota_X(y)).$$

- (α') Αποδείξτε ότι ο (X, d) είναι μετρικός χώρος.
 (β') Ταυτίζοντας τον μέσω της ι_X με την εικόνα του εντός του $\mathbb{R}^n$ την οποία θα συμβολίζουμε επίσης με X , θα γράφουμε στο εξής

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$

Η d λέγεται η *μετρική επαγόμενη από την Ευκλείδεια μετρική στον X* . Αποδείξτε ότι αν η $f \in E(n)$, τότε ο περιορισμός της $f_X : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ στον X είναι ισομετρία του (X, d) αν $f(X) = X$.

- (γ') Το αντίστροφο του προηγούμενου ερωτήματος είναι γενικά πολύ δύσκολο. Εξετάζουμε εδώ την περίπτωση $X = S^{n-1}$, $d = c_n$. Αν $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ είναι ισομετρία, ορίζουμε επέκτασή της F σε όλο τον $\mathbb{R}^n$ από τη σχέση

$$F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad F(\mathbf{x}) = f(x/\|\mathbf{x}\|) \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

Αποδείξτε με τη σειρά, ότι α) $\|F(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, β) $F(\mathbf{x}) \cdot F(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και γ) η F είναι γραμμική απεικόνιση (μιμηθείτε εδώ την απόδειξη του Ισομετρικού Θεωρήματος).

@copyright I.D. PLATIS

Κεφάλαιο 4

Ομοιοθετική Γεωμετρία

Η Ομοιοθετική Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία $(\mathbb{R}^n, S(n))$, όπου $S(n)$ είναι η ομάδα των ομοιοθεσιών του $\mathbb{R}^n$. Η Γεωμετρία αυτή είναι ευρύτερη της Ευκλείδειας, με την έννοια ότι την περιέχει, αλλά οι $S(n)$ -ιδιότητες είναι λιγότερες από τις $E(n)$ -ιδιότητες.

4.1 Ομοιοθεσίες σε μετρικό χώρο

Αρχίζουμε με τον ορισμό της ομοιοθεσίας σε τυχαίο μετρικό χώρο.

Ορισμός 4.1.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow X$ απεικόνιση επί. Η f θα λέγεται ομοιοθεσία εάν υπάρχει $k = k(f) > 0$ τέτοια ώστε

$$d(f(x), f(y)) = k \cdot d(x, y), \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Έπεται αμέσως ότι μία ομοιοθεσία f είναι και 1-1 απεικόνιση και τονίζουμε ότι ο συντελεστής k που θα καλείται και *συντελεστής (ή λόγος) της ομοιοθεσίας* δεν εξαρτάται από την επιλογή των σημείων $x, y \in X$.

Πρόταση 4.1.2. Το σύνολο $\text{Sim}(X, d)$ των ομοιοθεσιών ενός μετρικού χώρου αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση.

Απόδειξη. Απευθείας διαπιστώνουμε ότι:

- Αν f, g είναι ομοιοθεσίες με λόγους ομοιοθεσίας k_f, k_g , αντίστοιχα, τότε και η $f \circ g$ είναι ομοιοθεσία με λόγο ομοιοθεσίας $k_f k_g$.
- Το ουδέτερο στοιχείο είναι η ταυτοτική απεικόνιση.
- Η αντίστροφη f^{-1} μιας ομοιοθεσίας f με λόγο ομοιοθεσίας k είναι ομοιοθεσία με λόγο ομοιοθεσίας $1/k$.

□

Επειδή κάθε ισομετρία του X είναι και αυτομάτως ομοιοθεσία, (με λόγο ομοιοθεσίας 1), έχουμε ότι η ομάδα $\text{Isom}(X, d)$ των ισομετριών του X είναι υποομάδα της $\text{Sim}(X, d)$. Ισχύει όμως και κάτι παραπάνω:

Πρόταση 4.1.3. $\text{Isom}(X, d) \triangleleft \text{Sim}(X, d)$.

Απόδειξη. Για κάθε $f \in \text{Sim}(X, d)$ με συντελεστή ομοιοθεσίας k , και για κάθε $g \in \text{Isom}(X, d)$, ισχύει για κάθε $x, y \in X$ ότι:

$$\begin{aligned} d(f(g(f^{-1}(x))), f(g(f^{-1}(y)))) &= k d(g(f^{-1}(x)), g(f^{-1}(y))) \\ &= k d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \\ &= k \cdot (1/k) d(x, y) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 4.1.4. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και οι Γεωμετρίες $(X, \text{Isom}(X, d))$ και $(X, \text{Sim}(X, d))$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Για κάθε $x \in X$, $\text{orb}_{\text{Isom}(X, d)}(x) \triangleleft \text{orb}_{\text{Sim}(X, d)}(x)$.
2. Εάν η $\text{Isom}(X, d)$ δρα μεταβατικά στον X , τότε και η $\text{Sim}(X, d)$ δρα μεταβατικά στον X .
3. Εάν η $\text{Sim}(X, d)$ δρα ελεύθερα στον X , τότε και η $\text{Isom}(X, d)$ δρα ελεύθερα στον X .

4.1.1 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι κάθε ομοιοθεσία μετρικού χώρου είναι 1-1 απεικόνιση.
2. Έστω μετρικός χώρος (X, d) και απεικόνιση $f : X \rightarrow X$. Η f λέγεται συνεχής στο $x_0 \in X$ αν

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(f(x), f(x_0)) < \epsilon, \forall x \in B_{x_0}(\delta).$$

Αποδείξτε ότι κάθε ομοιοθεσία είναι συνεχής στον X και η αντίστροφή της f^{-1} είναι επίσης συνεχής στον X .

3. Αποδείξτε το Πόρισμα 4.1.4.
4. Μία απεικόνιση $f : X \rightarrow X$ μετρικού χώρου (X, d) επί του εαυτού του λέγεται αμφι-Lipschitz, αν

$$\exists K = K(f) \geq 1 : \forall x, y \in X, (1/K)d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y).$$

- (α') Αποδείξτε ότι κάθε αμφι-Lipschitz απεικόνιση με σταθερά K είναι αντιστρέψιμη και ότι η αντίστροφή της είναι επίσης αμφι-Lipschitz απεικόνιση με σταθερά K .
- (β') Αποδείξτε ότι κάθε αμφι-Lipschitz απεικόνιση με σταθερά K είναι συνεχής και ότι η αντίστροφή της είναι επίσης συνεχής.
- (γ') Αποδείξτε ότι κάθε ομοιοθεσία του (X, d) είναι αμφι-Lipschitz απεικόνιση.
- (δ') Δώστε παράδειγμα αμφι-Lipschitz απεικόνισης που δεν είναι ισομετρία.

4.2 Η ομάδα $S(n)$

Ερχόμαστε τώρα στην ομάδα ομοιοθεσιών $S(n) = \text{Sim}(\mathbb{R}^n, e_n)$ του $\mathbb{R}^n$. Η ομάδα αυτή περιέχει όλες τις ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$ καθώς και τις απεικονίσεις συστολής/διαστολής που ορίζονται αμέσως παρακάτω.

4.2.1 Η ομάδα συστολών/διαστολών $D(n)$

Ορισμός 4.2.1. Έστω $\delta > 0$, $\delta \neq 1$. Η απεικόνιση $D_\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$D_\delta(\mathbf{x}) = \delta \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

θα λέγεται δ -συστολή (αντ. δ -διαστολή) αν $\delta > 1$ (αντ. $\delta < 1$).

Είναι σαφές ότι οι απεικονίσεις είναι γραμμικές απεικονίσεις και επειδή για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$e_n(D_\delta(\mathbf{x}), D_\delta(\mathbf{y})) = \delta \cdot e_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

έπεται ότι οι συστολές/διαστολές D_δ είναι Ευκλείδειες ομοιοθεσίες με λόγο ομοιοθεσίας δ . Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι για κάθε $D_\delta \in D(n)$,

$$\|D_\delta(\mathbf{x})\| = \delta \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Επίσης, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι

$$D_\delta(\mathbf{x}) \cdot D_\delta(\mathbf{y}) = (\delta\mathbf{x}) \cdot (\delta\mathbf{y}) = \delta^2 \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}). \quad (4.2)$$

Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2.2. Το σύνολο $D(n)$ των συστολών/διαστολών του $\mathbb{R}^n$ μαζί με την ταυτοτική απεικόνιση, αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Απόδειξη. Για κάθε $\delta_1, \delta_2 > 0$ είναι

$$D_{\delta_1} \circ D_{\delta_2} = D_{\delta_1 \delta_2} = D_{\delta_2 \delta_1} = D_{\delta_2} \circ D_{\delta_1}.$$

Επίσης, για κάθε $\delta > 0$, $(D_\delta)^{-1} = D_{1/\delta}$, και η απεικόνιση

$$D \ni D_\delta \mapsto \delta \in \mathbb{R}_{>0}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων. □

Πόρισμα 4.2.3. Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης D_δ ως προς την κανονική βάση είναι ο δI_n . Η ορίζουσά του ισούται με δ^n .

Η δράση της $D(n)$ στον $\mathbb{R}^n$ δίνεται από την

$$(D_\delta, \mathbf{x}) \mapsto \delta \mathbf{x}.$$

Η τροχιά του μηδενικού στοιχείου αποτελείται μόνο από το στοιχείο αυτό, ενώ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι

$$\text{orb}(\mathbf{x}) = \{\delta \mathbf{x}, \mid \delta > 0\},$$

δηλαδή, η ανοικτή ημιευθεία από το $\mathbf{0}$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{x}$. Ο χώρος των τροχιών $\mathbb{R}^n/D(n)$ αποτελείται από όλες αυτές τις ημιευθείες μαζί με την αρχή. Η δράση είναι ελεύθερη στο $\mathbb{R}_*^n$ ($\text{Stab}(\mathbf{0}) = D(n)$), αλλά δεν είναι μεταβατική. Αυτό συμβαίνει μόνο επάνω στις ανοικτές ημιευθείες που αποτελούν τις τροχιές.

Πρόταση 4.2.4. Έστω $\mathbb{R}_*^n/D(n)$ ο χώρος των τροχιών της δράσης της $D(n)$ στον $\mathbb{R}_*^n$. Τότε, υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση $\mathbb{R}_*^n/D(n) \rightarrow S^{n-1}$.

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο του χώρου τροχιών είναι ανοικτή ημιευθεία από την αρχή στην κατεύθυνση κάποιου διανύσματος που μπορούμε να το υποθέσουμε μοναδιαίο. Αντιστρόφως, κάθε μοναδιαίο διάνυσμα καθορίζει με μοναδικό τρόπο ημιευθεία από την αρχή. $\square$

Πρόταση 4.2.5. Η δράση της $D(n)$ διατηρεί τις γωνίες.

Απόδειξη. Αν κάποιο από τα διανύσματα είναι το μηδενικό, δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_*^n$, και $\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta$, έστω $D_\delta \in D(n)$. Χρησιμοποιώντας τις (??), (??), έχουμε

$$\cos(\angle(D_\delta(\mathbf{x}), D_\delta(\mathbf{y}))) = \frac{D_\delta(\mathbf{x}) \cdot D_\delta(\mathbf{y})}{\|D_\delta(\mathbf{x})\| \|D_\delta(\mathbf{y})\|} = \frac{\delta^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})}{(\delta \|\mathbf{x}\|)(\delta \|\mathbf{y}\|)} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \cos \theta.$$

$\square$

4.2.2 Ασκήσεις

1. Έστω $D_\delta \in D(n)$ και $T_{\mathbf{a}} \in T(n)$. Αποδείξτε ότι

$$T_{\mathbf{a}} \circ D_\delta = D_\delta \circ T_{(1/\delta)\mathbf{a}}.$$

2. Έστω $D_\delta \in D(n)$ και $A \in O(n)$ με αντιστοιχο μετασχηματισμό α . Αποδείξτε ότι

$$\alpha \circ D_\delta = D_\delta \circ \alpha.$$

3. Έστω $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma(t) = \mathbf{x}(t)$, συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Δείξτε τα ακόλουθα:

$$(\alpha') \quad \|(D_\delta \circ \gamma)(t)\| = \delta \|\dot{\gamma}(t)\|.$$

$$(\beta') \quad \ell(D_\delta \circ \gamma) = \delta \ell(\gamma).$$

4. Έστω Ω κλειστό και φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $\Omega' = D_\delta(\Omega)$. Αποδείξτε ότι

$$\text{Vol}_n(\Omega') = \delta^n \text{Vol}(\Omega).$$

(Υπόδειξη. Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών.)

4.2.3 Το Ομοιοθετικό Θεώρημα

Πρόταση 4.2.6. Κάθε στοιχείο $f \in S(n)$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση ενός στοιχείου $g \in E(n)$ και ενός στοιχείου της $D(n)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in S(n)$ με λόγο ομοιοθεσίας k . Ορίζουμε $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ απο την

$$g = f \circ D_{1/k}.$$

Για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι:

$$\begin{aligned} \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| &= \|f(D_{1/k}(\mathbf{x})) - f(D_{1/k}(\mathbf{y}))\| \\ &= k \|D_{1/k}(\mathbf{x}) - D_{1/k}(\mathbf{y})\| \\ &= k \cdot \frac{1}{k} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \end{aligned}$$

άρα $g \in E(n)$. □

Από το Ισομετρικό Θεώρημα τώρα, προκύπτει το

Θεώρημα 4.2.7. (Ομοιοθετικό Θεώρημα) Κάθε στοιχείο της $S(n)$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση ενός στοιχείου της $E(n)$ και ενός στοιχείου της $D(n)$.

Πόρισμα 4.2.8.

$$S(n) = E(n) \rtimes D(n) \simeq E(n) \rtimes (\mathbb{R}_{>0}, \cdot).$$

Ας παρατηρήσουμε ότι κάθε στοιχείο της $D(n)$ διαφορετικό του ταυτοτικού δεν μπορεί να γραφεί ως σύνθεση δύο ή περισσότερων ανακλάσεων, εφόσον οι ανακλάσεις είναι ισομετρίες.

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή του Ομοιοθετικού Θεωρήματος είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 4.2.9. Στην Ομοιοθετική (άρα και στην Ευκλείδεια) Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$, το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι π .

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι οι κορυφές του τριγώνου, επειδή τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα κείνται ενός επιπέδου, άρα μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση $n = 2$. Υποθέτουμε πρώτα ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Με κατάλληλες ομοιοθεσίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0) \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (0, x),$$

με το $x > 0$. Για τις οξείες γωνίες α, β του τριγώνου είναι

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Άρα,

$$\alpha + \beta = \arccos(x/\sqrt{x^2 + 1}) + \arccos(1/\sqrt{x^2 + 1}).$$

Παίρνοντας συνημίτονα και στις δύο πλευρές και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\sin(\arccos y) = \sqrt{1 - y^2}$ καταλήγουμε στην $\cos(\alpha + \beta) = 0$, άρα $\alpha + \beta = \pi/2$.

Στη γενική περίπτωση τώρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0) \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (x, y),$$

με τα $x, y > 0$. Αν $x = 1$, το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, οπότε μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις $x < 1, x > 1$. Αν $x < 1$, θεωρούμε τα δύο ορθογώνια τρίγωνα με κορυφές $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, (x, 0)$ και $(x, 0), \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2$ και εφαρμόζουμε το αποτέλεσμα της περίπτωσης των ορθογωνίων. Όμοια και για $x > 1$. $\square$

4.3 Μετρικοί απλοί λόγοι

Αρχίζουμε με την παρακάτω

Πρόταση 4.3.1. *Η $S(n)$ δρα διπλά μεταβατικά στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, τότε μπορούμε με μία μεταφορά ακολουθούμενη από μία περιστροφή και μία συστολή/διαστολή να τα απεικονίσουμε στα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1$. Αν συμβολίσουμε με f αυτήν την ομοιοθεσία και με g την αντίστοιχη ομοιοθεσία που απεικονίζει δύο άλλα σημεία $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ στα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1$, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f^{-1}$ απεικονίζει τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ στα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, αντίστοιχα. $\square$

Στην Ομοιοθετική Γεωμετρία λοιπόν, μπορούμε να υποθέτουμε ότι όλα τα ευθύγραμμα τμήματα έχουν μήκος 1, εφόσον η $S(n)$ -κλάση του τμήματος με άκρα $\mathbf{0}$ και $\mathbf{e}_1$ περιέχει όλα τα ευθύγραμμα τμήματα. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι όλες οι σφαίρες βρίσκονται στην $S(n)$ -κλάση της μοναδιαίας σφαίρας.

Η Πρόταση 4.2.1 έχει δύο ενδιαφέρουσες επεκτάσεις. Η πρώτη, έχει να κάνει με τα στοιχεία εκείνα της $S(n)$ που σταθεροποιούν δύο διαφορετικά σημεία.

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ σημεία του $\mathbb{R}^n$. Τότε*

1. $\text{Stab}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \{id.\}$ αν $n = 1$.
2. $\text{Stab}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \simeq O(n - 1)$ αν $n \geq 2$.

Απόδειξη. Στην περίπτωση όπου $n = 1$, μπορούμε να υποθέσουμε λόγω της Πρότασης 4.2.1 ότι $\mathbf{x}_1 = 0, \mathbf{x}_2 = 1$ και το αποτέλεσμα έπεται αμέσως. Στην περίπτωση όπου $n \geq 2$, μπορούμε να υποθέσουμε πάλι λόγω της Πρότασης 4.2.1 ότι $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_n$. Μία ομοιοθεσία που αφήνει αναλλοίωτα τα δύο αυτά σημεία μπορεί να είναι μόνο κάποιος ορθογώνιος μετασχηματισμός α του οποίου ο πίνακας θα έχει αναγκαστικά τη μορφή

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in O(n - 1).$$

$\square$

Μία σημαντική ομοιοθετική (άρα και ισομετρική) αναλλοίωτος είναι ο μετρικός απλός λόγος τριών σημείων που προκύπτει φυσιολογικά από το ερώτημα για το πότε η $S(n)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 4.3.3. Έστω διατεταγμένη τριάδα $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ ανά δύο διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του $\mathbb{R}^n$. Ο μετρικός απλός λόγος της $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ είναι

$$s(\mathbf{p}) = \|(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\| = \frac{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|}.$$

Πρόταση 4.3.4. Κάθε στοιχείο της $S(n)$ αφήνει αναλλοίωτο τον μετρικό απλό λόγο μιας διατεταγμένης τριάδας $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων ανά δύο.

Απόδειξη. Αν $f \in S(n)$,

$$s(f(\mathbf{p})) = \|(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), f(\mathbf{x}_3))\| = \frac{\|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_3)\|}{\|f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1)\|} = \frac{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3\|}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|} = \|(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\| = s(\mathbf{p}).$$

□

Για κάθε τριάδα σημείων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, υπάρχουν έξι μετατάξεις τους. Η ακόλουθη πρόταση αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 4.3.5. Αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\mathbb{R}^n$ και $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$, τότε:

1. $\|(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)\| \cdot \|(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i)\| = 1$.
2. $\|(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)\| \cdot \|(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\| \cdot \|(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i)\| = 1$.
3. Όλοι οι δυνατοί μετρικοί απλοί λόγοι εκφράζονται μέσω των

$$s_1 = \|(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)\|, \quad s_2 = \|(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)\|.$$

4. Είναι

$$s_1 + s_2 \geq 1$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ανήκουν στην ίδια ευθεία.

Θεώρημα 4.3.6. (Θεμελιώδες Θεώρημα των μετρικών απλών λόγων της Ομοιοθετικής Γεωμετρίας) Έστω $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ και $\mathbf{q} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ διατεταγμένες τριάδες ξένων ανά δύο σημείων του $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Υπάρχει $f \in S(n)$ με $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, αν και μόνο αν

$$s_i(\mathbf{p}) = s_i(\mathbf{q}), \quad i = 1, 2$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει $f \in S(n)$ με $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, τότε προκύπτει η ισότητα $s_i(\mathbf{p}) = s_i(\mathbf{q})$, $i = 1, 2$, από το αναλλοίωτο των μετρικών απλών λόγων της Πρότασης (??). Για το αντίστροφο, μπορούμε κανονικοποιώντας να υποθέσουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_n\}$$

και ότι

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y}_3 = \mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_n\}.$$

Αν $s_i(\mathbf{p}) = s_i(\mathbf{q})$, $i = 1, 2$, τότε $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ και $\|\mathbf{x} - \mathbf{e}_n\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{e}_n\|$. Από την τελευταία σχέση παίρνουμε ότι $x_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_n = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_n = y_n$, άρα,

$$\|\mathbf{x}_{n-1}\| = \|(x_1, \dots, x_{n-1})\| = \|(y_1, \dots, y_{n-1})\| = \|\mathbf{y}_{n-1}\|.$$

Αν $\mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{y}_{n-1}$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, τότε υπάρχει r ανάκλαση στο $\mathbb{R}^{n-1}$ με $r(\mathbf{x}_{n-1}) = \mathbf{y}_{n-1}$. Η ανάκλαση με πίνακα

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(n).$$

όπου R είναι ο πίνακας της r , διατηρεί τα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_n$ και απεικονίζει το $\mathbf{x}$ στο $\mathbf{y}$. □

Πόρισμα 4.3.7. Για $n > 1$, η $S(n)$ -κλάση ενός τριγώνου περιέχει όλα τα όμοια με αυτό τρίγωνα.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην τετριμμένη περίπτωση διατεταγμένων τριάδων διαφορετικών ανά δύο σημείων x_1, x_2, x_3 και y_1, y_2, y_3 της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε όπως προηγουμένως ώστε

$$x_1 = y_1 = 0, \quad x_2 = y_2 = 1, \quad x_3 = x, \quad y_3 = y, \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Το μόνο στοιχείο της $S(1)$ που σταθεροποιεί τα $0, 1$ είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός, άρα υπάρχει $f \in S(1)$ με $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, 3$, αν και μόνο αν $x = y$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τις σχέσεις των μετρικών λόγων, αλλά μας λέει και κάτι παραπάνω: στην πραγματική ευθεία έχουμε σχέση μεταξύ των ίδιων των σημείων και όχι μόνο μεταξύ των αποστάσεών τους.

Απλοί λόγοι

Ορισμός 4.3.8. Έστω $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ διατεταγμένη τριάδα συνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^n$, διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο. Ο απλός λόγος τους είναι

$$\sigma(\mathbf{p}) = \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}.$$

Ο απλός λόγος είναι καλώς ορισμένος. Πράγματι, από τις υποθέσεις μας έχουμε ότι τα σημεία ανήκουν σε ευθεία $\mathbf{c}(t) = \mathbf{u} + t\mathbf{v}$, οπότε

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{u} + t_i\mathbf{v}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Άρα,

$$\sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}.$$

Αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι τρία σημεία πάνω σε ευθεία διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους, τότε ορίζονται 6 απλοί λόγοι. Η παρακάτω πρόταση αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 4.3.9. Αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\mathbb{R}^n$ και $i, j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$, τότε:

$$I. \quad \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) \cdot \sigma(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) = 1.$$

$$2. \sigma(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) \cdot \sigma(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \cdot \sigma(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i) = -1.$$

3. Όλοι οι απλοί λόγοι εκφράζονται μέσω του απλού λόγου $\sigma = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) \neq 0$.

Πρόταση 4.3.10. Ο απλός λόγος τριών συννευθιακών σημείων διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο είναι ομοιοθετική αναλλοίωτος.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι συννευθιακά, τότε $\mathbf{x}_i = \mathbf{u} + t_i \mathbf{v}$ για κάποια $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ και $t_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Αν f είναι ομοιοθεσία, τότε $f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{u}) - t_i f(\mathbf{v})$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \sigma(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), f(\mathbf{x}_3)) &= \frac{(f(\mathbf{u}) - t_2 f(\mathbf{v})) - (f(\mathbf{u}) - t_1 f(\mathbf{v}))}{(f(\mathbf{u}) - t_3 f(\mathbf{v})) - (f(\mathbf{u}) - t_2 f(\mathbf{v}))} \\ &= \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} = \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3). \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 4.3.11. (Θεμελιώδες Θεώρημα των απλών λόγων της Ομοιοθετικής Γεωμετρίας) Έστω $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ και $\mathbf{q} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ διατεταγμένες τριάδες συννευθιακών, ξένων ανά δύο σημείων του $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $f \in S(n)$ με $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, αν και μόνο αν

$$\sigma(\mathbf{p}) = \sigma(\mathbf{q}).$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει $f \in S(n)$ με $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, τότε έχουμε από το αναλλοίωτο των απλών λόγων της Πρότασης 4.2.6 την ισότητα $\sigma(\mathbf{p}) = \sigma(\mathbf{q})$. Για το αντίστροφο, κανονικοποιούμε έτσι ώστε η ευθεία είναι η $t\mathbf{e}_n$ και ότι

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x}_3 = x\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{y}_3 = y\mathbf{e}_n, \quad x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Αν $x/(x-1) = y/(y-1)$ τότε $x = y$ και $f = id$.

□

4.3.1 Ασκήσεις

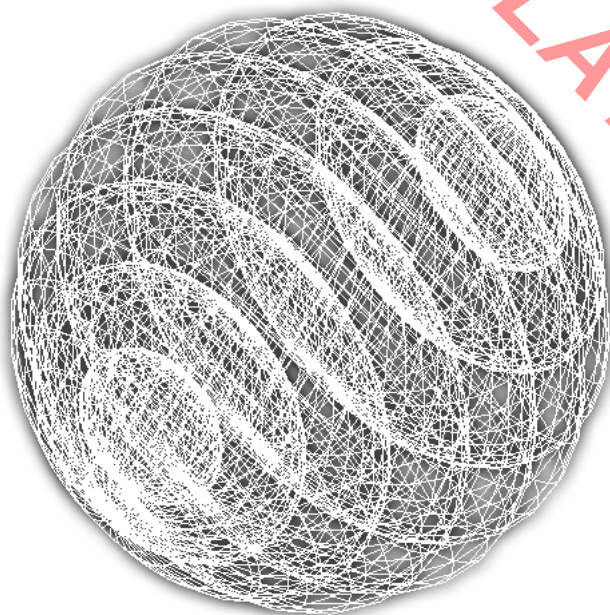
1. Αποδείξτε την Πρόταση ??.
2. Αποδείξτε την Πρόταση 4.2.5.
3. Έστω ότι $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι $(n+1)$ -άδα σημείων του $\mathbb{R}^n$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο. Υποθέτουμε επίσης ότι οποιαδήποτε n -άδα από τα σημεία αυτά είναι n -άδα γραμμικών ανεξάρτητων σημείων. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει $f \in S(n)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i$, $i = 0, \dots, n$, τότε είναι αναγκαστικά ο ταυτοτικός μετασχηματισμός. (Υπόδειξη. Ο f δεν μπορεί να είναι μεταφορά ή συστολή/διαστολή, άρα είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, ο οποίος έχει n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή 1.)

@copyright I.D. PLATIS

Κεφάλαιο 5

Σφαιρική Γεωμετρία

Η Σφαιρική Γεωμετρία κατά Klein είναι το ζεύγος $(S^{n-1}, O(n))$. Η Σφαιρική Γεωμετρία μελετήθηκε ήδη από τους αρχαίους χρόνους για τις πρακτικές εφαρμογές της στην πλοήγηση και την αστρονομία. Φέρει πολλές ομοιότητες αλλά και σημαντικές διαφορές από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Η σφαίρα S^2 έχει μελετηθεί ως επί το πλείστον ως μέρος της τρισδιάστατης Ευκλείδειας Γεωμετρίας (της στερεομετρίας), και εκεί η επιφάνεια θεωρείται ως εμφυτευμένη στον περιβάλλοντα χώρο $\mathbb{R}^3$. Σε κάθε διάσταση όμως, η μοναδιαία σφαίρα μπορεί να εξεταστεί με εμφυείς μεθόδους που δεν αναφέρονται ούτε προϋποθέτουν την ύπαρξη κανενός περιβάλλοντος χώρου, είτε εκτός ή εντός της σφαίρας. Η Σφαιρική Γεωμετρία είναι μία μετρική Γεωμετρία: έχουμε ήδη δει ότι η χορδική μετρική (που αναφέρεται στον περιβάλλοντα χώρο) έχει ομάδα ισομετριών την ορθογώνια ομάδα, αλλά ότι δεν είναι εμφυής. Θα θεωρούμε προς τούτο την S^{n-1} με την εμφυή μετρική της που λέγεται και σφαιρική μετρική. Πριν φτάσουμε εκεί θα εξετάσουμε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες της ίδιας της σφαίρας.



Η μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} με διάφορες σφαίρες μικρότερης διάστασης εντός της.

5.1 Η μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}

Έστω η μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} του $\mathbb{R}^n$,

$$S^{n-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Θα εξετάσουμε κατ' αρχάς τις τετριμμένες περιπτώσεις $n = 1, 2$. Όταν $n = 1$, η S^0 είναι απλώς τα σημεία ± 1 του $\mathbb{R}$, δηλαδή συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) αλλά μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Υπενθυμίζουμε πως ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι *συνεκτικό*, αν κάθε δύο σημεία του μπορούν να συνδεθούν με συνεχή καμπύλη που κείται όλη επί του συνόλου.

Στην περίπτωση $n = 2$, έχουμε τον οικείο σε εμάς μοναδιαίο κύκλο S^1 του $\mathbb{R}^2$, που είναι συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Συνήθως, θεωρούμε την παραμέτρηση του S^1 που προκύπτει από τις πολικές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(\theta) = \mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε το θ και ως τη γωνία των διανυμάτων $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{x}$ και έτσι να περιορίσουμε το θ στο $[0, 2\pi)$ (ή $[0, 2\pi]$, μια και συνήθως μας ενδιαφέρει το 1-1 μίας παραμετρημένης καμπύλης γ στο ανοικτό διάστημα ορισμού της καμπύλης). Είδαμε στην Ενότητα 3.2.4 ότι η χορδική μετρική δεν είναι εμφανής και από την απόδειξη αυτού υποδηλώνεται ότι η εμφανής μετρική μετρά την απόσταση δύο σημείων του κύκλου με το μήκος τόξου. Όπως θα δούμε παρακάτω, αυτό συμβαίνει και στη γενική περίπτωση. Σε ό,τι ακολουθεί, θα υποθέτουμε ότι $n \geq 3$. Σε αυτές τις διαστάσεις, όπως και στην περίπτωση $n = 2$, η σφαίρα S^{n-1} είναι ένα συμπαγές και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Η σφαίρα S^2 ειδικότερα, θα είναι η βάση για τα περισσότερα παραδείγματα που θα δώσουμε στη συνέχεια.

5.1.1 Σφαιρικές συντεταγμένες

Το οικείο σε όλους μας σύστημα των σφαιρικών συντεταγμένων του R^3 γενικεύεται για όλα τα $n \geq 3$, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.1.1. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ υπάρχει ακτινική συντεταγμένη $r \geq 0$ και $(n-1)$ -άδα γωνιακών συντεταγμένων

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}) \in [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi),$$

τέτοια ώστε $r = \|\mathbf{x}\|$ και

$$x_1 = r \cos(\varphi_1)$$

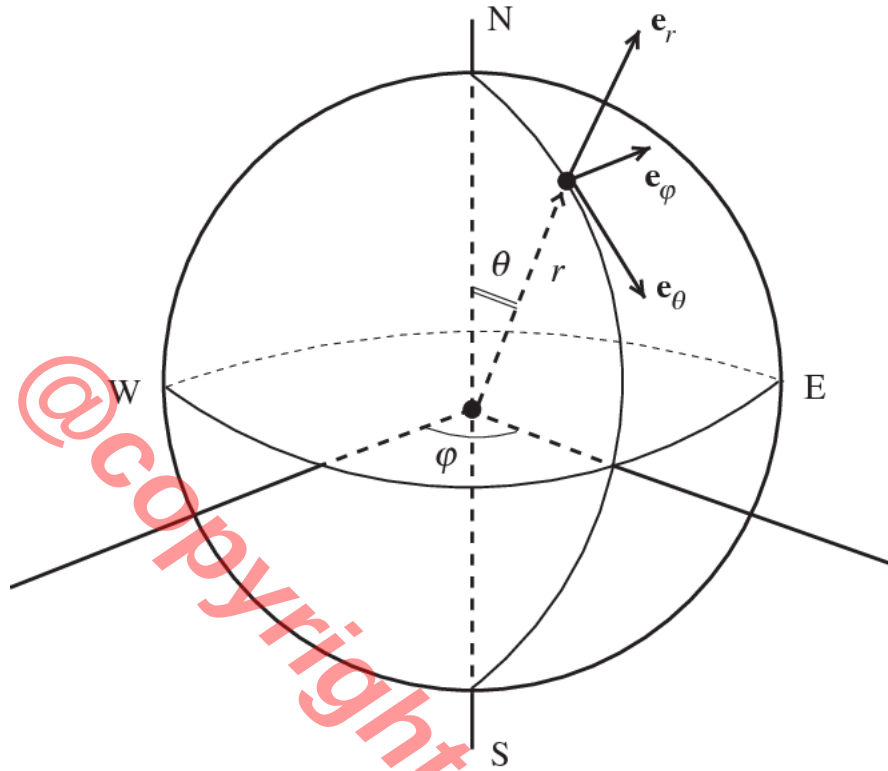
$$x_2 = r \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)$$

$$x_3 = r \sin(\varphi_1) \sin(\varphi_2) \cos(\varphi_3)$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = r \sin(\varphi_1) \cdots \sin(\varphi_{n-2}) \cos(\varphi_{n-1})$$

$$x_n = r \sin(\varphi_1) \cdots \sin(\varphi_{n-2}) \sin(\varphi_{n-1}).$$



Σφαιρικές συντεταγμένες στο $\mathbb{R}^3$. Στο σχήμα φαίνονται τα διανύσματα της βάσης του $\mathbb{R}^3$ σε σχέση με τις συντεταγμένες αυτές.

Απόδειξη. Έστω $\varphi_1 = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1)$. Τότε

$$\cos(\varphi_1) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x}\|} = x_1/r.$$

Προβάλλουμε το $\mathbf{x}$ στο υπερεπίπεδο συντεταγμένων ορθογώνιο στο $\mathbf{e}_1$:

$$\text{pr}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{x})\mathbf{e}_1 = \mathbf{x} - x_1\mathbf{e}_1 = (x_2, \dots, x_n).$$

Έστω $\varphi_2 = \angle(\text{pr}_1(\mathbf{x}), \mathbf{e}_2)$. Τότε

$$\cos(\varphi_2) = \frac{x_2}{\|(x_2, \dots, x_n)\|}.$$

Το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\text{pr}_1(\mathbf{x})$, είναι ορθογώνιο με μήκος υποτείνουσας r , άρα

$$\|(x_2, \dots, x_n)\| = r \cos(\pi/2 - \varphi_1) = r \sin(\varphi_1),$$

και παίρνουμε $x_2 = r \sin(\varphi_1) \cos(\varphi_2)$. Συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο, προβάλλοντας το $\text{pr}_1(\mathbf{x})$ στο υπερεπίπεδο συντεταγμένων ορθογώνιο στα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και κατόπιν προβάλλοντας το $\text{pr}_2(\text{pr}_1(\mathbf{x}))$ στο υπερεπίπεδο συντεταγμένων ορθογώνιο στα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, κ.λπ. Στο τελευταίο βήμα, η αντίστοιχη προβολή ανήκει σε κύκλο, επομένως $\varphi_{n-1} \in [0, 2\pi)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται με μοναδικό τρόπο εκτός από κάποιες ειδικές περιπτώσεις. Έχουμε

$$\begin{aligned}
 r &= \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_2^2 + x_1^2} \\
 \varphi_1 &= \operatorname{arccot} \frac{x_1}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_2^2}} = \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_1^2}} \\
 \varphi_2 &= \operatorname{arccot} \frac{x_2}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_3^2}} = \arccos \frac{x_2}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + \cdots + x_2^2}} \\
 &\vdots \\
 \varphi_{n-2} &= \operatorname{arccot} \frac{x_{n-2}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}} = \arccos \frac{x_{n-2}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}} \\
 \varphi_{n-1} &= 2 \operatorname{arccot} \frac{x_{n-1} + \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}}{x_n} = \begin{cases} \arccos \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}} & x_n \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x_{n-1}}{\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2}} & x_n < 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

όπου αν $x_k \neq 0$ για κάποιο k αλλά όλα τα $x_{k+1}, \dots, x_n$ μηδενίζονται, τότε μπορούμε να πάρουμε $\varphi_k = 0$ όταν $x_k > 0$, και $\varphi_k = \pi$ όταν $x_k < 0$. Ας πούμε, στο πρώτο βήμα της απόδειξης θεωρήσαμε σιωπηρά ότι το $\mathbf{x}$ δεν βρίσκεται πάνω στην ευθεία $t\mathbf{e}_1$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν συνέβαινε αυτό και $x_1 > 0$ (αντ. $x_1 < 0$), θα παίρναμε $\varphi_1 = 0$ (αντ. $\varphi_1 = \pi$). $\square$

Σχόλιο 5.1.2. Πολλές φορές μας είναι πιο χρήσιμο να θεωρούμε μία απλοποιημένη μορφή των συντεταγμένων του Θεωρήματος 4.2.8. Αν $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$, γράφουμε $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{x}_{n-1}$, όπου $\mathbf{x}_{n-1} = (x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n)$. Επειδή $x_1^2 + \|\mathbf{x}_{n-1}\|^2 = r = \|\mathbf{x}\|$, υπάρχει $\varphi \in [0, \pi]$ (η γωνία των $\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_{n-1}$), ώστε

$$\mathbf{x} = r \cos \varphi \mathbf{e}_1 + r \sin \varphi \mathbf{z}, \quad (5.1)$$

με το $\mathbf{z}$ να είναι σημείο της S^{n-2} την οποία εδώ την θεωρούμε ως την εικόνα της εμφύτευσης

$$S^{n-2} \ni (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \mapsto (0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in S^{n-1}.$$

5.1.2 Ασκήσεις

1. Εντοπίστε 5 σημεία της S^2 και 5 σημεία της S^3 .
2. Αποδείξτε ότι η S^{n-1} , $n \geq 3$ είναι συμπαγές σύνολο. (Υπόδειξη. Η S^{n-1} είναι φραγμένο σύνολο εφόσον $\|\mathbf{x}\| = 1$, για κάθε $\mathbf{x} \in S^{n-1}$. Για να δείξουμε ότι είναι κλειστό, αρκεί να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Το συμπλήρωμά όμως αποτελείται από την ανοικτή μπάλλα κέντρου $\mathbf{0}$ και ακτίνας 1, και το σύνολο

$$B' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| > 1\}.$$

Δείξτε γεωμετρικά ότι το B' είναι ανοικτό.)

3. Αποδείξτε τα ακόλουθα:

- (α') Ο περιορισμός h στην S^{n-1} της απεικόνισης που δίνεται από την Εξίσωση ?? είναι επί της S^{n-2} .
- (β') Η αντίστροφη εικόνα $h^{-1}(\mathbf{z})$ κάθε σημείου $\mathbf{z}$ της S^{n-2} είναι κύκλος της S^{n-1} με κέντρο την αρχή.

5.1.3 k -επίπεδα και τομές τους με την S^{n-1}

Οι παρακάτω ορισμοί και έννοιες θα αποκτήσουν πλήρες νόημα όταν θα εξετάσουμε την Αφφινική Γεωμετρία του $\mathbb{R}^n$. Προς το παρόν μας αρκεί να θεωρήσουμε ότι ακολουθεί σαν γενικεύσεις των εννοιών της ευθείας και του επιπέδου στις πολλές διαστάσεις.

Ορισμός 5.1.3. Ένα k -διάστατο επίπεδο W_k , $1 \leq k \leq n-1$ είναι ένα σύνολο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ που καθορίζονται από την εξίσωση:

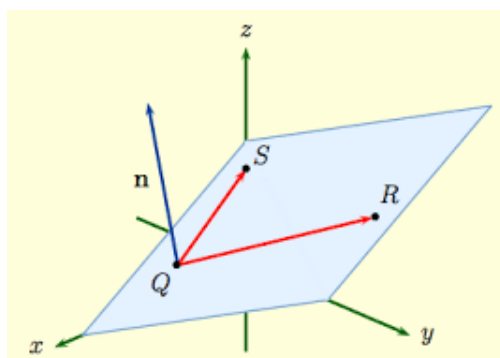
$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{v}_i, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad (5.2)$$

όπου $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ και τα $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, k$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Εναλλακτικά,

$$W_k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_i = b_i, i = 1, \dots, n-k\} \quad (5.3)$$

όπου $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{n-k}$ είναι ένα σύνολο $(n-k)$ ορθομοναδιαίων διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ και $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n-k$.

Ας παρατηρήσουμε πως όταν $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (αντ. $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n-k$), τότε το W_k είναι k -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση όπου $k = n-1$, έχουμε το οικείο σε μας υπερίππεδο ενώ βεβαίως αν $k = 1$ έχουμε ευθείες.



Επίπεδο του $\mathbb{R}^3$: εδώ $\mathbf{x} = \overrightarrow{OQ} + \lambda \overrightarrow{QR} + \mu \overrightarrow{QS}$, ή, εναλλακτικά, $(\mathbf{x} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \mathbf{n} = 0$. Η αρχή O δεν φαίνεται στο σχήμα.

Παράδειγμα 5.1.4. Έστω το 2-επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που περνά από το $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$ και παράγεται από τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$. Η παραμετρική του εξίσωση είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\lambda, \mu) &= \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_1 + \mu\mathbf{e}_3 \\ &= (\lambda, 1, \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Συνεπώς η Καρτεσιανή του εξίσωση είναι $x_2 = 1$, ή, αλλιώς, $(\mathbf{x} - \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_2 = 0$.

Παράδειγμα 5.1.5. Το 2-επίπεδο του $\mathbb{R}^4$ από την αρχή που παράγεται από τα $(1, 2, 0, 0)$ και $(0, 0, 1, 2)$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\lambda, \mu) &= \lambda(1, 2, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, 2) \\ &= (\lambda, 2\lambda, \mu, 2\mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Οι Καρτεσιανές του εξισώσεις είναι λοιπόν $x_2 = 2x_1, x_4 = 2x_3$, ή, αλλιώς, $\mathbf{x} \cdot (2, -1, 0, 0) = 0$, $\mathbf{x} \cdot (0, 0, 2, -1) = 0$.

Είναι φανερό ότι η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ απεικονίζει k -επίπεδα σε k -επίπεδα. Πράγματι, αν α είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός τότε

$$\alpha(W_k) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha(\mathbf{v}_k) \right\}.$$

Μας ενδιαφέρει η σχετική θέση ενός k -επιπέδου και της S^{n-1} . Ας παρατηρήσουμε πως αν W_k είναι ένα k -επίπεδο, μπορούμε να θεωρήσουμε τον ορθογώνιο μετασχηματισμό α ο οποίος ικανοποιεί τα εξής:

$$\alpha(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad \alpha(\mathbf{e}_j) = \mathbf{v}'_j, \quad j = k+1, \dots, n,$$

όπου $\{\mathbf{v}'_{k+1}, \dots, \mathbf{v}'_n\} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}^\perp$. Κατ' αυτόν τον τρόπο, μπορούμε πάντα να κανονικοποιούμε ένα k -επίπεδο στην μορφή

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

όπου επίσης $\mathbf{a} \in \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}^\perp$. Το επίπεδο αυτό έχει Καρτεσιανές εξισώσεις

$$x_{k+1} = \dots = x_n = 0.$$

Πρόταση 5.1.6. Η τομή της σφαίρας με ένα k -επίπεδο είναι ένα από τα παρακάτω.

1. Ένα σημείο.
2. Κανένα σημείο.
3. Μία $(k-1)$ -σφαίρα της S^{n-1} με κέντρο στο εσωτερικό της S^{n-1} και ακτίνα < 1 .
4. Ειδικότερα, αν το k -επίπεδο περνά από την αρχή, η σφαίρα αυτή έχει κέντρο την αρχή.

Απόδειξη. Έστω k -επίπεδο το οποίο κανονικοποιούμε στη μορφή (??). Τα σημεία τομής του με την S^{n-1} προσδιορίζονται από την εξίσωση

$$\|\mathbf{x}\| = \left\| \mathbf{a} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{e}_i \right\| = 1.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 = 1 - \|\mathbf{a}\|^2.$$

Εάν $\|\mathbf{a}\| > 1$, η τομή είναι το κενό σύνολο. Εάν $\|\mathbf{a}\| = 1$, η τομή είναι το σημείο $\mathbf{a}$. Εάν $\|\mathbf{a}\| < 1$, έχουμε την $(k-1)$ -σφαίρα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 = 1 - \|\mathbf{a}\|^2.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει την εμφύτευση της S^{k-1} στην S^{n-1} :

$$(\xi_1, \dots, \xi_k) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_k, \mathbf{0}_{n-k}).$$

□

Από την Πρόταση ?? παίρνουμε δύο σημαντικά πορίσματα. Το πρώτο έχει να κάνει με την τομή της σφαίρας S^{n-1} και ευθείας (1-επιπέδου):

Πόρισμα 5.1.7. Η τομή της S^{n-1} και μίας ευθείας είναι ένα από τα παρακάτω.

1. Ένα σημείο.
2. Κανένα σημείο.
3. Δύο σημεία.
4. Ειδικότερα, αν η ευθεία περνά από την αρχή, η τομή είναι δύο σημεία $\pm \mathbf{v}$.

Σε ο,τι αφορά στην τομή της με 2-επίπεδα έχουμε το ακόλουθο:

Πόρισμα 5.1.8. Η τομή της S^{n-1} και ενός 2-επιπέδου είναι ένα από τα παρακάτω.

1. Ένα σημείο.
2. Κανένα σημείο.
3. Σφαιρικός κύκλος.
4. Ειδικότερα, αν το 2-επίπεδο περνά από την αρχή, η τομή είναι κύκλος με κέντρο την αρχή.

Παράδειγμα 5.1.9. Η περίπτωση $n = 3$ έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, εφ' όσον εκεί τα 2-επίπεδα είναι και υπερεπίπεδα. Όταν η τομή είναι μη κενή και διαφορετική του μοναδικού σημείου, παίρνουμε από την παραπάνω πρόταση είτε σφαιρικούς κύκλους με κέντρο την αρχή (αυτούς που θα ονομάσουμε μέγιστους κύκλους στην επόμενη ενότητα), είτε σφαιρικούς κύκλους με κέντρο στο εσωτερικό της σφαίρας S^2 . Παρατηρούμε δε, ότι σε αυτήν την περίπτωση ένας σφαιρικός κύκλος από την αρχή καθορίζεται πλήρως από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{A}$, που είναι το κάθετο στο επίπεδο που ορίζει ο κύκλος αυτός. Τα μοναδιαία διανύσματα $\pm \mathbf{A}$ λέγονται τότε *πόλοι*. Ειδικότερα, ας θεωρήσουμε το επίπεδο

$$x_3 = 0 \iff \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 = 0.$$

Η τομή του επιπέδου αυτού με την S^2 είναι το σύνολο

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0,$$

δηλαδή, ο ισημερινός της S^2 και τα $\pm \mathbf{e}_3 = (0, 0, \pm 1)$ είναι οι πόλοι του. Εάν τώρα μας έδιναν μόνο τον ένα πόλο, έστω τον $\mathbf{e}_3$ η εξίσωση $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 = 0$ καθορίζει πλήρως τον ισημερινό.

Στις διαστάσεις μεγαλύτερες του 3, δεν έχουμε την ιδανική εικόνα του παραπάνω παραδείγματος, όπως έδειξε η συζήτηση που προηγήθηκε στην Ενότητα αυτή.

Παράδειγμα 5.1.10. Στην S^3 θεωρούμε το 2-επίπεδο P_2 με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = (0, 0, 0, -1) + \lambda(1, 1, 0, 0) + \mu(0, 0, 1, 1),$$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και το 3-επίπεδο (υπερεπίπεδο) P_3 με καρτεσιανή εξίσωση $x_1 = 0$. Για να βρούμε την τομή του P_2 με την S^3 , γράφουμε πρώτα

$$\mathbf{x} = (\lambda, \lambda, \mu, \mu - 1)$$

και αναζητούμε λ, μ τέτοια ώστε

$$\|\mathbf{x}\|^2 = 2\lambda^2 + 2\mu^2 - 2\mu + 1 = 1 \iff \lambda^2 + (\mu - 1/2)^2 = 1/4.$$

Θέτουμε $\lambda = (1/2) \cos \theta$, $\mu = 1/2 + (1/2) \sin \theta$, οπότε η ζητούμενη τομή είναι η καμπύλη

$$\mathbf{x}(\theta) = (1/2)(\cos \theta, \cos \theta, 1 + \sin \theta, -1 + \sin \theta),$$

που γράφεται και ισοδύναμα

$$\|\mathbf{x}(\theta) - (0, 0, 1/2, -1/2)\| = 1/2.$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο της S^3 κέντρου $(0, 0, 1/2, -1/2)$ και ακτίνας $1/2$.

Για να βρούμε την τομή του P_3 με την S^3 θέτουμε $x_1 = 0$ στην εξίσωση της S^3 και παίρνουμε

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση 2-σφαίρας της S^3 με κέντρο την αρχή και ακτίνας 1. Ας παρατηρήσουμε ότι παριστάνει και μία εμφύτευση της S^2 στην S^3 που δίνεται από τη σχέση

$$S^2 \ni (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^3.$$

5.1.4 Ασκήσεις

1. Γράψτε αναλυτικά και με δύο τρόπους:

- (α') την ευθεία του $\mathbb{R}^2$ που περνά από το $(-1, 2)$ στην κατεύθυνση του $(2, -1)$,
- (β') το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή που παράγεται από τα $(1, -1, 0)$ και $(0, 1, 1)$,
- (γ') το 2-επίπεδο του $\mathbb{R}^4$ που περνά από το $\mathbf{e}_1$ και παράγεται από τα $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$.

2. Βρείτε την τομή της ευθείας $\mathbf{c}(t) = (2, 0, 0) + t(-1, 1, 1)$ και της σφαίρας S^2 .

3. Βρείτε την τομή του επιπέδου $\mathbf{x}(\lambda, \mu) = (0, 1, 1) + \lambda(0, 2, 0) + \mu(1, 0, 1)$ και της σφαίρας S^2 .

4. Βρείτε την τομή του 3-επιπέδου $x_1 - x_4 = 0$ και της σφαίρας S^3 .

5. Βρείτε την τομή του 2-επιπέδου $x_1 - x_4 = x_2 - x_3 = 0$ και της σφαίρας S^3 .

6. Δείξτε ότι στην περίπτωση του $\mathbb{R}^3$, δύο διαφορετικά 2-επίπεδα από την αρχή τέμνονται σε μία ευθεία. Ισχύει κάτι τέτοιο σε ανώτερες του 3 διαστάσεις; (Υπόδειξη. Γράψτε τα επίπεδα ως

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= 0, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει μη μηδενικές λύσεις που αποτελούν σημεία ευθείας από την αρχή. Για τις ανώτερες διαστάσεις πάρτε στο $\mathbb{R}^4$ τα επίπεδα

$$\mathbf{x} = (\lambda, \mu, 0, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{x}' = (0, 0, \lambda, \mu).$$

7. Έστω W_k k -επίπεδο όπως στην (??) όπου υποθέτουμε επιπλέον ότι τα $\mathbf{v}_i, i = 1, \dots, k$ είναι ορθομοναδιαία. Αποδείξτε ότι η ορθογώνια προβολή $\text{pr}_{W_k}(\mathbf{x})$ του $\mathbf{x}$ στο W_k δίνεται από την

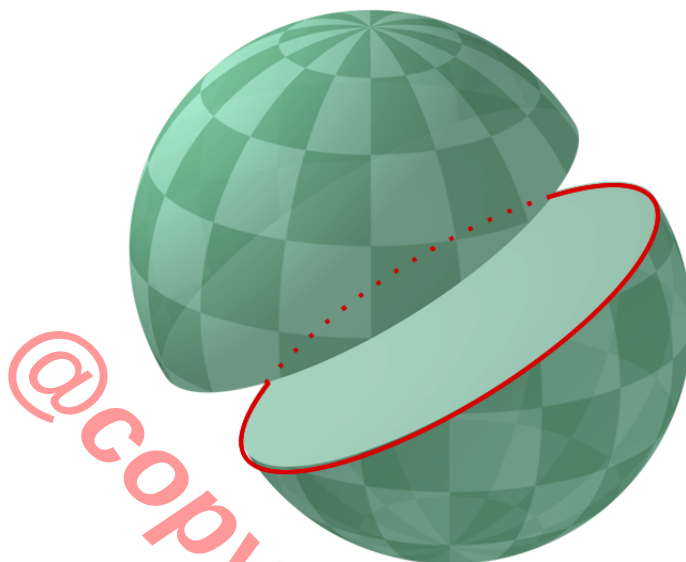
$$\text{pr}_{W_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^k ((\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i. \quad (5.5)$$

Εάν το W_k δίνεται από την (??), η ορθογώνια προβολή $\text{pr}_{W_k}(\mathbf{x})$ του $\mathbf{x}$ στο W_k δίνεται από την

$$\text{pr}_{W_k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{n-k} (b_i - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}_i)) \mathbf{A}_i. \quad (5.6)$$

5.1.5 Μέγιστοι κύκλοι

Ορισμός 5.1.11. Οι κύκλοι του Πορίσματος ?? με κέντρο την αρχή καλούνται *μέγιστοι κύκλοι* της S^{n-1} , ή *s-κύκλοι*. Στην περίπτωση που δεν έχουν κέντρο την αρχή, καλούνται *ελάσσονες κύκλοι*, ή απλώς *σφαιρικοί κύκλοι*.



Οι μέγιστοι κύκλοι της S^2 την χωρίζουν σε δύο ίσα μέρη.

Σχόλιο 5.1.12. Ας παρατηρήσουμε εδώ ότι αν $n > 3$ ένας μέγιστος κύκλος δεν έχει μόνο δύο (αντίθετους) πόλους. Αν ένα 2-επίπεδο ορίζεται ως το ορθοσυμπλήρωμα δύο μοναδιαίων ορθογωνίων μεταξύ τους ανά δύο διανυσμάτων, τότε οι πόλοι είναι $n - 2$ μοναδιαία διανύσματα και τα αντίθετά τους. Όμως, μία οποιαδήποτε επιλογή $n - 2$ τέτοιων διανυσμάτων όπου δεν παίρνουμε στην επιλογή αυτή ένα διάνυσμα μαζί με το αντίθετό του, καθορίζει πλήρως τον μέγιστο κύκλο.

Ορισμός 5.1.13. Κάθε ζεύγος σημείων $\mathbf{x}, -\mathbf{x} \in S^{n-1}$ καλείται ζεύγος αντιποδικών σημείων. Η απεικόνιση $A : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ που ορίζεται από τη σχέση

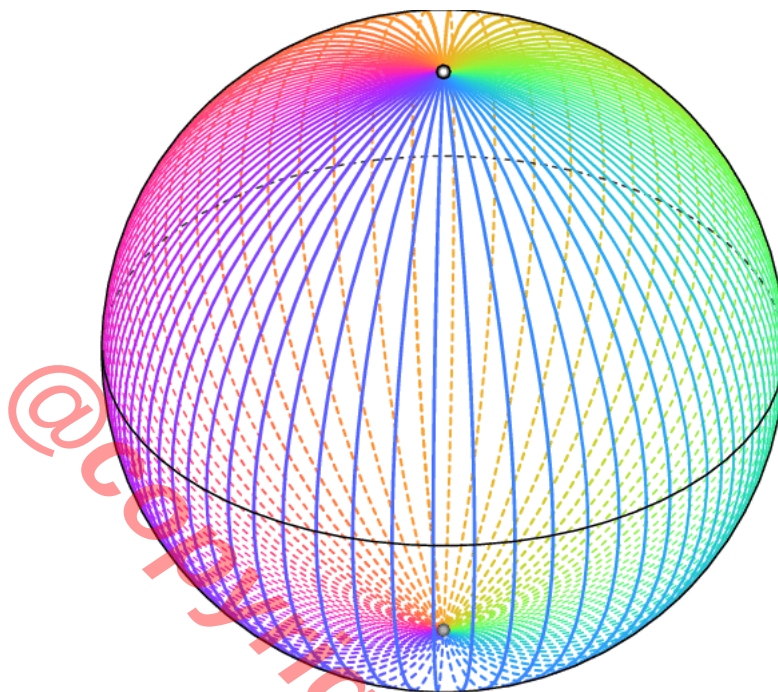
$$S^{n-1} \ni \mathbf{x} \mapsto -\mathbf{x} = A(\mathbf{x}) \in S^{n-1}. \quad (5.7)$$

καλείται αντιποδική απεικόνιση.

Είναι φανερό ότι η ευθεία που ενώνει ζεύγος αντιποδοκών σημείων περνά από την αρχή, καθώς παριστάνεται από την παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{c}(t) = (1 - t)\mathbf{x} + t(-\mathbf{x}) = (1 - 2t)\mathbf{x}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Το αντίστροφο, ότι δηλαδή κάθε ευθεία που περνά από την αρχή τέμνει την S^{n-1} σε ζεύγος αντιποδικών σημείων προκύπτει από το Πόρισμα ??.



Ο βόρειος και ο νότιος πόλος της S^2 που αντιστοιχούν στον ισημερινό. Απείρου πλήθους μεσημβρινοί περνούν από τα αντιποδικά αυτά σημεία.

Οι μέγιστοι κύκλοι της S^{n-1} που περνούν από δύο αντιποδικά σημεία λέγονται *μεσημβρινοί* (των αντιποδικών σημείων). Για παράδειγμα, εντοπίζουμε όλους τους μεσημβρινούς των αντιποδικών σημείων $\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1$. Η ευθεία που ενώνει τα δύο αυτά σημεία είναι η $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{e}_1$ και το ορθοκανονικό συμπλήρωμα $\{\mathbf{e}_1\}^\perp$ παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Άρα, όλα τα μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο $\mathbf{e}_1$ είναι της μορφής

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n, \quad \sum_{i=2}^n \lambda_i^2 = 1.$$

Προκύπτει ότι όλοι οι μεσημβρινοί που περνούν από τα $\pm \mathbf{e}_1$ είναι η $(n-1)$ -παραμετρική οικογένεια μεγίστων κύκλων με εξισώσεις

$$\mathbf{x}(\theta; \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{v}(\lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

Ας παρατηρήσουμε πως όταν $n = 3$, θέτοντας $\lambda_2 = \cos \phi$ και $\lambda_3 = \sin \phi$, έχουμε

$$\mathbf{x}(\theta; \phi) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_2 + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_3.$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{x}(\theta; \phi) = \alpha_\phi(\mathbf{x}(\theta; \pi/2)),$$

όπου α_ϕ ο ορθογώνιος μετασχηματισμός με πίνακα

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/2 - \phi) & \sin(\pi/2 - \phi) \\ 0 & -\sin(\pi/2 - \phi) & \cos(\pi/2 - \phi) \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 5.1.14. Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των μεγίστων κύκλων της S^{n-1} .

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε πώς κάθε μέγιστος κύκλος μπορεί να απεικονιστεί με έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό στον μέγιστο κύκλο

$$\mathbf{x}_e(\theta) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Έστω μέγιστος κύκλος της μορφής

$$\mathbf{x}(\theta) = \cos \theta \mathbf{v}_1 + \sin \theta \mathbf{v}_2, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

με $\|\mathbf{v}_i\| = 1$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Υπάρχει ορθογώνιος μετασχηματισμός α που απεικονίζει το $\mathbf{v}_1$ στο $\mathbf{e}_1$ και επιπλέον, $\alpha(\mathbf{v}_2) \perp \mathbf{e}_1$. Επειδή $\|\alpha(\mathbf{v}_2)\| = 1$, το $\alpha(\mathbf{v}_2)$ θα ανήκει στη μοναδιαία σφαίρα του υπερεπιπέδου $x_1 = 0$, δηλαδή,

$$\alpha(\mathbf{v}_2) = (0, x_2, \dots, x_n), \quad \sum_{i=2}^n x_i^2 = 1.$$

Θεωρούμε τώρα τον ορθογώνιο μετασχηματισμό που σταθεροποιεί το $\mathbf{e}_1$ και απεικονίζει το $\alpha(\mathbf{v}_2)$ στο $\mathbf{e}_2$: αυτός είναι ο μετασχηματισμός με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad B \in O(n-1),$$

και ο B αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό που ικανοποιεί $\beta(x_2, \dots, x_n) = (1, 0, \dots, 0)$ στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^{n-1}$, το οποίο, έχουμε ταυτίσει εδώ με το υπερεπίπεδο $x_1 = 0$. $\square$

Η Εξίσωση (??) παριστάνει την κανονικοποίηση τυχόντος μεγίστου κύκλου και θα την χρησιμοποιήσουμε ευρέως σε ό,τι ακολουθεί. Στην περίπτωση $n = 3$, αν C είναι μέγιστος κύκλος με πολικό (κάθετο) διάνυσμα $\mathbf{n}$, υπάρχει στοιχείο της $O(3)$ που το απεικονίζει στο $\mathbf{e}_3$, ώστε και εδώ ένας τυχαίος μέγιστος κύκλος κανονικοποιείται από τον ισημερινό $x_3 = 0$ ή $\mathbf{x}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$.

Σχετική θέση μεγίστων κύκλων

Πρόταση 5.1.15. Από σημείο της σφαίρας S^{n-1} περνούν απείρου πλήθους μέγιστοι κύκλοι.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ και έστω τα 2-επίπεδα που το περιέχουν:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}_1 + \mu \mathbf{w}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτοντας $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$, βλέπουμε ότι τα $\mathbf{w}$ είναι όλα τα στοιχεία του υπερεπιπέδου $W_{\mathbf{v}}$, που είναι $(n-1)$ -διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Τα σημεία που ανήκουν στη μοναδιαία σφαίρα του υπερεπιπέδου αυτού και το $\mathbf{e}_1$ προσδιορίζουν απείρου πλήθους μεγίστων κύκλων που περνούν από το $\mathbf{e}_1$. $\square$

Παράδειγμα 5.1.16. Οι μέγιστοι κύκλοι που περνούν από το $(1/\sqrt{2})(1, -1, 0) \in S^2$ είναι όλοι οι μέγιστοι κύκλοι της μορφής

$$\mathbf{x}(\theta) = (1/\sqrt{2})(\cos \theta, -\cos \theta, 0) + (\sin \theta v_1, \sin \theta v_2, \sin \theta v_3),$$

όπου $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ και $v_1 - v_2 = 0$. Οι δύο αυτές σχέσεις είναι ισοδύναμες με την $2v_1^2 + v_3^2 = 1$, συνεπώς τα (v_1, v_2, v_3) ανήκουν στην μονοπαραμετρική οικογένεια που αποτελείται από τα σημεία

$$((1/\sqrt{2}) \cos \phi, (1/\sqrt{2}) \cos \phi, \sin \phi), \phi \in \mathbb{R},$$

της S^2 . Άρα, οι εξισώσεις όλων των ζητούμενων μεγίστων κύκλων δίνονται από την

$$\mathbf{x}_\phi(\theta) = \left((1/\sqrt{2})(\cos \theta + \sin \theta \cos \phi), (1/\sqrt{2})(-\cos \theta + \sin \theta \cos \phi), \sin \phi \right),$$

όπου κάθε μέγιστος κύκλος αντιστοιχεί και σε διαφορετική επιλογή του $\phi \in [0, 2\pi)$. Παρατηρήστε στο σημείο αυτό ότι για $\theta \in [0, \pi]$ η απεικόνιση $\mathbf{x}(\theta, \phi) = \mathbf{x}_\phi(\theta)$ δίνει ένα νέο σύστημα συντεταγμένων για την S^2 .

Πρόταση 5.1.17. Από δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της S^{n-1} περνά μέγιστος κύκλος. Αυτός είναι μοναδικός αν τα σημεία δεν είναι αντιποδικά. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μία οικογένεια μεγίστων κύκλων που περνά από τα σημεία αυτά.

Απόδειξη. Αν $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$ είναι σημεία της σφαίρας, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

I. Τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, ο ζητούμενος μέγιστος κύκλος είναι ο

$$\mathbf{x}(\theta) = \cos \theta \mathbf{v}'_1 + \sin \theta \mathbf{v}'_2, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

όπου τα $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ είναι ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν από τη ορθοκανονικοποίηση των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

II. Τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Τούτο μπορεί να σημαίνει μόνο ότι $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$, δηλαδή τα σημεία να είναι αντιποδικά. Θεωρούμε την ευθεία που περνά από τα $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ και $-\mathbf{v}$:

$$c(t) = (1-t)\mathbf{v} + t(-\mathbf{v}) = (1-2t)\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε, υπάρχουν άπειρα 2-διάστατα επίπεδα που περνούν από τα $\mathbf{v}$ και $-\mathbf{v}$: κάθε 2-επίπεδο της μορφής

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

τέτοιο ώστε τα $\mathbf{w}, \mathbf{v}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα περιέχει τα $\mathbf{v}, -\mathbf{v}$, και συνεπώς το ίδιο ισχύει και για την τομή του με την S^{n-1} . □

Σχόλιο 5.1.18. Η απόδειξη στην περίπτωση $n = 3$ είναι πιο απλή. Αν $\mathbf{v}_1 \neq \pm \mathbf{v}_2$, τότε το

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|},$$

είναι κάθετο στα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ και ορίζει με μοναδικό τρόπο επίπεδο που περνά από την αρχή και η τομή του με την S_2 περιέχει τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Καλούμε το $\mathbf{n}$ *πολικό διάνυσμα* του μεγίστου κύκλου που

περιέχει τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, και έτσι, στην περίπτωση γραμμικά ανεξάρτητων σημείων ένας μέγιστος κύκλος καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από το πολικό του διάνυσμα. Αν $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, η τομή κάθε επιπέδου που περνά από την αρχή και περιέχει την ευθεία $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{v}$ είναι μέγιστος κύκλος που περιέχει τα $\mathbf{v}$ και $-\mathbf{v}$. τα πολικά διανύσματα αυτών των μεγίστων κύκλων ανήκουν στο ορθοσυμπλήρωμα του $\mathbf{v}$.

Παράδειγμα 5.1.19. Για να βρούμε τον μέγιστο κύκλο που περνά από τα σημεία

$$\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{3})(1, -1, 1) \text{ και } \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$$

της S^2 , παίρνουμε το εξωτερικό τους γινόμενο:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 &= (1/3) \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1/3)(-2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Άρα, ο ζητούμενος μέγιστος κύκλος είναι η τομή του επιπέδου

$$x_1 - x_3 = 0$$

με την S^2 . Αυτή η εξίσωση (του επιπέδου δηλαδή), προδιορίζει πλήρως τον ζητούμενο μέγιστο κύκλο. Εάν όμως μας χρειαζόταν η παραμετρική εξίσωση του κύκλου, επειδή $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1/3 \neq 0$, ένας τρόπος να το κάνουμε είναι ο εξής. Θέτουμε

$$\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2,$$

ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ και αναζητούμε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 = \lambda + \mu/3 = 0.$$

Για $\lambda = 1, \mu = -3$ και θεωρούμε το μοναδιαίο

$$\mathbf{v}'_2 = \frac{\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2\|} = (1/\sqrt{6})(-1, -2, -1).$$

Ο ζητούμενος μέγιστος κύκλος τώρα δέχεται την παραμέτρηση

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\theta) &= \cos \theta \mathbf{v}_1 + \sin \theta \mathbf{v}'_2 \\ &= (1/\sqrt{3})(\cos \theta, -\cos \theta, \cos \theta) + (1/\sqrt{6})(-\sin \theta, -2\sin \theta, -\sin \theta) \\ &= (1/\sqrt{6})(\sqrt{2} \cos \theta - \sin \theta, -\sqrt{2} \cos \theta - 2\sin \theta, \sqrt{2} \cos \theta - \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι επειδή $\angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \arccos(1/3)$,

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{x}(\arccos(1/3)) = \mathbf{v}_2.$$

Παράδειγμα 5.1.20. Για τον μέγιστο κύκλο της S^3 που περνά από τα $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{5})(1, 2, 0, 0)$ και $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{5})(0, 0, 1, 2)$, έχουμε εφ' όσον $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ την παραμέτρηση

$$\mathbf{x}(\theta) = \cos \theta \mathbf{v}_1 + \sin \theta \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{5})(\cos \theta, 2 \cos \theta, \sin \theta, 2 \sin \theta),$$

με $\theta \in [0, 2\pi)$.

Παράδειγμα 5.1.21. Για να βρούμε όλους τους μεγίστους κύκλους της S^3 που περνούν από τα αντιποδικά σημεία $\mathbf{v} = (1/2)(1, 1, 1, 1)$ και $A(\mathbf{v}) = -(1/2)(1, 1, 1, 1)$, θεωρούμε κατ' αρχάς την ευθεία που τα ενώνει:

$$\mathbf{c}(t) = t\mathbf{v} = (t/2)(1, 1, 1, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.14 (II), έστω $\mathbf{w} \in S^{n-1}$ γραμμικά ανεξάρτητο και χωρίς βλάβη της γενικότητας ορθογώνιο στο $\mathbf{v}$. Τα 2-επίπεδα της μορφής

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

περιέχουν τα $\mathbf{v}$, $A(\mathbf{v})$, $\mathbf{w}$ και η τομή τους με την S^{n-1} είναι μέγιστος κύκλος:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{w}}(\theta) = \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{w},$$

με το $\mathbf{w}$ να ανήκει στο ορθοσυμπλήρωμα του $\mathbf{v}$, δηλαδή, το 3-επίπεδο του $\mathbb{R}^4$ με εξίσωση

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Το επίπεδο αυτό παράγεται από τα μοναδιαία διανύσματα

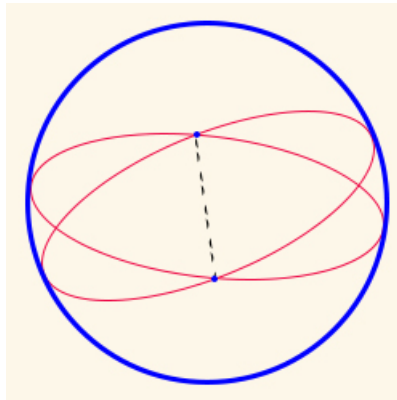
$$\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1), \quad \mathbf{v}_3 = (1/2)(-1, 1, -1, 1).$$

(Παρατηρήστε ότι όλα είναι μεταξύ τους κάθετα ανά δύο.) Άρα, τα διανύσματα που ανήκουν στην μοναδιαία σφαίρα του επιπέδου αυτού είναι της μορφής

$$\mathbf{w}(\varphi_1, \varphi_2) = \cos \varphi_1 \mathbf{v}_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \mathbf{v}_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \mathbf{v}_3,$$

όπου $(\varphi_1, \varphi_2) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Έπεται ότι οι ζητούμενη οικογένεια μεγίστων κύκλων δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{x}_{\varphi_1, \varphi_2}(\theta) = \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{w}(\varphi_1, \varphi_2).$$



Δύο μέγιστοι κύκλοι της S^2 τέμνονται σε αντιποδικά σημεία. Σε μεγαλύτερες διαστάσεις ενδέχεται η τομή να είναι κενή.

Πρόταση 5.1.22. (Πρόσπτωση.) Δύο οποιοιδήποτε διαφορετικοί μέγιστοι κύκλοι της S^2 τέμνονται σε ακριβώς δύο αντιποδικά σημεία. Για $n > 3$ αυτό δεν ισχύει εν γένει: δύο μέγιστοι κύκλοι S^{n-1} , $n > 3$, ενδέχεται να μην έχουν κανένα σημείο τομής. Εάν όμως τέμνονται, τότε τέμνονται σε ακριβώς δύο αντιποδικά σημεία.

Απόδειξη. Η απόδειξη του πρώτου σκέλους προκύπτει αμέσως εφόσον δύο 2-επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή τέμνονται κατα μήκος ευθείας. Θα την κάνουμε όμως αναλυτικά και με δύο τρόπους, για να προσδιορίσουμε επακριβώς τα σημεία τομής. Έστω λοιπόν κατ'αρχάς δύο μέγιστοι κύκλοι C_1, C_2 της S^2 με αντίστοιχα πολικά διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$. Το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\|},$$

προσδιορίζει ένα σύνολο σημείων $L = \{t\mathbf{n}, | t \in \mathbb{R}\}$ που ανήκει στην τομή των επιπέδων που κείνται οι C_1, C_2 . Από την άλλη, κάθε σημείο που ανήκει στην τομή αυτή, θα είναι αναγκαστικά σημείο του συνόλου L . Άρα, η τομή είναι το σύνολο L , δηλαδή ευθεία που τέμνει την S^2 στα αντιποδικά σημεία $\pm\mathbf{n}$.

Από την άλλη, μπορούμε (για κάθε διάσταση $n \geq 3$) να υποθέσουμε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις των μεγίστων κύκλων C_1, C_2 είναι αντίστοιχα οι

$$\mathbf{x}_1(\theta) = \cos \theta \mathbf{v}_1 + \sin \theta \mathbf{v}_2, \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_2(\theta) = \cos \theta \mathbf{w}_1 + \sin \theta \mathbf{w}_2, \quad \theta \in [-\pi, \pi),$$

όπου $\|\mathbf{v}_i\| = \|\mathbf{w}_i\| = 1$ και $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 = 0$. Η σχέση $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ έχει νόημα μόνον όταν τα $\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αυτό συμβαίνει πάντοτε όταν $n = 3$. Αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, από την ισότητα θα συνεπαγόταν $\cos \theta = \sin \theta = 0$, άτοπο. Αν $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, τότε η τομή των C_1, C_2 είναι τα σημεία $\pm\mathbf{v}_1$. Αναλόγως, αν $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2$, τότε η τομή των C_1, C_2 είναι τα σημεία $\pm\mathbf{v}_2$. Μένει η περίπτωση όπου $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{v}_1$ και $\mathbf{w}_2 \neq \mathbf{v}_2$. Έστω $\theta_i = \angle(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2$. Η σχέση $\mathbf{x}_1(\theta) = \mathbf{x}_2(\theta)$ γράφεται:

$$\cos \theta (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1) + \sin \theta (\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικά τη σχέση (4.1) με $\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2$ και παίρνουμε

$$\tan \theta = -\frac{(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_1)}{\|\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_2\|^2}.$$

Επειδή $\theta \in [-\pi, \pi]$, έχουμε δύο λύσεις $\theta_0, \theta_0 - \pi$, $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, που αντιστοιχούν στα αντιδιαμετρικά σημεία τομής. □

Πόρισμα 5.1.23. Από σημείο εκτός δοθέντος μεγίστου κύκλου της S^{n-1} δεν περνά μέγιστος κύκλος ξένος με τον δοθέντα μέγιστο κύκλο αν $n = 3$ ενώ περνούν απείρουν πλήθους μέγιστοι κύκλοι ξένοι με τον δοθέντα μέγιστο κύκλο αν $n > 3$.

Παράδειγμα 5.1.24. Οι μέγιστοι κύκλοι της S^3 με παραμετρικές εξισώσεις

$$\mathbf{x}_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, 0, 0), \quad \mathbf{x}_2(\theta) = (0, 0, \cos \theta, \sin \theta),$$

δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Ένα διάσημο αποτέλεσμα του Hopf μας λέει ότι μπορούμε να παραστήσουμε την S^3 σαν ένωση ξένων μεταξύ τους ανά δύο μεγίστων κύκλων.

Παράδειγμα 5.1.25. Έστω στην S^2 ο μέγιστος κύκλος C_1 που περνά από τα

$$\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2})(1, 1, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2})(1, 0, -1)$$

και C_2 ο μέγιστος κύκλος που περνά από τα

$$\mathbf{v}'_1 = (1, 0, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{v}'_2 = (0, -1, 0).$$

Θεωρούμε τα εξωτερικά γινόμενα

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (1/2)(-1, 1, -1), \quad \mathbf{n}' = \mathbf{v}'_1 \times \mathbf{v}'_2 = (-1, 0, 0)$$

Τα σημεία

$$\pm \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{n}'}{\|\mathbf{n} \times \mathbf{n}'\|} = \pm(0, 0, 1),$$

είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2 .

Στο μοντέλο της Σφαιρικής Γεωμετρίας που μελετούμε οι μέγιστοι κύκλοι είναι γεωδαισιακοί για τη σφαιρική μετρική, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Δηλαδή, παίζουν τον ρόλο που έχουν οι ευθείες στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και για αυτό τον λόγο θα τους καλούμε και s -ευθείες. Οπότε, έχουμε συνοπτικά τα εξής.

- α) Από οποιοδήποτε σημείο της S^{n-1} περνούν απείρου πλήθους s -ευθείες (Πρόταση 4.2.12).
- β) Δύο διαφορετικές s -ευθείες τέμνονται πάντοτε σε ακριβώς δύο αντιποδικά σημεία αν $n = 3$. Για $n > 3$ η τομή δύο ευθειών μπορεί να είναι είτε το κενό σύνολο είτε δύο αντιποδικά σημεία (Πρόταση ??).
- γ) Από σημείου εκτός s -ευθείας της S^2 δεν μπορεί να αχθεί παράλληλη προς τη δοθείσα s -ευθεία. Για $n > 3$, μπορούν να αχθούν απείρου πλήθους s -ευθείες, ασύμβατες με τη δοθείσα s -ευθεία (Πόρισμα ??).

5.1.6 Ασκήσεις

1. Βρείτε την μονοπαραμετρική οικογένεια $\mathbf{x}_\phi(\theta)$ όλων των μεγίστων κύκλων της S^2 που περνούν από το $(1/\sqrt{3})(1, 1, 1)$. (Δείτε και το Παράδειγμα 4.2.13).
2. Όπως παραπάνω, για τα σημείο $(1/\sqrt{5})(1, 2, 0, 0)$ της S^4 .
3. Όπως στο Παράδειγμα 4.2.16, βρείτε με δύο τρόπους τον μέγιστο κύκλο της S^2 που περνά από τα $(1/\sqrt{5})(1, 0, 2)$ και $(1/\sqrt{5})(1, 2, 0)$.
4. Όπως παραπάνω, για τα σημεία $(1/\sqrt{2})(1, 1, 0)$ και $(1/\sqrt{2})(1, 0, 1)$.
5. Βρείτε όπως στο Παράδειγμα 4.2.18 όλους τους μεγίστους κύκλους της S^3 που περνούν από τα σημεία $\pm \mathbf{v} = (1/5)(1, 2, 2, -4)$.

6. Βρείτε τα σημεία τομής των μεγίστων κύκλων L_1 και L_2 της S^2 , αν ο L_1 περνά από τα

$$(1/\sqrt{3})(1, 1, -1), \quad (1/\sqrt{3})(1, -1, 1)$$

και ο L_2 περνά από τα

$$(1/\sqrt{3})(1, -1, -1), \quad (1/\sqrt{3})(-1, 1, -1).$$

7. Δώστε ένα παράδειγμα δύο μεγίστων μη τεμνόμενων κύκλων της S^3 .

8. Έστω οι μέγιστοι κύκλοι L_1 και L_2 της S^2 με αντίστοιχες παραμετρικές εξισώσεις

$$\mathbf{x}_1(\theta) = (1/\sqrt{7})(\cos \theta(1, -1, 2, 1) + \sin \theta(1, 1, 1, -2)),$$

$$\mathbf{x}_2(\theta) = (1/\sqrt{7})(\cos \theta(1, 2, -1, 1) + \sin \theta(2, -1, 1, 1)).$$

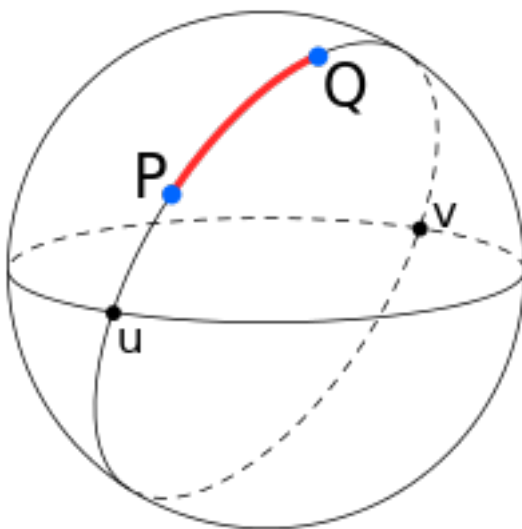
Εξετάστε αν τέμνονται ή όχι οι κύκλοι αυτοί. Στην περίπτωση που τέμνονται βρείτε τα σημεία τομής ακολουθώντας τη μέθοδο της απόδειξης της Πρότασης ??.

5.2 Σφαιρική απόσταση

Η μετρική στη σφαιρική γεωμετρία ορίζεται από τη σφαιρική απόσταση που ορίζουμε ευθύς αμέσως.

Ορισμός 5.2.1. Η σφαιρική απόσταση $s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{n-1}$ είναι η γωνία των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:

$$s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$



Η σφαιρική απόσταση δύο σημείων της σφαίρας είναι ίση με το μήκος του μικρότερου τόξου του μεγίστου κύκλου που τα ενώνει.

Παρατηρήστε ότι η σφαιρική απόσταση $s_{n-1} : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow [0, \pi]$ είναι φραγμένη συνάρτηση: η μέγιστη τιμή της π πιάνεται σε αντιποδικά σημεία. Παρατηρήστε κατόπιν ότι $\cos(s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ και ότι αν $c_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ είναι η χορδική τους απόσταση, τότε

$$c_n^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2(1 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})) = 2(1 - \cos(s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))) = 4 \sin^2 \left(\frac{s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \right),$$

απ' όπου συνεπάγεται η παρακάτω σχέση της χορδικής με τη σφαιρική απόσταση:

$$c_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2 \sin \left(\frac{s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \right), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{n-1}. \quad (5.10)$$

Θα δούμε στην Πρόταση ?? ότι ισχύει κάτι πολύ περισσότερο: η σφαιρική μετρική είναι η εμφανής μετρική που προκύπτει από τη χορδική μετρική. Έχοντας αυτό, προκύπτει άμεσα ότι η σφαιρική απόσταση ορίζει μετρική. Όμως, για λόγους πληρότητας, δίνουμε εδώ μία ανεξάρτητη απόδειξη του γεγονότος αυτού.

Θεώρημα 5.2.2. *Η s_{n-1} ορίζει μετρική στην S^{n-1} : εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in S^2$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*

1. $s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$. Επίσης $s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = s_{n-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.
3. (Τριγωνική Ανισότητα.)

$$s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + s_{n-1}(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Η ισότητα ισχύει τότε και μόνον τότε όταν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο.

Απόδειξη. Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί προκύπτουν άμεσα. Για την τριγωνική ανισότητα, επειδή η δράση της $O(n)$ διατηρεί τις σφαιρικές αποστάσεις, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ώστε

$$\mathbf{x} = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{y} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{z} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{w},$$

όπου $\mathbf{w} \in S^{n-2}$, $\theta, \varphi \in [0, \pi]$. Γράφουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \cos \theta_{\mathbf{xy}} = \cos \varphi,$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{z} = \cos \theta_{\mathbf{xz}} = \cos \theta \cos \varphi + w_2 \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \cos \theta_{\mathbf{yz}} = \cos \theta.$$

Επειδή η $\cos$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$, η προς απόδειξη σχέση γράφεται ισοδύναμα

$$\cos \theta_{\mathbf{xz}} \geq \cos(\theta_{\mathbf{xy}} + \theta_{\mathbf{yz}}).$$

Έχουμε ότι

$$\cos \theta_{\mathbf{xy}} \cos \theta_{\mathbf{yz}} = \cos \theta_{\mathbf{xz}} - w_2 \sin \theta_{\mathbf{xy}} \sin \theta_{\mathbf{yz}},$$

και επειδή $|w_2| \leq 1$, προκύπτει η σχέση

$$\cos \theta_{xz} - \sin \theta_{xy} \sin \theta_{yz} \leq \cos \theta_{xy} \cos \theta_{yz} \leq \cos \theta_{xz} + \sin \theta_{xy} \sin \theta_{yz}.$$

Η Τριγωνική Ανισότητα προκύπτει από τη δεξιά σχέση. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνον τότε όταν $w_2 = -1$, δηλαδή ισοδύναμα όταν $\mathbf{z} = \cos \varphi \mathbf{e}_1 - \sin \varphi \mathbf{e}_2$. $\square$

Παράδειγμα 5.2.3. Η Τριγωνική Ανισότητα μας δίνει και τον τρόπο να εξετάζουμε πότε τρία σημεία είναι s-συνευθειακά, δηλαδή ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο. Ας πάρουμε λ.χ. τα σημεία

$$\mathbf{x} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{y} = (1/2)(\sqrt{3}, 1, 0), \quad \mathbf{z} = (0, 1, 0),$$

της S^2 . Είναι:

$$\cos \theta_{xy} = \sqrt{3}/2 \implies \theta_{xy} = \pi/6,$$

$$\cos \theta_{yz} = 1/2 \implies \theta_{yz} = \pi/3,$$

$$\cos \theta_{xz} = 0 \implies \theta_{xz} = \pi/2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\pi/2 = \theta_{xz} = \theta_{xy} + \theta_{yz} = \pi/6 + \pi/3,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο και επιπλέον, το $\mathbf{y}$ είναι ανάμεσα στα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{z}$. Το γενικό κριτήριο είναι ότι θα πρέπει να ισχύει μία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\theta_{xz} = \theta_{xy} + \theta_{yz},$$

$$\theta_{xy} = \theta_{xz} + \theta_{zy},$$

$$\theta_{yz} = \theta_{yx} + \theta_{xz}.$$

Παράδειγμα 5.2.4. Για να βρούμε τα σημεία που ισαπέχουν από τα δύο διαφορετικά σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ της S^{n-1} που ενώνει μέγιστος κύκλος, αναζητούμε λύσεις $\mathbf{x}_m$ της εξίσωσης

$$s_{n-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) = s_{n-1}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m),$$

που κείνται επάνω στο s-τμήμα από το $\mathbf{x}_1$ στο $\mathbf{x}_2$. Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, θα έχουμε

$$\theta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} = \theta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_m} + \theta_{\mathbf{x}_m \mathbf{x}_2} = 2\theta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_m}.$$

Εάν θέσουμε

$$\mathbf{x}_m = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|}, \quad (5.11)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \cos(s_{n-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m)) &= \frac{\mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)}{\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|} \\ &= \frac{1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|} \\ &= \frac{\mathbf{x}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1)}{\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\|} \\ &= \cos(s_{n-1}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m)). \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\cos(s_{n-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m)) &= \frac{1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{\sqrt{2 + 2\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2}{2}}.\end{aligned}$$

Οπότε,

$$2 \cos^2(s_{n-1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m)) - 1 = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2,$$

που είναι σχέση ισοδύναμη με την

$$\cos(2\theta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_m}) = \cos(\theta_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2}).$$

Το μέσον λοιπόν δίνεται από τη σχέση (??).

Αποδεικνύουμε τώρα την παρακάτω σημαντική:

Πρόταση 5.2.5. Η ομάδα ισομετριών $\text{Isom}(S^{n-1}, s_{n-1})$ της σφαιρικής μετρικής είναι η ορθογώνια ομάδα $O(n)$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς από την Εξίσωση (??) προκύπτει ότι

$$\text{Isom}(S^{n-1}, s_{n-1}) = \text{Isom}(S^{n-1}, c_n)$$

και επιπλέον γνωρίζουμε ότι $O(n) \subset \text{Isom}(S^{n-1}, c_n)$. Συνεπώς, μένει να αποδείξουμε ότι μία ισομετρία της S^{n-1} ως προς τη χορδική μετρική επεκτείνεται σε ορθογώνιο μετασχηματισμό σε όλο το $\mathbb{R}^n$. Ας είναι προς τούτο $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ μία τέτοια ισομετρία και θέτουμε

$$\tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \cdot f\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right), \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Για $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S^{n-1}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}2 f(\mathbf{u}) \cdot f(\mathbf{v}) &= \|f(\mathbf{u})\|^2 + \|f(\mathbf{v})\|^2 - \|f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v})\|^2 \\ &= 1 + 1 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \\ &= 2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και έχουμε ακολούθως,

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{y})\|^2 &= \|\tilde{f}(\mathbf{x})\|^2 + \|\tilde{f}(\mathbf{y})\|^2 - 2 \tilde{f}(\mathbf{x}) \cdot \tilde{f}(\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|f(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \cdot \|f(\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|)\|^2 \\ &\quad - 2 \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| f(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|) \cdot f(\mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2 \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς, η $\tilde{f}$ είναι Ευκλείδεια ισομετρία που διατηρεί την αρχή, άρα είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, όπως και ο περιορισμός της στη σφαίρα που είναι η f . $\square$

5.2.1 Ασκήσεις

1. Βρείτε τη σφαιρική απόσταση και το μέσον των παρακάτω ζευγών σημείων της S^2 :

(α') $(1, 0, 0)$ και $(-1, 0, 0)$,

(β') $(0, 0, -1)$ και $(0, 1, 0)$,

(γ') $(1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$ και $(2/3, 1/3, -2/3)$,

(δ') $(0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ και $(0, -1/2, -\sqrt{3}/2)$.

2. Δείξτε ότι δύο οποιαδήποτε αντιποδικά σημεία της S^{n-1} απέχουν σφαιρική απόσταση π .

3. Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο;

(α') $(0, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$,

(β') $(1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$, $(2/3, 1/3, -2/3)$ και $(1, 0, 0)$.

4. Έστω $\mathbf{x}_0 \in S^{n-1}$ και $0 < \epsilon \leq 2\pi$. Η ανοικτή σφαιρική περιοχή $B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon)$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ϵ είναι το σύνολο

$$B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon) = \{\mathbf{x} \in S^{n-1} \mid s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \epsilon\}.$$

Συμβολίζουμε με $B_{\mathbf{x}_0}^c(\delta)$ την ανοικτή περιοχή κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας $\delta > 0$ ως προς τη χορδική μετρική:

$$B_{\mathbf{x}_0}^c(\delta) = \{\mathbf{x} \in S^{n-1} \mid e_n(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta\}.$$

Αποδείξτε ότι:

$$B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon) = \begin{cases} B_{\mathbf{x}_0}^c(2 \sin(\epsilon/2)) & \text{αν } \epsilon \leq \pi, \\ \mathbb{R}^n \setminus B_{\mathbf{x}_0}^c(2 \sin(\epsilon/2)) & \text{αν } \pi < \epsilon \leq 2\pi. \end{cases}$$

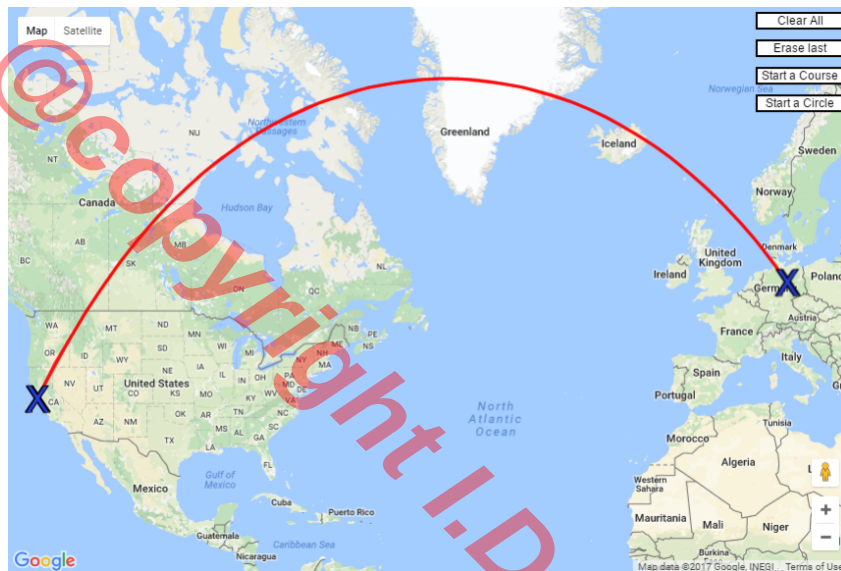
5. Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση για να βρείτε το εμβαδόν της $B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon)$ όταν $n = 3$. (Υπόδειξη. Επειδή το εμβαδόν της S^2 είναι 4π , το εμβαδόν της $B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon)$ θα είναι

$$\text{Area}(B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon)) = \begin{cases} 4 \sin^2(\epsilon/2) & \text{αν } \epsilon \leq \pi, \\ 4(\pi - \sin^2(\epsilon/2)) & \text{αν } \pi < \epsilon \leq 2\pi. \end{cases}$$

6. Πάλι στην S^2 , αποδείξτε ότι το σύνορο της ανοικτής σφαιρικής περιοχής $B_{\mathbf{x}_0}^s(\epsilon)$ είναι εν γένει ελάσσων κύκλος και είναι μέγιστος κύκλος αν και μόνο αν $\epsilon = \pi/2, 3\pi/2$.

5.2.2 Γεωδαισιακότητα

Έχουμε ήδη δει ότι η χορδική μετρική στον S^1 δεν είναι εμφανής. Το ίδιο συμβαίνει και στη γενικότερη περίπτωση, αλλά και κάτι ακόμα περισσότερο. Η εμφανής μετρική που προκύπτει στον τον μετρικό χώρο (S^{n-1}, c_n) είναι η s_{n-1} . Αυτό αποδεικνύεται από την παρακάτω πρόταση, που μας λέει επίσης ότι οι γεωδαισιακές της σφαίρας είναι οι μέγιστοι κύκλοι: για να μεταβούμε από ένα σημείο της σφαίρας σε κάποιο άλλο κατά τον συντομότερο δρόμο, ακολουθούμε το μικρότερο τόξο του μεγίστου κύκλου που τα ενώνει.



Ο συντομότερος δρόμος μεταξύ Βερολίνου και Λος Άντζελες.

Πρόταση 5.2.6. Εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^{n-1}$ τότε το μικρότερο του μεγίστου κύκλου από τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ αποτελεί τον συντομότερο δρόμο που τα ενώνει.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε λόγω της μεταβατικότητας της δράσης της $O(n)$ και του αναλλοίωτου του μήκους των καμπυλών από τη δράση αυτή ότι και τα δύο σημεία κείνται επί του μεγίστου κύκλου που περνά από τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ και ειδικότερα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{y} = (\cos \theta, \sin \theta, 0, \dots, 0),$$

$\theta \in (0, \pi)$. Κατ' αυτόν τον τρόπο

$$s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \theta.$$

Έστω τώρα (παραγωγίσιμη) καμπύλη $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ της S^{n-1} που συνδέει τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$:

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)).$$

Γράφουμε

$$\gamma(t) = \cos(\varphi(t))\mathbf{e}_1 + \sin(\varphi(t))\mathbf{z}(t),$$

όπου $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \pi]$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = \theta$. Η δε $\mathbf{z}(t)$ είναι παραγωγίσιμη καμπύλη της $\{0\} \times S^{n-2}$ εμφυτευμένης στην S^{n-1} με $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(1) = \mathbf{0}_{n-2}$. Είναι

$$\dot{\gamma}(t) = -\sin(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_1 + \cos(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\mathbf{z}(t) + \sin(\varphi(t))\dot{\mathbf{z}}(t)$$

και έτσι

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = (\dot{\varphi}(t))^2 + \sin^2(\varphi(t))\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|^2.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(\dot{\varphi}(t))^2 + \sin^2(\varphi(t))\|\dot{\mathbf{z}}(t)\|^2} dt \\ &\geq \int_0^1 |\dot{\varphi}(t)| dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \dot{\varphi}(t) dt \right| \\ &= |\varphi(1) - \varphi(0)| = \theta = s_{n-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Η ισότητα πιάνεται επάνω στο τμήμα του μεγίστου κύκλου

$$(\cos \varphi, \sin \varphi, 0, \dots, 0), \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Παίρνοντας infimum πάνω από τα μήκη όλων των καμπυλών που συνδέουν τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, προκύπτει το αποτέλεσμα. $\square$

5.3 Σφαιρική Τριγωνομετρία

Έστω τρία σημεία της S^{n-1} και υποθέτουμε ότι δεν ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο. Εφεξής, μπορούμε να υποθέτουμε επίσης ότι τρία τέτοια σημεία ανήκουν στη σφαίρα S^2 , λόγω της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 5.3.1. *Οποιαδήποτε τρία σημεία της S^{n-1} που δεν κείνται στον ίδιο μέγιστο κύκλο ανήκουν σε 2-σφαίρα.*

Απόδειξη. Τρία σημεία που δεν ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο ορίζουν ένα 2-επίπεδο στον $\mathbb{R}^n$. Η τομή του επιπέδου αυτού με την S^{n-1} είναι σφαιρικός κύκλος της S^{n-1} της μορφής

$$\mathbf{x}(\theta) = \mathbf{a} + (r \cos \theta)\mathbf{v}_1 + (r \sin \theta)\mathbf{v}_2, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

όπου $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_i = 0$, $\|\mathbf{v}_1\| = \|\mathbf{v}_2\| = 1$, $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ και $r = \sqrt{1 - \|\mathbf{a}\|^2} < 1$. Ο κύκλος αυτός ανήκει στη 2-σφαίρα κέντρου $\mathbf{a}$ και ακτίνας r με παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = \mathbf{a} + (r \cos \theta \cos \phi)\mathbf{v}_1 + (r \cos \theta \sin \phi)\mathbf{v}_2 + (r \sin \theta)\mathbf{v}_3, \quad \theta, \phi \in \mathbb{R},$$

όπου $\mathbf{v}_3$ μοναδιαίο διάνυσμα στο ορθοσυμπλήρωμα του $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. $\square$

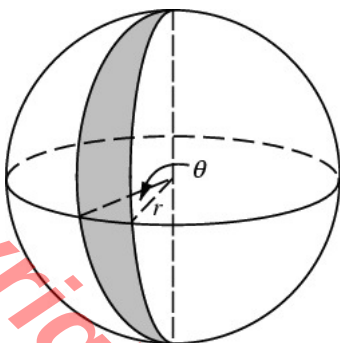
Σε ό,τι ακολουθεί, και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου, θα βρισκόμαστε στο περιβάλλον της S^2 .

5.3.1 Γωνίες μεγίστων κύκλων

Ορισμός 5.3.2. Η γωνία δύο μεγίστων κύκλων C_1 και C_2 με πολικά διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$, αντίστοιχα, είναι η γωνία $\angle(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$. Με άλλα λόγια η γωνία δύο μεγίστων κύκλων είναι η στερεά γωνία των επιπέδων που τους περιέχουν:

$$\angle(C_1, C_2) = \arccos(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2).$$

Οι C_1 και C_2 θα καλούνται ορθογώνιοι ή κάθετοι εάν $\angle(C_1, C_2) = \pi/2$.



Η γωνία δύο μεγίστων κύκλων και ο μηνίσκος τους.

Πρόταση 5.3.3. Ισχύουν τα παρακάτω:

1. Υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος ορθογώνιος σε δύο δοθέντες διαφορετικούς μεγίστους κύκλους.
2. Έστω μέγιστος κύκλος και σημείο εκτός αυτού. Αν το δοθέν σημείο δεν είναι πόλος του μεγίστου κύκλου, τότε υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος που περνά από το σημείο και είναι ορθογώνιος στον δοθέντα μέγιστο κύκλο.

Απόδειξη. 1) Έστω C_1, C_2 διαφορετικοί μέγιστοι κύκλοι με πολικά διανύσματα $\mathbf{n}_1$ και $\mathbf{n}_2$, αντίστοιχα, τα οποία δεν είναι παράλληλα. Επομένως, το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2\|}$$

είναι κάθετο σε αμφότερα τα $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$. Άρα, ο μέγιστος κύκλος C με πολικό διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι ορθογώνιος σε αμφότερους τους C_1, C_2 . Είναι δε μοναδικός, διότι το μοναδικό άλλο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στα $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ είναι το $-\mathbf{n}$ που είναι και αυτό πολικό διάνυσμα του C .

2) Έστω $\mathbf{v} \in S^2$ και $\mathbf{n}$ πολικό διάνυσμα μεγίστου κύκλου C με $\mathbf{v} \notin C$. Εφ'όσον το $\mathbf{v}$ δεν είναι πόλος του C , τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{n}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{n}}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{n}\|} \perp \mathbf{n}.$$

Επειδή $\mathbf{n}' \perp \mathbf{v}$, παίρνουμε $\mathbf{v} \in C'$, όπου $C' \perp C$ ο μέγιστος κύκλος με πολικό διάνυσμα $\mathbf{n}'$. Η μοναδικότητα προκύπτει όπως προηγουμένως. $\square$

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με τις οικείες σε μας γεωγραφικές συντεταγμένες φ, ϑ (γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος, αντίστοιχα). Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$, τότε $\vartheta = \pi - \angle(\mathbf{x}\mathbf{e}_3)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, ενώ η γωνία φ είναι η γωνία από το $\mathbf{e}_1$ στο $(x_1, x_2, 0)/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ και ανήκει στο $[0, 2\pi]$. Κατ' αυτόν τον τρόπο,

$$\mathbf{x} = \cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta \mathbf{e}_3.$$

Εάν

$$\mathbf{x}' = \cos \vartheta' \cos \varphi' \mathbf{e}_1 + \cos \vartheta' \sin \varphi' \mathbf{e}_2 + \sin \vartheta' \mathbf{e}_3$$

είναι ένα άλλο σημείο της S^2 , τότε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \cos(\varphi - \varphi') \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta'$$

και συνεπώς

$$\cos(s_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) = \cos(\varphi - \varphi') \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta'. \quad (5.12)$$

Ο τύπος αυτός θα μας φανεί χρήσιμος αργότερα.

5.3.2 Ασκήσεις

1. Βρείτε τις γωνίες μεταξύ των μεγίστων κύκλων με αντίστοιχα πολικά διανύσματα:

(α') $(1, 0, 0)$ και $(0, 0, 1)$,

(β') $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$,

(γ') $(1/3, 2/3, 2/3)$ και $(-3/5, 4/5, 0)$.

2. Έστω ο μέγιστος κύκλος C με παραμέτρηση

$$\mathbf{x}(\theta) = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$$

και σημείο

$$\mathbf{v} = \cos \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \mathbf{e}_3,$$

που δεν ανήκει στον C και δεν είναι πόλος του C . Υποθέστε ότι $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, \pi]$, $\varphi_1, \varphi_2 \neq \pi/2$.

(α') Βρείτε τύπο για τη συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$,

$$f(\theta) = \cos(s_2(\mathbf{v}, \mathbf{x}(\theta))).$$

(β') Η απόσταση $s_2(\mathbf{v}, C)$ είναι ελάχιστη στο σημείο που μεγιστοποιείται η f . Βρείτε το σημείο αυτό και την αντίστοιχη απόσταση.

(γ') Δείξτε ότι ο μέγιστος κύκλος C' που συνδέει το σημείο μεγιστοποίησης της με το $\mathbf{v}$ και ο C είναι ορθογώνιοι.

3. Στην Πρόταση 4.3.3 2), τί συμβαίνει όταν το σημείο είναι πόλος του μεγίστου κύκλου;
4. Χρησιμοποιήστε τον τύπο (4.2) για να βρείτε τη σφαιρική απόσταση μεταξύ των σημείων με γεωγραφικές συντεταγμένες (ϑ, φ) ως εξής:

(α') $(0, 0)$ και $(\pi/3, \pi)$.

(β') $(\pi/2, \pi/2)$ και $(\pi/6, 2\pi/3)$.

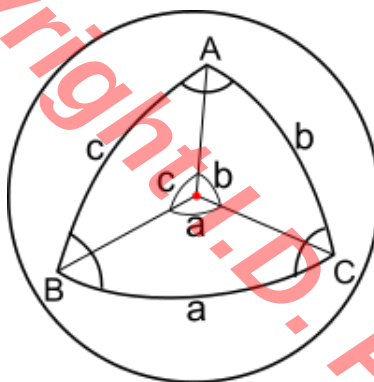
5.3.3 Σφαιρικά τρίγωνα. Εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου

Έστω A, B, C είναι τρία σημεία που δεν κείνται στον ίδιο μέγιστο κύκλο και φέρνουμε τους τρεις μέγιστους κύκλους που περνούν από τα B και C , C και A , A και B , αντίστοιχα. Θα συμβολίζουμε με:

- a, b, c τα μικρότερα τμήματα των μεγίστων κύκλων που συνδέουν τα B και C , C και A , A και B , αντίστοιχα.
- A, B, C τις γωνίες των b και c , c και a , a και b , αντίστοιχα, στα σημεία A, B, C .

Οι γωνίες προκύπτουν ως εξής. Έστω ο B ο μέγιστος κύκλος που περνά από τα A, C και C ο μέγιστος κύκλος που περνά από τα A, B . Η γωνία είναι η στερεά γωνία των επιπέδων που ανήκουν οι B και C στο κοινό τους σημείο A .

Ορισμός 5.3.4. Ονομάζουμε σφαιρικό τρίγωνο $\triangle ABC$ το τμήμα της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των a, b, c . Οι a, b, c καλούνται πλευρές του τριγώνου, οι A, B, C καλούνται γωνίες του τριγώνου, ενώ τα A, B, C καλούνται κορυφές του τριγώνου.

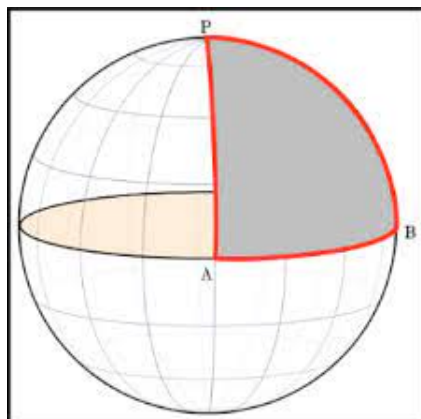


Σφαιρικό τρίγωνο

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε στα σφαιρικά τρίγωνα είναι ότι ο γνωστός τύπος του αθροίσματος των γωνιών Ευκλείδειου τριγώνου $A + B + C = \pi$ δεν ισχύει. Για παράδειγμα, το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

έχει άθροισμα γωνιών $3\pi/2$.



Σφαιρικό τρίγωνο με τρεις ορθές γωνίες

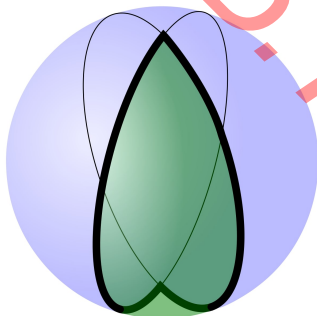
Έστω $E = A + B + C - \pi$. Τότε, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι $E = 0$ ενώ στη Σφαιρική Γεωμετρία είναι πάντοτε $E > 0$. Αυτό οφείλεται στο παρακάτω Θεώρημα του Girard.

Θεώρημα 5.3.5. (Girard ~ 1620) Ο αριθμός E ισούται με το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου.

Το θεώρημα αυτό είχε αποδειχθεί νωρίτερα από τον Harriot, ο οποίος όμως δεν το είχε δημοσιεύσει. Παρατηρήστε στο σημείο αυτό ότι επειδή $A, B, C \in (0, \pi)$, είναι $E < 2\pi$. Για να αποδείξουμε το Θεώρημα του Girard, χρειάζεται πρώτα να μιλήσουμε για μηνίσκους. Η λέξη είναι αρχαιοελληνική, υποκοριστικό του μήνη=σελήνη.

Ορισμός 5.3.6. Ένας μηνίσκος είναι το χωρίο που περιέχεται μεταξύ δύο μεγίστων κύκλων.

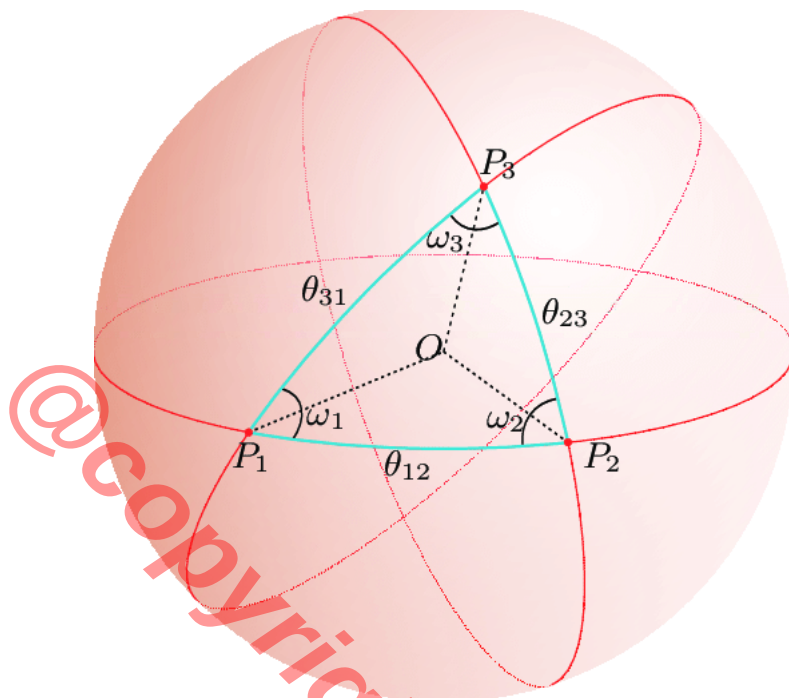
Δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε αντιποδικά σημεία και έστω θ η στερεά γωνία των επιπέδων που τους περιέχουν-αυτή είναι ίση με τη γωνία του μηνίσκου που ορίζουν αυτοί η μέγιστοι κύκλοι στα σημεία τομής τους. Το σφαιρικό εμβαδόν E_θ μηνίσκου με στερεά γωνία θ είναι ίσο με 2θ , εφόσον είναι ανάλογο της γωνίας θ και το συνολικό σφαιρικό εμβαδόν είναι 4π .



Σφαιρικός μηνίσκος

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.5.

Το τρίγωνο T σχηματίζεται από πλευρές που κείνται σε τρεις μεγίστους κύκλους τους οποίους συμβολίσουμε εδώ με A, B, C . Ο μέγιστος κύκλος A διαιρεί τη σφαίρα σε δύο ημισφαίρια τα οποία συμβολίζουμε με A_1 και A_2 . Ορίζουμε ομοίως ημισφαίρια B_1, B_2, C_1, C_2 , επιλέγοντάς τα ώστε $T = A_1 \cap B_1 \cap C_1$, με το T να έχει γωνίες A, B και C στις κορυφές στις τομές $B \cap C, C \cap A$ και $A \cap B$, αντίστοιχα. Οι A, B και C διαιρούν τη σφαίρα σε οκτώ τρίγωνα $A_i \cap B_j \cap C_k$, $i, j, k = 1, 2$, τα οποία γράφουμε εν συντομία $\mathbf{A}_i \mathbf{B}_j \mathbf{C}_k$. Το τρίγωνο $T (= \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1)$ και τα έξι γειτονικά του μπορούν να σχεδιαστούν στο επίπεδο, και το μόνο που θα απουσιάζει θα είναι το $\mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_2$.



Απόδειξη του Θεωρήματος του Girard

Τώρα, λ.χ., τα τρίγωνα $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$ και $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1$ μαζί, σχηματίζουν μηνίσκο γωνίας A που ορίζεται από τους μεγίστους κύκλους $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1) + E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1) &= 2A, \\ E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1) + E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1) &= 2B, \\ E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1) + E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2) &= 2C, \\ E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2) + E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2) &= 2A, \\ E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2) + E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2) &= 2B, \\ E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2) + E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1) &= 2C. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις έξι αυτές εξισώσεις και παρατηρώντας ότι είναι

$$E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1) = E(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2\mathbf{C}_2), \quad \sum_{i,j,k=1}^2 E(\mathbf{A}_i\mathbf{B}_j\mathbf{C}_k) = 4\pi,$$

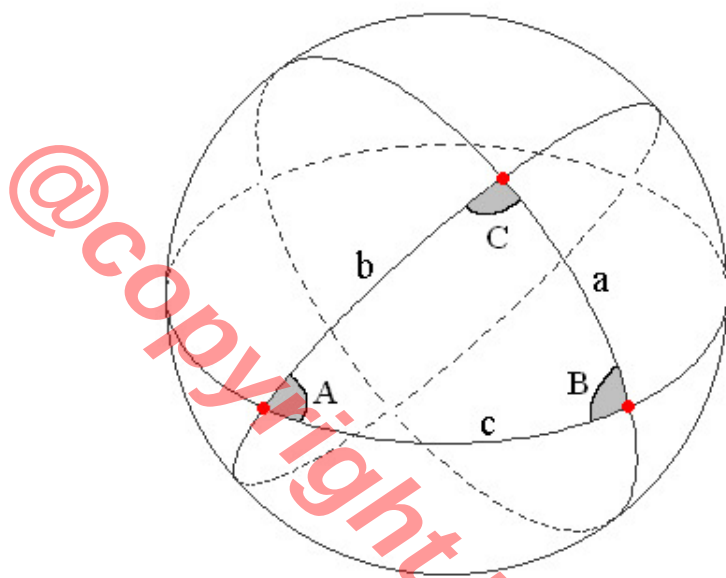
καταλήγουμε στη σχέση $E(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1\mathbf{C}_1) + \pi = A + B + C$, που είναι και αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε. $\square$

5.3.4 Τριγωνομετρικοί νόμοι

Θεώρημα 5.3.7. (Πρώτος Νόμος Συνημιτόνων.)

$$\cos a = \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c. \quad (5.13)$$

Απόδειξη. Λόγω της δράσης της $O(3)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κορυφές του τριγώνου είναι $\mathbf{A} = \mathbf{e}_3$ με γεωγραφικές συντεταγμένες $(\vartheta, \varphi) = (\pi/2 - c, 0)$, $\mathbf{B}$ είναι σημείο με γεωγραφικές συντεταγμένες $(c, 0)$ και $\mathbf{C}$ σημείο με γεωγραφικές συντεταγμένες $(\pi/2 - b, A)$.



Απόδειξη του Πρώτου Νόμου των Συνημιτόνων

Τότε, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (4.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos(s_2(\mathbf{B}, \mathbf{C})) \\ &= \cos A \cos(\pi/2 - c) \cos(\pi/2 - b) + \sin(\pi/2 - c) \sin(\pi/2 - b) \\ &= \cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.3.8. (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Εάν η γωνία A είναι ορθή, τότε

$$\cos a = \cos b \cos c.$$

Θεώρημα 5.3.9. (Νόμος Ημιτόνων)

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Απόδειξη. Από την ταυτότητα $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ και τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων για

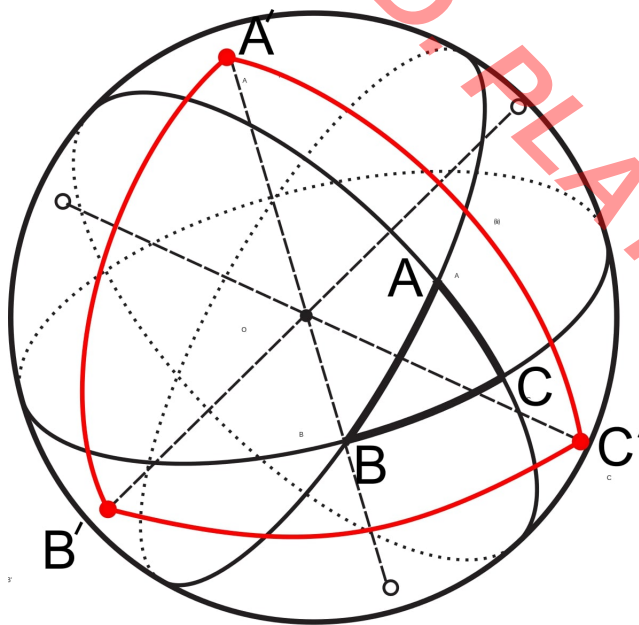
το $\cos A$ όπως παραπάνω, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\sin^2 A &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right)^2 \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ \frac{\sin A}{\sin a} &= \frac{[1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c]^{1/2}}{\sin a \sin b \sin c}.\end{aligned}$$

Επειδή το δεξιό σκέλος παραμένει αναλλοίωτο από κάθε μετάταξη των a, b, c προκύπτει άμεσα ο Νόμος των Ημιτόνων. $\square$

Σε αντιδιαστολή με την Ευκλείδεια Γεωμετρία, στη Σφαιρική Γεωμετρία έχουμε και έναν Δεύτερο Νόμο Συνημιτόνων. Για την απόδειξη του μας χρειάζεται η έννοια του *δυϊκού* (ή, *πολικού*) τριγώνου $T' = \triangle A'B'C'$ που αντιστοιχεί σε τρίγωνο $T = \triangle ABC$ και κατασκευάζεται ως εξής. Θεωρούμε τον μέγιστο κύκλο που περιέχει την πλευρά $a = BC$. Η κάθετη ευθεία από την αρχή στο επίπεδο του κύκλου αυτού τέμνει τη σφαίρα σε δύο σημεία και το σημείο που είναι στην ίδια πλευρά του επιπέδου με την κορυφή A συμβολίζεται με A' . Ομοίως παίρνουμε τα σημεία B' και C' και το τρίγωνο $\triangle A'B'C'$ είναι το δυϊκό του τριγώνου ABC . Από την κατασκευή του,

$$\begin{aligned}A' &= \pi - a, & B' &= \pi - b, & C' &= \pi - c, \\ a' &= \pi - A, & b' &= \pi - B, & c' &= \pi - C.\end{aligned}$$



Σφαιρικό τρίγωνο και το δυϊκό του

Θεώρημα 5.3.10. (Δεύτερος Νόμος Συνημιτόνων)

$$\cos A = \frac{\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη έπεται αμέσως εφαρμόζοντας τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων στο δυϊκό τρίγωνο $T' = \triangle A'B'C'$. $\square$

Πόρισμα 5.3.11. Στη Σφαιρική Γεωμετρία, τα όμοια τρίγωνα είναι ίσα και αντιστρόφως.

5.3.5 Ασκήσεις

1. Ένα σφαιρικό n -γωνο είναι το χωρίο που περικλείεται μεταξύ n τεμνόμενων ανά δύο μεγίστων κύκλων. Γενικεύστε τον τύπο του Girard για το εμβαδόν σφαιρικού n -γώνου.
2. Αποδείξτε το Πυθαγόρειο θεώρημα ανεξάρτητα από τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων, παίρνοντας κατάλληλη κανονικοποίηση για τις κορυφές του τριγώνου.
3. Εναλλάσσοντας τα a, b, c και A, B, C , γράψτε όλες τις δυνατές εκδοχές του Πρώτου και του Δεύτερου Νόμου των Συνημιτόνων.
4. Υπολογίστε το εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι $\pi/2$.
5. Αποδείξτε το παρακάτω σπουδαίο θεώρημα του Αρχιμήδη περί των εμβαδών σφαίρας και κυλίνδρου. Το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας S^2 που αποκόπτον τα επίπεδα $z = a$ και $z = b$, $-1 \leq a < b \leq 1$, ισούται με το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κυλίνδρου που κείται μεταξύ των δύο αυτών επιπέδων. (Υπόδειξη. Παραμετρήστε το αποκομμένο τμήμα με την

$$\mathbf{x}(\theta_1, \theta_2) = (\sin \theta_1 \sin \theta_2, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \cos \theta_1),$$

με $(\theta_1, \theta_2) \in D = [\arccos b, \arccos a] \times [0, 2\pi]$. Αν J είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού αυτού, τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\text{Area} = \iint_D |J| d\theta_1 d\theta_2 = 2\pi(b - a).$$

Ένας άλλος πιο γρήγορος τρόπος είναι να θεωρήσετε τα εμβαδά συγκεκριμένων σφαιρικών περιοχών με κέντρο το $\mathbf{e}_3$.

6. Έστω ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο πλευράς a και εσωτερικής γωνίας A . Αποδείξτε ότι

$$\cos(a/2) \sin(A/2) = 1/2.$$

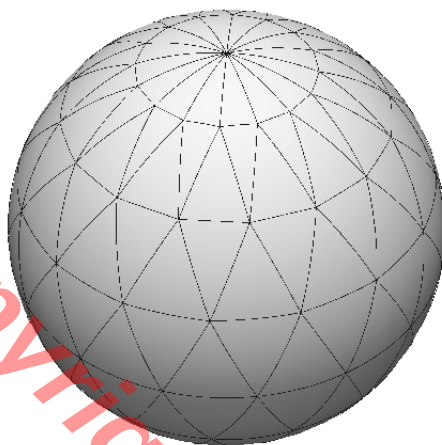
Συμπεράνετε ότι σε σφαιρικό ισόπλευρο τρίγωνο, $A > \pi/3$.

7. Υπολογίστε την περίμετρο σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι ορθές.

5.4 Τύπος του Euler

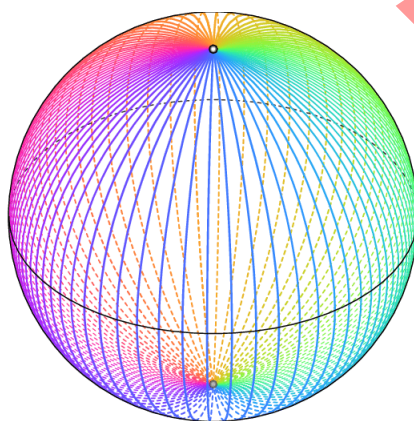
Ένα σφαιρικό τρίγωνο T είναι ένα χωρίο της S^2 που οριοθετείται από τρία σφαιρικά τόξα σ_1, σ_2 και σ_3 τριών μεγίστων κύκλων. Τα τόξα σ_j είναι οι ακμές του T , και τα τρία σημεία

$\sigma_i \cap \sigma_j, i \neq j$, είναι οι κορυφές του T . Ένας τριγωνισμός της σφαίρας S^2 είναι ένας διαχωρισμός της σε ένα πεπερασμένο πλήθος μη επικαλυπτόμενων σφαιρικών τριγώνων T_j έτσι ώστε η τομή οποιωνδήποτε δύο T_j να είναι είτε κενή, είτε μία κοινή ακμή, ή μια κοινή κορυφή. Οι ακμές του τριγωνισμού είναι οι ακμές όλων των T_j και οι κορυφές του τριγωνισμού είναι όλες οι κορυφές των T_j .



Τριγωνισμός της σφαίρας

Το απλούστερο παράδειγμα τριγωνισμού της σφαίρας (ας πούμε, της επιφάνειας της Γης) εντοπίζεται σχεδιάζοντας τον ισημερινό και n μεσημβρινούς. Σε αυτήν την περίπτωση, ο τριγωνισμός περιέχει $2n$ τρίγωνα, $n + 2$ κορυφές (n στον ισημερινό, και μία σε κάθε πόλο), και $3n$ κορυφές.



Τριγωνισμός της σφαίρας από μεσημβρινούς και τον ισημερινό.

Αν συμβολίσουμε τον αριθμό των τριγώνων, ακμών και κορυφών με F , E και V , αντίστοιχα, παίρνουμε $F - E + V = 2$. Δηλαδή, η έκφραση $F - E + V$ δεν εξαρτάται από η επιλογή του n . Είναι ακόμη πιο αξιοσημείωτο ότι ο τύπος $F - E + V = 2$ ισχύει για όλους τους τριγωνισμούς της σφαίρας. Αυτό το σημαντικό τοπολογικό αποτέλεσμα οφείλεται στον Ελβετό Μαθηματικό Euler.



Leonard Euler, 1707–83

Η όμορφη απόδειξη του Legendre που παρουσιάζουμε ευθύς αμέσως βασίζεται στον τύπο του εμβαδού σφαιρικού τριγώνου.



Adrien-Marie Legendre, 1752–1833. Η καρικατούρα αυτή είναι το μόνο γνωστό πορτραίτο του και ανακαλύφθηκε το 2005.

Θεώρημα 5.4.1. (Θεώρημα Τριγωνισμού του Euler) *Ας υποθέσουμε ότι ένας τριγωνισμός της S^2 έχει F τρίγωνα, E ακμές και V κορυφές. Τότε*

$$F - E + V = 2.$$

Απόδειξη. Το εμβαδόν ενός σφαιρικού τριγώνου με γωνίες θ_1, θ_2 και θ_3 είναι $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν F τρίγωνα, E ακμές και V κορυφές στον τριγωνισμό της σφαίρας. Αθροίζοντας όλες τις γωνίες σε όλα τα τρίγωνα, το συνολικό άθροισμα γωνιών είναι $2\pi V$ (διότι όλες οι γωνίες εμφανίζονται σε μια κορυφή χωρίς επικάλυψη, και επειδή το άθροισμα των γωνιών σε οποιαδήποτε κορυφή είναι ακριβώς 2π). Επίσης, το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων είναι το εμβαδόν της σφαίρας. Έτσι $2\pi V - F\pi = 4\pi$, ή $2V = F + 4$. Τώρα, απαριθμώντας τις ακμές κάθε τριγώνου και σημειώνοντας ότι στην απαρίθμηση αυτή κάθε πλευρά μετράει δύο φορές, λαμβάνουμε $3F = 2E$. Έτσι

$$F - E + V = F - 3F/2 + (F + 4)/2 = 2.$$

□

Κλείνουμε την ενότητα αυτή αναφέροντας ότι ο Τύπος του Euler ισχύει και για κανονικά πολύεδρα του $\mathbb{R}^3$. Ένα κανονικό πολύεδρο είναι αυτό που συντίθεται από p κανονικά πολύγωνα, και ακριβώς q τέτοια πολύγωνα τέμνονται σε κάθε κορυφή του πολυέδρου. Τα κανονικά πολύεδρα είναι τα περίφημα Πλατωνικά Στερεά. Επειδή το άθροισμα των γωνιών σε κάθε κορυφή είναι $< 2\pi$, έχουμε

$$q(\pi - 2\pi/p) < 2\pi \iff (p-2)(q-2) < 4.$$

Συνεπώς, επειδή $p, q \geq 3$, τα μόνα δυνατά ζεύγη (p, q) είναι:

$$(3, 3), \quad (3, 4), \quad (3, 5), \quad (4, 3), \quad (5, 3).$$

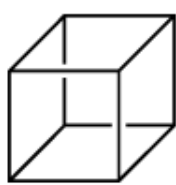
Αν F είναι το πλήθος των εδρών, E το πλήθος των ακμών και V το πλήθος των κορυφών του κανονικού πολυέδρου, τότε επειδή $2E = pF = qV$, ο τύπος του Euler δίνει

$$F = \frac{4q}{2p + 2q - pq}, \quad E = \frac{2pq}{2p + 2q - pq}, \quad V = \frac{4p}{2p + 2q - pq}.$$

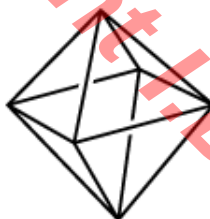
Αντικαθιστώντας στις παραπάνω πεντάδες παίρνουμε τον πλήρη κατάλογο των Πλατωνικών Στερεών.

**Τετράεδρο**

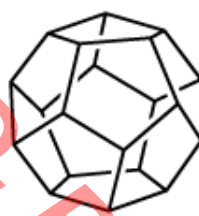
Κορυφές: 4
Ακμές: 6
Έδρες: 4

**Κύβος**

Κορυφές: 8
Ακμές: 12
Έδρες: 6

**Οκτάεδρο**

Κορυφές: 6
Ακμές: 12
Έδρες: 8

**Δωδεκάεδρο**

Κορυφές: 20
Ακμές: 30
Έδρες: 12

**Εικοσάεδρο**

Κορυφές: 12
Ακμές: 30
Έδρες: 20

Πλατωνικά Στερεά.

@copyright I.D. PLATIS

Κεφάλαιο 6

Αφφινική Γεωμετρία



Νικόλαος Χατζηδάκης, 1872-1942

Ας φανταστούμε τον Ήλιο να λάμπει μέσα από ένα παράθυρο που αποτελείται από πανομοιότυπα ορθογώνια τζάμια. Η σκιά στο πάτωμα γενικά δεν θα είναι ορθογώνια και καθώς ο Ήλιος κινείται, η σκιά θα αλλάζει σχήμα.

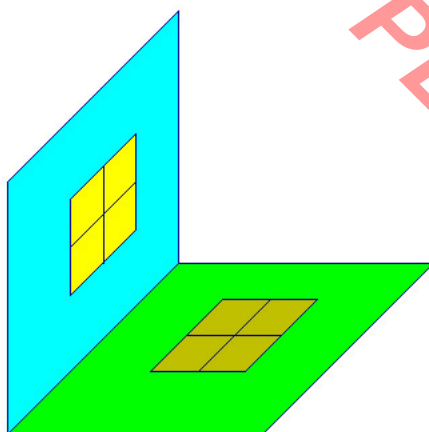


Καθώς ο Ήλιος κατεβαίνει, οι σκιές επιμηκύνονται, έτσι βλέπουμε ότι τα μήκη δεν είναι αμετάβλητα. Επίσης, η εμπειρία δείχνει ότι το σχήμα της σκιάς αλλάζει, έτσι οι γωνίες επίσης δεν είναι αμετάβλητες. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι σκιές των ορθογωνίων τζαμιών είναι πάντα παραλληλόγραμμα. Αυτό υποδηλώνει ότι διατηρείται

η παραλληλία. Σε αδρές γραμμές, το βασικό πρόβλημα της Αφφινικής Γεωμετρίας είναι να καθοριστεί τι ιδιότητες έχουν όλες οι σκιές από κοινού.



Δεδομένου ότι ο Ήλιος απέχει πολύ από τη Γη, μια λογική προσέγγιση είναι να υποθέσουμε ότι οι ακτίνες είναι παράλληλες. Αυτό θα μας οδηγήσει στην έννοια της παράλληλης προβολής. Προς το παρόν, παρατηρούμε ότι υπό την προϋπόθεση ότι οι ακτίνες του Ήλιου δεν είναι παράλληλες με τον τοίχο ή το δάπεδο, τότε κάθε σημείο του επιπέδου του τοίχου οδηγεί σε ένα σημείο στο επίπεδο του δαπέδου. Με άλλα λόγια, έχουμε έναν μετασχηματισμό του $\mathbb{R}^2$. Αυτοί που θα καλέσουμε αφφινικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$, συντίθενται από τέτοιες παράλληλες προβολές.



Μπορεί ασφαλώς να θεωρηθεί ότι ο πατέρας της Αφφινικής Γεωμετρίας είναι ο Euler. Αυτός εισήγαγε και τον όρο *αφφινική* (Λατ. *affinis*=σχετιζόμενη) στο βιβλίο που έγραψε το 1748 με τίτλο *Introductio in analysin infinitorum*. Το 1827 ο Möbius έγραψε περί Αφφινικής Γεωμετρίας στο βιβλίο του *Der barycentrische Calcul*. Στο Πρόγραμμα του Erlangen, ο Klein αναγνωρίζει την Αφφινική Γεωμετρία ως γενίκευση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Έκτοτε, η Αφφινική Γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε π.χ. το 1912 από τους Wildon και Lewis για να εκφράσουν την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας, από τον Weyl το 1918 για τη μελέτη του επάνω στην Μαθηματική

Φυσική (Χώρος, χρόνος, ύλη). Ακόμα και πιο πρόσφατα, το 1984, οι Birman και Nomizu χρησιμοποίησαν αφφινικές μεθόδους σε μελέτη Γεωμετρίας Lorentz.

Κατά τον Klein, η Αφφινική (ή, κατά τον N. Χατζηδάκι, Ομοπαράλληλική) Γεωμετρία είναι η Γεωμετρία $(\mathbb{R}^n, A(n))$, με την αφφινική ομάδα $A(n)$ να είναι το ημεισθύ άθροισμα $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n, \mathbb{R})$ της ομάδας μεταφορών του $\mathbb{R}^n$ και της γενικής γραμμικής ομάδας. Στην πράξη, η Αφφινική Γεωμετρία (που περιέχει και την Ευκλείδεια και την Ομοιοθετική Γεωμετρία) είναι ότι απομένει από την Ευκλείδεια Γεωμετρία αν αφαιρέσουμε την δυνατότητα μέτρησης μηκών, γωνιών και εμβαδών.

6.1 Ο αφφινικός χώρος $\mathbb{R}^n$

Προτού επικεντρωθούμε στον αφφινικό χώρο $\mathbb{R}^n$, παραθέτουμε πρώτα τα απαραίτητα της γενικής θεωρίας των αφφινικών χώρων. Ο $\mathbb{R}^n$ ως αφφινικός χώρος προκύπτει ως παράδειγμα της γενικής θεωρίας.

6.1.1 Αφφινικοί χώροι

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V είναι διανύσματα (ή μεταφορές, αν ειπωθούν ως στοιχεία της προσθετικής ομάδας $(V, +)$), τα οποία τα θεωρούμε ως αντικείμενα γραμμικών μετασχηματισμών. Αλλά, σε πολλά προβλήματα ενδιαφερόμαστε για γεωμετρικά δεδομένα που αφορούν τη σχετική θέση των σχημάτων στον εξεταζόμενο χώρο, ενώ οι γραμμικοί μετασχηματισμοί περνούν στο παρασκήνιο. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο εισάγουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6.1.1. Ένας αφφινικός χώρος με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V , ο οποίος είναι ένας γεωμετρικός χώρος (οπότε τα στοιχεία του είναι σημεία) που σχετίζεται με τον διανυσματικό χώρο V ως εξής: υπάρχει μία μεταβατική και ελεύθερη δεξιά δράση του V στον A :

$$\begin{aligned} A \times V &\rightarrow A \\ (a, v) &\mapsto a + v. \end{aligned}$$

Η δράση συμβολίζεται ως πρόσθεση, για λόγους που θα γίνουν φανεροί αμέσως παρακάτω. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- 1) Δεξιό ουδέτερο στοιχείο.

$$\forall a \in A, \quad a + 0 = a,$$

όπου 0 είναι το μηδενικό στοιχείο του V .

- 2) Προσεταιριστικότητα.

$$\forall v, w \in V, \forall a \in A, \quad (a + v) + w = a + (v + w),$$

με το τελευταίο $+$ να είναι η πρόσθεση στον V .

3) *Μεταβατική και ελεύθερη δράση.* Για κάθε $a \in A$, η απεικόνιση

$$V \rightarrow A: v \mapsto a + v,$$

είναι 1-1 και επί.

Οι πρώτες δύο ιδιότητες είναι απλώς οι ιδιότητες του ορισμού της δεξιάς δράσης. Η τρίτη ιδιότητα χαρακτηρίζει τις ελεύθερες και μεταβατικές δράσεις: το επί προκύπτει από την μεταβατικότητα και το 1-1 από την ελευθερία της δράσης. Υπάρχει και μία τέταρτη ιδιότητα που προκύπτει από τις παραπάνω πρώτες δύο.

4) *Υπαρξη 1-1 μεταφορών.* Για κάθε $v \in V$, η απεικόνιση

$$A \rightarrow A: a \mapsto a + v,$$

είναι 1-1 και επί.

Η τρίτη ιδιότητα χρησιμοποιείται πολύ συχνά με την παρακάτω ισοδύναμη μορφή της.

3') *Αφαίρεση.* Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος (b, a) , $a, b \in A$, υπάρχει μοναδικό $v \in V$, που συμβολίζεται με $\overrightarrow{ab}$ ή $b - a$, τέτοιο ώστε

$$b = a + v.$$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{ab}$ νοείται ως το διάνυσμα με αρχή το a και πέρας (τέλος) το b . Υπάρχουν δύο αξιώματα που οφείλονται στον Weyl που καθορίζουν την αντιστοιχία μεταξύ των A και V μέσω της αφαίρεσης και ταυτοχρόνως μπορούν να θεωρηθούν ως ο ορισμός ενός αφφινικού χώρου.



Hermann Klaus Hugo Weyl, 1885-1955

Ορισμός 6.1.2. Ένα σύνολο A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V λέγεται αφφινικός χώρος (του V) αν ικανοποιούνται τα παρακάτω:

- **(A1)** *Υπαρξη αφαίρεσης στο A :* για κάθε σημείο $a \in A$ και κάθε διάνυσμα $v \in V$ υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $b \in A$ έτσι ώστε $\overrightarrow{ab} = v$.

- (A2) Νόμος του Châsles: για κάθε τριάδα σημείων $a, b, c \in A$,

$$\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}.$$

Το σημείο b στο (A1) νοείται ως το σημείο a που μετατοπίζεται στο χώρο από το διάνυσμα v και έτσι γράφουμε και $b - a = \overrightarrow{ab}$. Ο Νόμος του Châsles μπορεί να γίνει κατανοητός ως η ισοδυναμία δύο μετατοπίσεων από το a στο b και μετά στο c , σε μία μετατόπιση από a σε c . Γράφουμε και

$$c - a = (c - b) + (b - a).$$

Στον Νόμο του Châsles αναγνωρίζουμε και τον οικείο από το σχολείο κανόνα του παραλληλογράμμου για την πρόσθεση διανυσμάτων.

Ορισμός 6.1.3. Η διάσταση ενός αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V είναι η διάσταση του V . Εάν $\dim(A) = n$, το σύνολο $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ είναι αφφινική βάση του A αν και μόνο αν το σύνολο $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ είναι βάση του V .

Κάθε διανυσματικός χώρος V μπορεί να θεωρηθεί σαν αφφινικός χώρος με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο τον εαυτό του. Δηλαδή, κάθε στοιχείο του V μπορεί να ειπωθεί είτε σαν σημείο είτε σαν διάνυσμα. Το μηδενικό διάνυσμα όταν θεωρείται σαν σημείο συμβολίζεται συνήθως με O και καλείται *αρχή*. Ειδικότερα, ο $\mathbb{R}^n$ είναι αφφινικός χώρος διάστασης n . Μέχρι τώρα αντιμετωπίζαμε τον $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικό χώρο και συμβολίζαμε τα στοιχεία του ως διανύσματα. Για να μην επιβαρύνουμε τον συμβολισμό, θα εξακολουθήσουμε να συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x}$ σε κάθε περίπτωση (και όχι με x όταν πρόκειται για σημεία και με $\mathbf{x}$ όταν πρόκειται για διανύσματα).

Παράδειγμα 6.1.4. Αν $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ είναι αφφινική βάση του $\mathbb{R}^n$, είδαμε προηγουμένως ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι το σύνολο $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε όμως γνωρίζουμε ότι η ορίζουσα του πίνακα με στήλες τα

$$\mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_0^T, \dots, \mathbf{x}_n^T - \mathbf{x}_0^T,$$

είναι διαφορετική του 0. Με αντιθετοαντιστροφή προκύπτει ότι ένα σύνολο $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ $(n+1)$ στοιχείων του $\mathbb{R}^n$ είναι αφφινικά εξαρτημένο αν και μόνο αν το σύνολο $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, ισοδύναμα η παραπάνω ορίζουσα μηδενίζεται. Θα μας φανεί χρήσιμο αντί για την παραπάνω $n \times n$ ορίζουσα να θεωρούμε την $(n+1) \times (n+1)$ ορίζουσα

$$D(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1^T - \mathbf{x}_0^T & \dots & \mathbf{x}_n^T - \mathbf{x}_0^T & \mathbf{x}_0^T \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1^T & \dots & \mathbf{x}_n^T & \mathbf{x}_0^T \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Το σύνολο

$$B = \{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$$

είναι βάση του αφφινικού χώρου $\mathbb{R}^n$ την οποία και θα καλούμε *εφεξής κανονική βάση*.

Παράδειγμα 6.1.5. Θα δείξουμε ότι τα σημεία

$$\mathbf{x}_0 = (1, 1), \quad \mathbf{x}_1 = (2, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 2),$$

αποτελούν βάση του αφφινικού χώρου $\mathbb{R}^2$ ενώ αυτό δεν ισχύει για τα σημεία

$$\mathbf{y}_0 = (-1, 3), \quad \mathbf{y}_1 = (0, 5), \quad \mathbf{y}_2 = (1, 7).$$

Πράγματι,

$$D(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ενώ,

$$D(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ας εξετάσουμε τη γεωμετρική σημασία του γεγονότος αυτού. Τα $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_0$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$ ώστε

$$\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_0 = \lambda(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0) \iff \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_0 + \lambda(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0).$$

Με άλλα λόγια, το $\mathbf{y}_2$ ανήκει στην ευθεία που περνά από το $\mathbf{y}_0$ στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_0$. Αυτό όμως είναι ισοδύναμο με το ότι τα $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ είναι συνευθειακά.

Έστω $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ αφφινική βάση του n -διάστατου αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V . Επειδή το σύνολο $\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0\}$ είναι βάση του V , για δοθέν $x \in A$ υπάρχουν $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, όχι όλοι 0, τέτοιοι ώστε

$$x - x_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_0).$$

Έπεται ότι

$$x = \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i\right) x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Θέτουμε $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$ και παίρνουμε την παρακάτω πρόταση που ορίζει τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες σε αφφινικό χώρο.

Πρόταση 6.1.6. *Εάν $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ είναι αφφινική βάση του n -διάστατου αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V , τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχουν $\lambda_i, i = 0, \dots, n$, ώστε*

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1.$$

Οι αριθμοί $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ της Πρότασης 5.1.6 λέγονται *βαρυκεντρικές συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη βάση $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ με βαρύκεντρο x* .

Παράδειγμα 6.1.7. Στον αφφινικό χώρο $\mathbb{R}^n$ με την κανονική βάση $\{\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες ενός τυχαίου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι

$$(x_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i, x_1, \dots, x_n).$$

Πράγματι,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i = (1 - \sum_{i=1}^n x_i) \mathbf{0} + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

Γενικότερα, αν $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, $\mathbf{x}_i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ είναι αφφινική βάση του $\mathbb{R}^n$, οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ τυχόντος $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ προκύπτουν ως η μοναδική λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} x_1^0 \lambda_0 + x_1^1 \lambda_1 + \dots + x_1^n \lambda_n &= x_1 \\ x_2^0 \lambda_0 + x_2^1 \lambda_1 + \dots + x_2^n \lambda_n &= x_2 \\ &\vdots \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n &= 1. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Η μοναδικότητα της λύσης έπεται από το ότι το σύνολο $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ είναι αφφινική βάση, διότι τότε η ορίσουςα $D = D(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ του συστήματος (??) είναι διαφορετική του 0. Στην πράξη, το $(n+1) \times (n+1)$ σύστημα (??) δεν είναι εύκολα χειρίσιμο για μεγάλα n και πολλές φορές οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες προκύπτουν ευκολότερα με απευθείας υπολογισμούς, όπως θα δούμε στι παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 6.1.8. Το σύνολο

$$B = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\} = \{(0, 1, 0), (1, 1, 2), (-1, 0, 1), (2, 1, 1)\}$$

αποτελεί αφφινική βάση του $\mathbb{R}^3$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \end{aligned}$$

Αντί τώρα να λύσουμε το σύστημα (??) παρατηρούμε ότι αφού τα διανύσματα

$$(1, 0, 2), \quad (-1, -1, 1), \quad (2, 0, 1)$$

αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ώστε

$$(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(-1, -1, 1) + \lambda_3(2, 0, 1),$$

και έχουμε το 3×3 σύστημα

$$\begin{aligned}\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 &= x_1, \\ -2\lambda_2 &= x_2, \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= x_3.\end{aligned}$$

Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -(1/3)x_1 + (1/2)x_2 + (2/3)x_3, \\ \lambda_2 &= -(1/2)x_2, \\ \lambda_3 &= (2/3)x_1 - (1/2)x_2 - (1/3)x_3,\end{aligned}$$

και

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 1 - (1/3)x_1 + (1/2)x_2 - x_3.$$

6.1.2 Ασκήσεις

1. Δικαιολογήστε αναλυτικά την ισχύ των ιδιοτήτων 1)–4) που απορρέουν από τον Ορισμό 5.1.1 του αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V .
2. Ως συνέχεια της προηγούμενης άσκησης, δείξτε την ισοδυναμία των ιδιοτήτων 3) και 3').
3. Δείξτε την ισοδυναμία των Ορισμών 5.1.1 και 5.1.2.
4. Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα αποτελούν αφφινικές βάσεις του αντίστοιχου αφφινικού χώρου $\mathbb{R}^n$:
 - (α') $\{1, 2\}$ στον $\mathbb{R}$.
 - (β') $\{(-1, 0), (2, 2), (3, 5)\}$ στον $\mathbb{R}^2$.
 - (γ') $\{(1, 0, 1), (2, 0, 7), (-3, 0, 12)\}$ στον $\mathbb{R}^3$.
5. Βρείτε όλα τα $a \in \mathbb{R}$ για τα οποία το σύνολο

$$B(a) = \{(1, 2), (2, 4), (3, a)\}$$

αποτελεί αφφινική βάση του $\mathbb{R}^2$. Κατόπιν, βρείτε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες που αντιστοιχούν στη βάση αυτή.

6. Αφού επιβεβαιώσετε ότι το σύνολο

$$B = \{(0, 1, 2), (-1, 1, 1), (-2, 1, 1), (1 - 2, 1)\}$$

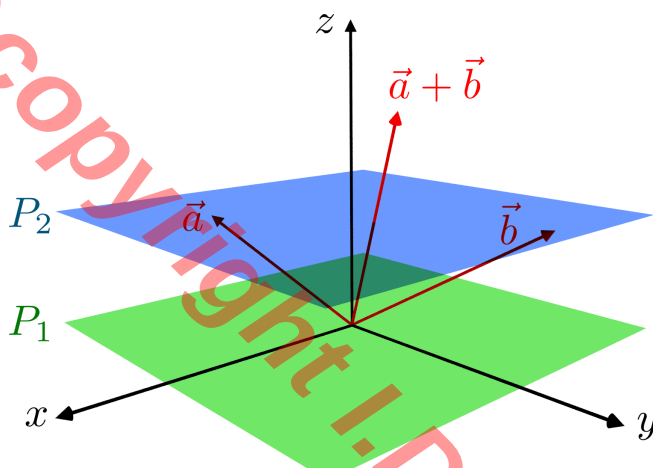
αποτελεί βάση του αφφινικού χώρου $\mathbb{R}^3$, βρείτε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες ως προς τη βάση αυτή.

7. Έστω $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, ευθεία του $\mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι είναι μονοδιάστατος αφφινικός χώρος με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο τον $V = \langle \mathbf{v} \rangle$, δείξτε ότι το σύνολο $\{\mathbf{a}, \mathbf{v}\}$ είναι μία αφφινική του βάση και προσδιορίστε τις βαρυκεντρικές συνταταγμένες ως προς τη βάση αυτή. (Υπόδειξη. Δείξτε ότι η δεξιά δράση του V

$$(\mathbf{c}(t), s\mathbf{v}) \mapsto \mathbf{c}(t) + s\mathbf{v}$$

είναι μεταβατική και ελεύθερη.)

6.1.3 Αφφινικοί υπόχωροι



Ορισμός 6.1.9. Ένας αφφινικός υπόχωρος B ενός αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V είναι ένα υποσύνολο του A τέτοιο ώστε για δοθέν σημείο $a \in B$, το σύνολο των διανυσμάτων

$$W = \{b - a \mid b \in B\},$$

είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Η ιδιότητα αυτή, που είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου a : αν $a' \in B$, $a' \neq a$, τότε

$$b - a' = (b - a) + (a - a') \in W,$$

αφού $b - a \in W$, $a - a' \in W$ και ο W είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Συνεπάγεται ότι ο B είναι ένας αφφινικός χώρος, με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο W . Η διάσταση του B είναι ίση με τη διάσταση του W . Οι αφφινικοί υπόχωροι του A είναι τα υποσύνολα του A της μορφής:

$$a + W = \{a + w : w \in W\},$$

όπου a είναι σημείο του A , και W είναι υπόχωρος του V . Ο διανυσματικός υπόχωρος W καλείται και κατεύθυνση του αφφινικού υπόχωρου B . Δύο αφφινικοί υπόχωροι με την ίδια κατεύθυνση καλούνται παράλληλοι. Εάν δοξεί κατεύθυνση W και σημείο $a \in A$, τότε ο μοναδικός αφφινικός υπόχωρος που περνά από το a στην κατεύθυνση του W είναι ο $a + W$. Προκύπτει αμέσως η παρακάτω:

Πρόταση 6.1.10. Κάθε μεταφορά $A \rightarrow A : a \mapsto a + v$ απεικονίζει κάθε αφφινικό υπόχωρο σε παράλληλό του υπόχωρο.

Παράδειγμα 6.1.11. Οι αφφινικοί k -διάστατοι υπόχωροι του αφφινικού χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι τα γνωστά μας k -επίπεδα

$$W_k = \mathbf{a} + V_k, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \quad V_k = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle,$$

με τον V_k να είναι k -διάστατος διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Από την Πρόταση 5.1.8 προκύπτει ότι για κάθε $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{w} \in W_k$.

$$\mathbf{w} + \mathbf{v} \in (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + V_k$$

που είναι υπόχωρος παράλληλος με τον W_k . Αν $\mathbf{v} \in V_k$ τότε $(\mathbf{a} + \mathbf{v}) + V_k = W_k$.

Εάν $a + W$ είναι k -διάστατος αφφινικός υπόχωρος του $W = \langle w_1, \dots, w_k \rangle$, τότε το σύνολο $a, w_1 + a, \dots, w_k + a$ είναι αφφινική βάση του $a + W$.

Παράδειγμα 6.1.12. Έστω στον $\mathbb{R}^3$ η παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 2) + \mu(0, 2, 3), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Τα διανύσματα $(1, -1, 2)$ και $(0, 2, 3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα:

$$\lambda_1(1, -1, 2) + \lambda_2(0, 2, 3) = (0, 0, 0) \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

Επομένως η παραμετρική αυτή εξίσωση παριστάνει διδιάστατο αφφινικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^3$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\lambda, \mu) &= (2, 1, 0) + \lambda(3, 0, 2) - \lambda(2, 1, 0) + \mu(2, 3, 3) - \mu(2, 1, 0) \\ &= (1 - \lambda - \mu)(2, 1, 0) + \lambda(3, 0, 2) + \mu(2, 3, 3), \end{aligned}$$

και βρίσκουμε την αφφινική βάση

$$\{(2, 1, 0), (3, 0, 2), (2, 3, 3)\}.$$

Ταυτόχρονα βρήκαμε ότι και οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες του τυχόντος $\mathbf{x}(\lambda, \mu)$ ως προς τη βάση αυτή είναι οι

$$(1 - \lambda - \mu, \lambda, \mu).$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί, δείχνουμε πως μπορούμε να συμπληρώσουμε μία αφφινική βάση του $\mathbb{R}^3$ από αφφινική βάση αφφινικού υποχώρου του.

Παράδειγμα 6.1.13. Έστω στον $\mathbb{R}^3$ το επίπεδο

$$P : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1.$$

Εάν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, η εξίσωση του P γράφεται και ως $(1, -2, 3) \cdot \mathbf{x} = 1$. Θέτουμε

$$x_1 = \lambda, \quad x_2 = \mu, \quad x_3 = 1 - \lambda + 2\mu,$$

άρα το P είναι το σύνολο των σημείων της μορφής

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (\lambda, \mu, 1 - \lambda + 2\mu) \\ &= (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, -1) + \mu(0, 1, 2) \\ &= (1, 0, 0) + \langle (1, 0, -1), (0, 1, 2) \rangle.\end{aligned}$$

Συνεπώς, μία αφφινική βάση για το P είναι η

$$B_P = \{(1, 0, 0), (2, 0, -1), (1, 1, 2)\}.$$

Αν $V = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 2) \rangle$, βρίσκουμε τον $V^\perp$: αναζητούμε (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ώστε

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_3 &= 0, \\ \xi_2 + 2\xi_3 &= 0.\end{aligned}$$

Επομένως, $V^\perp = \langle (1, -2, 1) \rangle$. Έπεται ότι η αφφινική βάση του $\mathbb{R}^3$ που προκύπτει συμπληρώνοντας την αφφινική βάση του P είναι η

$$B = B_P \cup \{(2, -2, 1)\} = \{(1, 0, 0), (2, 0, -1), (1, 1, 2), (2, -2, 1)\}.$$

Τέλος, εάν

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \quad \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1,$$

είναι οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες για το P ως προς τη βάση B_P , τότε οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες για το $\mathbb{R}^3$ ως προς τη βάση B είναι οι

$$\lambda'_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \quad \lambda'_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1.$$

Είναι $\lambda'_0 = \lambda_0 - \lambda_3$, άρα ξαναγράφουμε τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες του $\mathbb{R}^3$

$$\lambda_0 - \lambda_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

και ως προς αυτές τις συντεταγμένες η εξίσωση του P είναι $\lambda_3 = 0$.

6.1.4 Αφφινικές απεικονίσεις

Ορισμός 6.1.14. Έστω δύο αφφινικοί χώροι A και B των οποίων οι προσαρτημένοι διανυσματικοί χώροι είναι οι V και W , αντίστοιχα. Μία αφφινική απεικόνιση από τον A στον B είναι μία απεικόνιση $f : A \rightarrow B$ τέτοια ώστε η απεικόνιση $g : V \rightarrow W$, $g(b-a) = f(b) - f(a)$ είναι καλώς ορισμένη γραμμική απεικόνιση.

Ας παρατηρήσουμε ότι η g είναι καλώς ορισμένη αν

$$b-a = d-c \implies f(b)-f(a) = f(d)-f(c).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι για σημείο $a \in A$ και διάνυσμα $v \in V$, έχουμε

$$f(a+v) = f(a) + g(v).$$

Συνεπώς, εφόσον για κάθε δοθέν $b \in A$ είναι $b = a + v$ για μοναδικό v , η f καθορίζεται πλήρως από την τιμή της σε ένα σημείο και την προσαρτημένη γραμμική απεικόνιση g . Οι αφφινικές απεικονίσεις έχουν τη εξής σημαντική ιδιότητα.

Πρόταση 6.1.15. *Η παράλληλία είναι αφφινική αναλλοίωτος.*

Απόδειξη. Έστω $a + W, a' + W$ παράλληλοι υπόχωροι αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V και f αφφινική απεικόνιση $f : A \rightarrow B$,

$$f(x) = g(x) + b, \quad x \in A,$$

όπου g γραμμική απεικόνιση του V και $b \in B$. Εάν

$$a + w \in a + W \implies f(a + w) = f(a) + g(w) \in f(a) + g(W).$$

Ομοίως, εάν

$$a' + w \in a' + W \implies f(a' + w) = f(a') + g(w) \in f(a') + g(W)$$

και προκύπτει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα 6.1.16. Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες

$$l_1 : x_1 + 3x_2 = 1,$$

$$l_2 : x_1 + 3x_2 = 2$$

και τον αφφινικό μετασχηματισμό

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - 1, x_1 + x_2 - 2).$$

Παρατηρήστε ότι

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2) + (-1, -2) = g(x_1, x_2) + (-1, -2)$$

και ο πίνακας του γραμμικού μετασχηματισμού g είναι ο

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R}),$$

άρα όντως ο f είναι αφφινικός. Ένας τρόπος να βρούμε τις εικόνες $f(l_1), f(l_2)$ είναι ο εξής. Θέτουμε

$$y_1 = x_1 - 1, \quad y_2 = x_1 + x_2 - 1,$$

οπότε,

$$x_1 = y_1 + 1, \quad x_2 = y_2 - y_1.$$

Συνεπώς:

$$f(l_1) : y_1 + 1 + 3(y_2 - y_1) = 1 \iff -2y_1 + 3y_2 = 0,$$

$$f(l_2) : y_1 + 1 + 3(y_2 - y_1) = 2 \iff -2y_1 + 3y_2 = 1$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι οι εικόνες είναι παράλληλες ευθείες. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε τις l_1, l_2 σε παραμετρική μορφή:

$$\mathbf{c}_1(t) = (1, 0) + t(-3, 1),$$

$$\mathbf{c}_2(t) = (2, 0) + t(-3, 1).$$

Τότε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1(t)) &= f(1 - 3t, t) = (-3t, -1 - 2t) = (0, -1) + t(-3, -2), \\ f(\mathbf{c}_2(t)) &= f(2 - 3t, t) = (1 - 3t, -2t) = (1, 0) + t(-3, -2), \end{aligned}$$

και παίρνουμε ότι $f(l_1) \parallel f(l_2)$.

Παράδειγμα 6.1.17. Η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 1, x_2 + x_3, x_1 + x_3 - 1)$$

είναι αφφινική: εάν $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$, τότε

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3) + (1, 0, -1) = g(x_1, x_2, x_3) + f(0, 0, 0).$$

Επίσης, η g είναι γραμμική απεικόνιση του $\mathbb{R}^3$ με πίνακα

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R})$$

εφ' όσον $\det(G) = 2$.

Παράδειγμα 6.1.18. Έστω το επίπεδο

$$P : 2x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

Μία παραμετρική εξίσωση του P είναι η

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = (\lambda, \mu, 1 - 2\lambda + \mu) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 0, -2) + \mu(0, 1, 1). \quad (6.2)$$

Οπότε, για την f του προηγούμενου παραδείγματος έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) &= f(1, 0, 0) + \lambda f(1, 0, -2) + \mu f(0, 1, 1) \\ &= (2, 0, 0) + \lambda(2, -2, -2) + \mu(2, 2, 0). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Δηλαδή, $f(\mathbf{x}(\lambda, \mu)) = (2 + 2\lambda + 2\mu, -2\lambda + 2\mu, -3\lambda)$ και απαλείφοντας τα λ, μ προκύπτει η εξίσωση

$$P' : x_1 - x_2 + 2x_3 = 2.$$

Το $P' = f(P)$ και θέλουμε τώρα να γράψουμε την f σαν απεικόνιση των αφφινικών χώρων $P \rightarrow P'$. Ένας τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι ο εξής. Από τις παραμετρικές εξισώσεις (5.1) και (ex-aff-p1) των P και P' , αντίστοιχα, παίρνουμε τις αφφινικές βάσεις

$$\begin{aligned} B_P &= \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \{(1, 0, 0), (2, 0, -2), (1, 1, 1)\}, \\ B_{P'} &= \{\mathbf{x}'_0, \mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2\} = \{(2, 0, 0), (4, -2, -2), (4, 2, 0)\}. \end{aligned}$$

Η $f : P \rightarrow P'$ είναι η απεικόνιση που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}'_i, i = 0, 1, 2$.

6.2 Η αφφινική ομάδα $A(n)$

Η παρακάτω πρόταση είναι εμφανής από τον ορισμό της αφφινικής απεικόνισης-παράλληλα αποτελεί τον ορισμό της αφφινικής ομάδας αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V . Λέγοντας *αφφινική αυτοαπεικόνιση του A* εννοούμε μία 1-1 και επί αφφινική απεικόνιση του A στον εαυτό του: ο προσαρτημένος γραμμικός μετασχηματισμός είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Πρόταση 6.2.1. Το σύνολο $\text{Aff}(A)$ των αφφινικών αυτοαπεικονίσεων αφφινικού χώρου A με προσαρτημένο διανυσματικό χώρο V υπεράνω ενός σώματος K αποτελεί ομάδα ισόμορφη με την $V \rtimes \text{GL}(V, K)$.

Για τον αφφινικό χώρο $\mathbb{R}^n$, η αφφινική ομάδα $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$ θα συμβολίζεται στο εξής με $A(n)$. Εξ ορισμού, κάθε στοιχείο $f \in A(n)$, δηλαδή, κάθε αφφινική απεικόνιση $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, γράφεται ως

$$f(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.4)$$

όπου α είναι ισομορφισμός (δηλαδή, αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση) του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^n$ με πίνακα $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Είναι φανερό, ότι η αντίστροφη της αφφινικής απεικόνισης f όπως στην (5.3) δίνεται από τον τύπο

$$f^{-1}(\mathbf{x}) = \alpha^{-1}(\mathbf{x}) - \alpha^{-1}(\mathbf{b}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (6.5)$$

Μπορούμε τώρα απευθείας να δείξουμε ότι η απεικόνιση $A(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$(f, \mathbf{x}) \mapsto \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

παριστάνει την αριστερή δράση της $A(n)$ στον $\mathbb{R}^n$. Επειδή $S(n) < A(n)$, η δράση αυτή είναι διπλά μεταβατική. Επίσης, ο σταθεροποιητής του $\mathbf{0}$

$$\text{Stab}(\mathbf{0}) = \{f \in A(n) \mid f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}\} \simeq \text{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ είναι η μεταφορά του $\mathbf{0}$ κατά $\mathbf{x}$, επομένως

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \implies f(T_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})) = T_{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \implies (T_{-\mathbf{x}} \circ f \circ T_{\mathbf{x}})(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

και ο σταθεροποιητής κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι ισομορφικός με τη γενική γραμμική ομάδα.

Παράδειγμα 6.2.2. Στον $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε την $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2 + 1, x_1 + 2x_2 - 1).$$

Επειδή

$$f(x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2) + (1, -1), \quad \alpha(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + 2x_2),$$

και ο πίνακας της α είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R}),$$

προκύπτει ότι $f \in A(2)$. Για να βρούμε την αντίστροφη, κατ' αρχάς βλέπουμε ότι

$$A^{-1} = (1/5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R}),$$

άρα

$$\alpha^{-1}(x_1, x_2) = (1/5)(2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2).$$

Επιπλέον,

$$\alpha^{-1}(1, -1) = (1/5)(1, -3)$$

και επομένως

$$f^{-1}(x_1, x_2) = (1/5)(2x_1 + x_2 - 1, -x_1 + 2x_2 + 3).$$

Παράδειγμα 6.2.3. Θεωρούμε την αφφινική απεικόνιση του προηγούμενου παραδείγματος και την κανονική αφφινική βάση

$$B = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$$

του $\mathbb{R}^2$. Είναι:

$$f(0, 0) = (1, -1), \quad f(1, 0) = (3, 0), \quad f(0, 1) = (0, 1).$$

Ας παρατηρήσουμε ότι επειδή η f είναι αφφινική, το σύνολο

$$B' = \{(1, -1), (3, 0), (0, 1)\}$$

είναι με τη σειρά του και αυτό αφφινική βάση του $\mathbb{R}^2$. Εάν δε μας ήταν γνωστό μόνο το σύνολο B' και ότι μία αφφινική απεικόνιση ικανοποιούσε τις

$$(0, 0) \mapsto (1, -1), \quad (1, 0) \mapsto (3, 0), \quad (0, 1) \mapsto (0, 1),$$

τότε ο τύπος της γραμμικής αυτής απεικόνισης βρίσκεται από την

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) &= (1 - x_1 - x_2)(0, 0) + x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \\ &\mapsto (1 - x_1 - x_2)(1, -1) + x_1(3, 0) + x_2(0, 1) \\ &= (2x_1 - x_2 + 1, x_1 + 2x_2 - 1), \end{aligned}$$

δηλαδή, παίρνουμε την f από τις τιμές της στα σημεία της κανονικής αφφινικής βάσης B . Αυτό μπορεί να γίνει πάντοτε, δοθέντος του ότι το σύνολο B' είναι αφφινική βάση.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με μία σημαντική παρατήρηση που αναφέρεται στο προηγούμενο παράδειγμα και θα μας χρησιμεύσει αμέσως μετά. Υπάρχει μία εμφύτευση της αφφινικής Ομάδας $A(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ στην $A(n) = \mathbf{GL}(n+1, \mathbb{R})$ που κατασκευάζεται ως εξής. Έστω αφφινικός μετασχηματισμός $f(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ του $\mathbb{R}^n$, με τον α να έχει πίνακα $A \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{R})$ και $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Τότε, ο πίνακας

$$A_f = \begin{pmatrix} A & \mathbf{b}^T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{GL}(n+1, \mathbb{R}). \quad (6.6)$$

Ο πίνακας A_f καθορίζει πλήρως τον αφφινικό μετασχηματισμό f και ονομάζεται *γενικευμένος (ή ενισχυμένος) πίνακας του f* . Ο αντίστροφος του A_f είναι ο

$$(A_f)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}(\mathbf{b}^T) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{f^{-1}}. \quad (6.7)$$

6.2.1 Θεμελιώδες Θεώρημα της Αφφινικής Γεωμετρίας

Είδαμε παραπάνω ότι η δράση της αφφινικής ομάδας είναι διπλά μεταβατική, οπότε ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι εάν και πότε η δράση είναι *τριπλά μεταβατική*. Δηλαδή, δοθέντων διατεταγμένων τριάδων σημείων $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ και $\mathbf{q} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$, ανά δύο διαφορετικών μεταξύ τους, υπάρχει $f \in A(n)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 0, 1, 2$;

Αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω τριάδες είναι αφφινικές ανεξάρτητα σύνολα, δηλαδή τα σύνολα

$$\mathbf{x}_0 + \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle, \quad \mathbf{y}_0 + \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle,$$

είναι και τα δύο 2-διάστατοι αφφινικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$. Με κατάλληλους αφφινικούς μετασχηματισμούς μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι τριάδες μας είναι και οι δύο τριάδες σημείων του $\mathbb{R}^2$ και ότι και οι δύο αποτελούν αφφινικές του βάσεις. Αυτό όμως μας λέει επίσης ότι οι μετασχηματισμοί $h, g \in A(2)$ με προσαρτημένους πίνακες

$$A_h = \begin{pmatrix} x_1^1 - x_1^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_1^0 \\ x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 & x_2^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_g = \begin{pmatrix} y_1^1 - y_1^0 & y_2^1 - y_2^0 & y_1^0 \\ y_2^1 - y_2^0 & y_2^2 - y_2^0 & y_2^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι αφφινικοί και απεικονίζουν ο μὲν h τα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ στα $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και ο δε g τα $\mathbf{0}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ στα $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$. Τώρα, το ότι οι τριάδες αυτές είναι αφφινικά ανεξάρτητες σημαίνει ότι δεν είναι τριάδες συνευθειακών σημείων. Υπενθυμίζουμε στο σημείο αυτό ότι τρία σημεία $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_2^1)$, $\mathbf{x}_2 = (x_1^2, x_2^2)$ είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^1 - x_1^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_1^0 \\ x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 & x_2^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Από τη συζήτηση αυτή προκύπτει το παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό σαν Θεώρημα OXY .

Θεώρημα 6.2.4. Για κάθε τριάδα $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ μη συνευθειακών σημείων του $\mathbb{R}^2$ υπάρχει $h \in A(2)$ τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$h(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0, \quad h(\mathbf{e}_1) = \mathbf{x}_1, \quad h(\mathbf{e}_2) = \mathbf{x}_2. \quad (6.8)$$

Ο γενικευμένος πίνακας του h είναι ο

$$A_h = \begin{pmatrix} x_1^1 - x_1^0 & x_2^1 - x_2^0 & x_1^0 \\ x_2^1 - x_2^0 & x_2^2 - x_2^0 & x_2^0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}). \quad (6.9)$$

Αποδεικνύουμε τώρα το εξής

Λήμμα 6.2.5. Ένας $f \in A(2)$ που σταθεροποιεί τρία μη συνευθειακά σημεία είναι αναγκαστικά ο ταυτοτικός.

Απόδειξη. Μπορούμε κανονικοποιώντας να υποθέσουμε ότι τα τρία σημεία είναι τα $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$ και $\mathbf{x} = (x, y)$, $y \neq 0$. Αν $f(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$, η σχέση $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ συνεπάγεται ότι $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Επίσης,

$$f(\mathbf{x}) = \alpha(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = x\mathbf{e}_1 + y\alpha(\mathbf{e}_2) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2.$$

Άρα $f(\mathbf{e}_2) = \alpha(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$ και κατά συνέπεια ο f είναι ο ταυτοτικός. $\square$

Παράδειγμα 6.2.6. Για να βρούμε μετασχηματισμό $f(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ που απεικονίζει τα $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ στα $(1, 1)$, $(1, -2)$, $(2, 1)$, αντίστοιχα, θεωρούμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Από το Θεώρημα 5.2.2, ο $f \in A(2)$ που ζητείται έχει γενικευμένο πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

δηλαδή, δίνεται επίσης από την

$$f(x_1, x_2) = (x_2 + 1, -3x_1 + 1).$$

Θεώρημα 6.2.7. (Θεμελιώδες Θεώρημα της Αφφινικής Επιπεδομετρίας) Δοθέντων διατεταγμένων τριάδων μη συνευθειακών σημείων $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ και $\mathbf{q} = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$, δηλαδή αφφινικών βάσεων

$$\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}, \quad \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$$

του $\mathbb{R}^2$, υπάρχει μοναδικός $f \in A(2)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 0, 1, 2$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.2, εντοπίζουμε τους $h, g \in A(2)$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\begin{aligned} h(\mathbf{0}) &= \mathbf{x}_0, & h(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{x}_1, & h(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{x}_2, \\ g(\mathbf{0}) &= \mathbf{y}_0, & g(\mathbf{e}_1) &= \mathbf{y}_1, & g(\mathbf{e}_2) &= \mathbf{y}_2. \end{aligned}$$

Τότε ο $f = g \circ h^{-1}$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος. Είναι δε και μοναδικός, διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει άλλος $f' \in A(2)$ τέτοιος ώστε $f'(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, τότε ο $f' \circ f^{-1}$ σταθεροποιεί τρία μη συνευθειακά σημεία και άρα από το Λήμμα 5.2.3 δεν μπορεί παρά να είναι ο ταυτοτικός. $\square$

Παράδειγμα 6.2.8. Για να βρούμε τον αφφινικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τα

$$\mathbf{x}_0 = (1, 2), \quad \mathbf{x}_1 = (2, -1), \quad \mathbf{x}_2 = (3, 0),$$

στα

$$\mathbf{y}_0 = (0, 2), \quad \mathbf{y}_1 = (1, -4), \quad \mathbf{y}_2 = (-1, 1),$$

αντίστοιχα, ακολουθούμε τα βήματα της διαδικασίας της απόδειξης του Θεωρήματος ??.

1. Εντοπίζουμε τους μετασχηματισμούς h, g θεωρώντας τους αντίστοιχους γενικευμένους πίνακες όπως στο Θεώρημα 5.2.2:

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

και επιβεβαιώνουμε ότι και οι δύο είναι στοιχεία της $GL(3, \mathbb{R})$. Πράγματι,

$$\det(A_h) = 4, \quad \det(A_g) = -7.$$

2. Βρίσκουμε τον $A_{h^{-1}}$ σε δύο βήματα. Κατ' αρχάς,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = (1/4) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οπότε,

$$-(1/4) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -5/4 \end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$A_{h^{-1}} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 3/4 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Υπολογίζουμε το γινόμενο πινάκων

$$\begin{aligned} A_g \cdot A_{h^{-1}} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 3/4 & 1/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5/4 & -3/4 & 11/4 \\ 9/4 & 11/4 & -23/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_f. \end{aligned}$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$f(x_1, x_2) = (1/4)(-5x_1 - 3x_2 + 11, 9x_1 + 11x_2 - 23).$$

Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αφφινικής Επιπεδομετρίας ουσιαστικά μας λέει ότι ένας αφφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ καθορίζεται πλήρως από τρία αφφινικά ανεξάρτητα σημεία και τις τις εικόνες τους. Το θεώρημα γενικεύεται στις n διαστάσεις με τον προφανή τρόπο.

Θεώρημα 6.2.9. Δοθέντων δύο αφφινικών βάσεων $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ και $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μοναδικός $f \in A(n)$ με $f(\mathbf{x}_i) = b\mathbf{y}_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Η απόδειξη είναι ακριβώς στις γραμμές της απόδειξης του Θεωρήματος ?? και αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 6.2.10. Για να βρούμε τον $f \in A(3)$ που απεικονίζει τα

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1)$$

στα

$$\mathbf{y}_0 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{y}_1 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{y}_2 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{y}_3 = (1, -1, 1),$$

αντίστοιχα, δείχνουμε πρώτα ότι τα $\mathbf{y}_i, i = 0, 1, 2, 3$ είναι αφφινικά ανεξάρτητα-στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτό θα μας δώσει και τον ζητούμενο αφφινικό μετασχηματισμό. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2 + 1, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 1).$$

6.2.2 Παράλληλες προβολές

Έστω $P = W_{\mathbf{A}, b}$ ένα n -επίπεδο του $\mathbb{R}^{n+1}$ που ορίζεται από την εξίσωση $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = b, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Εάν $\mathbf{v}$ είναι μία κατεύθυνση που δεν είναι ορθογώνια στο $\mathbf{A}$, η παράλληλη προβολή $\text{pr}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ του $\mathbf{x}$ στο P στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$ δίνεται από τον τύπο

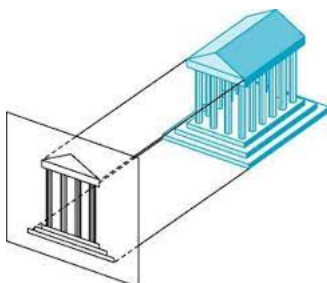
$$\text{pr}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{b - \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (6.10)$$

Η $\text{pr}_{\mathbf{A}}$ είναι αφφινική επί απεικόνιση $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P$, με αντίστοιχη γραμμική απεικόνιση την

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Με απευθείας πράξεις μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) $\text{pr}_{\mathbf{A}} \circ \text{pr}_{\mathbf{A}} = \text{pr}_{\mathbf{A}}$,
- 2) $\text{pr}_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ για κάθε $\mathbf{x} \in P$.



Επίσης, μία σημαντική ιδιότητα της παράλληλης προβολής αποδεικνύεται στην παρακάτω πρόταση.

Η παράλληλη προβολή διατηρεί την παραλληλία ευθειών.

Πρόταση 6.2.11. Η παράλληλη προβολή $\text{pr}_A(\mathbf{x})$ όπως στην (??) απεικονίζει παράλληλες ευθείες του $\mathbb{R}^{n+1}$ (με κατεύθυνση διαφορετική του $\mathbf{v}$) σε παράλληλες ευθείες του P .

Απόδειξη. Έστω ευθεία $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{w}$, $t \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\text{pr}_A(\mathbf{c}(t)) &= \mathbf{c}(t) + \frac{b - \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{a} + t\mathbf{w} + \frac{b - (\mathbf{a} + t\mathbf{w}) \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{a} + \frac{b - \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} + t \left(\mathbf{w} - \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η κατεύθυνση της προβολής της ευθείας εξαρτάται μόνο από την κατεύθυνση της ίδιας της ευθείας, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο. Ας παρατηρήσουμε επίσης πως όταν $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ τότε η παράλληλη προβολή της ευθείας είναι σημείο του P . $\square$

Αν P' είναι ένα άλλο n -επίπεδο που δίνεται από την εξίσωση $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = b'$, ο περιορισμός της pr_A στο P' ορίζει και αυτός με τη σειρά του μία αφφινική επί απεικόνιση $P' \rightarrow P$.

Πρόταση 6.2.12. Έστω P και P' επίπεδα με εξισώσεις $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = b$ και $\mathbf{A}' \cdot \mathbf{x} = b'$, αντίστοιχα. Έστω επίσης $\mathbf{v}$ διάνυσμα που δεν είναι ορθογώνιο με κανένα από τα $\mathbf{A}, \mathbf{A}'$. Συμβολίζουμε με p τον περιορισμό της pr_A στο P' και με p' τον περιορισμό της $\text{pr}_{A'}$ στο P . Τότε οι p, p' είναι αφφινικές απεικονίσεις και

$$p \circ p' = \text{id}_P, \quad p' \circ p = \text{id}_{P'}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την αριστερή σχέση. Για $\mathbf{x} \in P$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = b$ έχουμε:

$$\begin{aligned}p(p'(\mathbf{x})) &= p'(\mathbf{x}) + \frac{b - p'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{x} + \frac{b' - \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}'}{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} + \frac{b - (\mathbf{x} + \frac{b' - \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}'}{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{A}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{x} + \frac{b' - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} + \frac{b - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} - \frac{b' - \mathbf{A}' \cdot \mathbf{x}}{\mathbf{A}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{x}.\end{aligned}$$

$\square$

Πρόταση 6.2.13. Έστω $\mathbf{v}$, P και P' όπως προηγουμένως και $p : P' \rightarrow P$ η παράλληλη προβολή του P' στο P . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.

1. Εάν $P' \parallel P$ τότε η p διατηρεί τα Ευκλείδεια μήκη.
2. Εάν το P' δεν είναι παράλληλο με το P , τότε η p διατηρεί τα μήκη σε τουλάχιστον έναν $(n-2)$ -διάστατο αφφινικό υπόχωρο του P' .

Απόδειξη. Έστω πρώτα ότι το P' είναι παράλληλο με το P . Εάν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in P'$, τότε $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = b'$,

$$\|p(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \frac{(b - b')^2}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})^2} \|\mathbf{v}\|^2 + 2 \frac{b - b'}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}),$$

$$\|p(\mathbf{y})\|^2 = \|\mathbf{y}\|^2 + \frac{(b - b')^2}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})^2} \|\mathbf{v}\|^2 + 2 \frac{b - b'}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} (\mathbf{y} \cdot \mathbf{v})$$

και

$$p(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \frac{b - b'}{\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}} ((\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}) + \frac{(b - b')^2}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})^2} \|\mathbf{v}\|^2.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} \|p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y})\|^2 &= \|p(\mathbf{x})\|^2 + \|p(\mathbf{y})\|^2 - 2p(\mathbf{x}) \cdot p(\mathbf{y}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &= \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \end{aligned}$$

Εάν το P' δεν είναι παράλληλο με το P , η τομή τους $P \cap P'$ είναι αφφινικός υπόχωρος του P' (και του P). Τα σημεία της τομής είναι σταθερά σημεία της p , επομένως τα Ευκλείδεια μήκη διατηρούνται. $\square$

Μία παράλληλη προβολή $p : P' \rightarrow P$ όπως προηγουμένως, μπορεί να θεωρηθεί ως στοιχείο της $A(n)$ εφόσον αμφότερα τα P, P' είναι αφφινικά ισομορφα με το $\mathbb{R}^n$. Γεννάται το ερώτημα αν κάθε αφφινική απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ είναι παράλληλη προβολή. Η απάντηση είναι εν γένει αρνητική και αυτό διότι οποιαδήποτε συστολή/διαστολή D_δ πολλαπλασιάζει το μήκος κάθε διαστήματος με τον παράγοντα δ . Παρ' όλα αυτά έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.14. (Θεώρημα των παράλληλων προβολών.) Η αφφινική ομάδα $A(n)$ γεννάται από παράλληλες προβολές.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα ?? το οποίο μας εξασφαλίζει ότι ένα στοιχείο $f \in A(n)$ ορίζεται με μοναδικό τρόπο από τις τιμές των στοιχείων μίας αφφινικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Έστω λοιπόν $f \in A(n)$, $B = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ αφφινική βάση του $\mathbb{R}^n$ και έστω

$$f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Θα ορίσουμε n παράλληλες προβολές που έχουν την ίδια επίδραση στα στοιχεία της B . Θεωρούμε $n+1$ αφφινικά αντίγραφα $P_0, P_1, \dots, P_n$ του $\mathbb{R}^n$ στον R^{n+1} (δηλαδή, n -επίπεδα του R^{n+1}). Στο P_0 σημειώνουμε τα σημεία $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, και στα υπόλοιπα επίπεδα σημειώνουμε τα σημεία $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Τα σημεία $\mathbf{y}_i, i = 0, 1, \dots, n$, τοποθετούνται έτσι ώστε $\square$

We begin by taking 3 copies Π, Π' and Π'' of the plane. On Π , we mark the points A, B and C. On Π' and Π'' , we mark the points A', B' and C'.

First, we place Π and Π'' so that the point A on Π coincides with A' on Π'' . By rotating the planes about this point, we can ensure that neither B nor B' lies on the line of intersection. Then $u = BB'$ is not parallel to either plane, so we can define the parallel projection p from Π to Π'' along u . This maps A to A', and B to B'. Suppose that it maps C to C''. Since A, B, C are not collinear, their images A', B', C'' are not collinear.

Now place Π'' and Π' so that the points A' , B' coincide. As neither C'' nor C''' is collinear with these, they do not lie on the line of intersection. Thus $v = C'C'''$ is not parallel to either plane, so we can define the parallel projection q from Π'' to Π' along v . This fixes A' and B' , and maps C'' to C' .

Thus $q \circ p$ maps A, B, C to A', B', C' . By Theorem A1, the maps p and q are affine, so the composite is also affine. Since t and $q \circ p$ have the same effect on three points, the Fundamental Theorem shows that they are equal.

6.3 Τρία Ευκλείδεια Θεωρήματα

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε με αφφινικές μεθόδους, και ειδικότερα χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα ??, τρία κλασικά θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αρχίζουμε με μία παρατήρηση που είναι άμεσο πόρισμα του θεωρήματος αυτού.

Πόρισμα 6.3.1. Οποιαδήποτε δύο τρίγωνα του $\mathbb{R}^2$ είναι αφφινικά ισοδύναμα με το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Το δεύτερο εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο απλός λόγος συνευθειακών σημείων.

Πρόταση 6.3.2. Ο απλός λόγος συνευθειακών σημείων είναι αφφινική αναλλοίωτος.

Απόδειξη. Θεωρούμε ευθεία

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

και τριάδα διατεταγμένων σημείων της $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, $\mathbf{x}_i = \mathbf{a} + t_i\mathbf{v}$, $i = 1, 2, 3$, με απλό λόγο

$$\sigma(\mathbf{p}) = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}.$$

Αν $f(\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$ είναι αφφινικός μετασχηματισμός, τότε $f(\mathbf{x}_i) = (\alpha(\mathbf{a}) + \mathbf{b}) + t_i\alpha(\mathbf{v})$ και συνεπώς

$$\sigma(f(\mathbf{p})) = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}.$$

□

Σχόλιο 6.3.3. Αν είναι η αρχή, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{x}_i = \overrightarrow{OX_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

και

$$\sigma(\mathbf{p}) = \frac{\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_1}}{\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_3}} = \frac{\overrightarrow{X_1X_2}}{\overrightarrow{X_3X_2}}.$$

Θεωρούμε τώρα την εξής διαμόρφωση για δύο διατεταγμένες τριάδες ξένων ανά δύο μή συνευθειακών σημείων $(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ και $(\mathbf{q}) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$:

$$\mathbf{y}_1 = (1 - t_1)\mathbf{x}_2 + t_1\mathbf{x}_3, \quad t_1 \neq 0, 1,$$

$$\mathbf{y}_2 = (1 - t_2)\mathbf{x}_3 + t_2\mathbf{x}_1, \quad t_2 \neq 0, 1,$$

$$\mathbf{y}_3 = (1 - t_3)\mathbf{x}_1 + t_3\mathbf{x}_2, \quad t_3 \neq 0, 1.$$

Με άλλα λόγια τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι κορυφές τριγώνου ενώ τα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ είναι σημεία των (προεκτάσεων) των πλευρών του τριγώνου, διαφορετικά από τις κορυφές τους. Θεωρούμε την ποσότητα

$$\Sigma = \sigma(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_3, \mathbf{x}_2) \cdot \sigma(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_3) \cdot \sigma(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}_1) = \frac{t_1 t_2 t_3}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}.$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα ?? προκύπτει ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$\mathbf{x}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (0, 1)$$

και

$$\mathbf{y}_1 = (1-t_1, t_1), \quad \mathbf{y}_2 = (0, 1-t_2), \quad \mathbf{y}_3 = (t_3, 0).$$

Έχουμε δε και πάλι ότι:

$$\Sigma = \frac{t_1 t_2 t_3}{(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}.$$

Πρόταση 6.3.4. Έστω ότι ένα από τα $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$ ανήκει στην προέκταση κάποιας από τις πλευρές του κανονικοποιημένου τριγώνου. Τότε τα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν $\Sigma = -1$.

Απόδειξη. Τα $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ είναι συνευθειακά αν και μόνο αν μηδενίζεται η ορίζουσα

$$D(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = \begin{vmatrix} 1-t_1 & 0 & t_3 \\ t_1 & 1-t_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Όμως,

$$D(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3) = 0 \iff 1 - t_1 - t_2 - t_3 + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 0,$$

και από την άλλη,

$$\Sigma = -1 \iff 1 - t_1 - t_2 - t_3 + t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = 0.$$

□

Η Πρόταση ?? είναι η αλγεβρική διατύπωση του επομένου θεωρήματος που οφείλεται στον Μενέλαο τον Αλεξανδρέα. Στην εκδοχή που παραξέτουμε υπάρχει και το αντίστροφό του.

Θεώρημα 6.3.5. (Θεώρημα Μενελάου και τό αντίστροφό του.) Δοθέντος τριγώνου $\triangle ABC$, και εγκάρσιας ευθείας που τέμνει τις πλευρές BC , AC , και AB στα σημεία D , E και F αντίστοιχα, με τα D , E και F διαφορετικά από τις κορυφές A , B και C , τότε

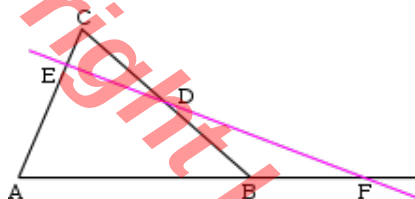
$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = -1.$$

Αντιστρόφως, αν σημεία D , E και F παρθούν επί των πλευρών BC , AC και AB αντίστοιχα, ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση, τότε τα D , E και F είναι συνευθειακά.

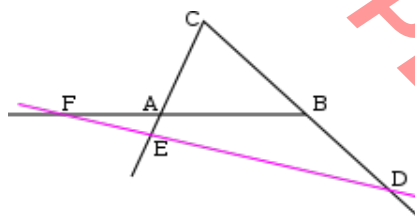


Μενέλαος ο Ἀλεξανδρεὺς, περ. 70-140 μ.Χ.

Βλέπουμε στα επόμενα σχήματα τις δύο περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν στην απόδειξη του θεωρήματος του Μενελάου. Με τη βοήθεια της διαμόρφωσής μας δεν χρειάστηκε να εξετάσουμε χωριστά αυτές τις περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση η εγκάρσια ευθεία τέμνει δύο πλευρές του τριγώνου και την τρίτη στην προέκτασή της.



Στη δεύτερη περίπτωση η εγκάρσια ευθεία δεν τέμνει καμμία πλευρά του τριγώνου (παρά μόνο τις προεκτάσεις τους).



Συνεχίζοντας τώρα με τη διαμόρφωσή μας, θεωρούμε τις ευθείες που συνδέουν τα $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, i = 1, 2, 3$. Η ευθεία από το $\mathbf{x}_1$ στο $\mathbf{y}_1$ είναι η

$$l_1 : t_1 x_1 + (t_1 - 1)x_2 = 0,$$

η ευθεία από το $\mathbf{x}_2$ στο $\mathbf{y}_2$ είναι η

$$l_2 : (t_2 - 1)x_1 - x_2 + 1 - t_2 = 0,$$

και η ευθεία από το $\mathbf{x}_3$ στο $\mathbf{y}_3$ είναι η

$$l_3 : x_1 + t_3 x_2 - t_3 = 0.$$

Πρόταση 6.3.6. Αν οι ευθείες l_1, l_2, l_3 συντρέχουν, τότε $\Sigma = 1$. Αν $\Sigma = 1$, τότε οι l_1, l_2, l_3 είναι είτε ανά δύο παράλληλες ή συντρέχουν.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι αν τρεις (διαφορετικές) ευθείες

$$l_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1 = 0,$$

$$l_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2 = 0,$$

$$l_3 : a_3x_1 + b_3x_2 + c_3 = 0,$$

συντρέχουν (δηλαδή έχουν ένα κοινό σημείο) τότε η ορίζουσα

$$D(l_1, l_2, l_3) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Για τις ευθείες της διαμόρφωσής μας έχουμε:

$$\begin{aligned} D(l_1, l_2, l_3) &= \begin{vmatrix} t_1 & t_1 - 1 & 0 \\ t_2 - 1 & -1 & 1 - t_2 \\ 1 & t_3 & -t_3 \end{vmatrix} \\ &= t_1 \begin{vmatrix} -1 & 1 - t_2 \\ t_3 & -t_3 \end{vmatrix} - (t_1 - 1) \begin{vmatrix} t_2 - 1 & 1 - t_2 \\ 1 & -t_3 \end{vmatrix} \\ &= t_1 t_2 t_3 - (1 - t_1)(1 - t_2)(1 - t_3). \end{aligned}$$

Άρα,

$$D(l_1, l_2, l_3) = 0 \iff \Sigma = 1.$$

Εάν τώρα αντιστρόφως $\Sigma = 1$, τότε $D(l_1, l_2, l_3) = 0$. Στην περίπτωση που μηδενίζονται οι ελάσσονες ορίζουσες

$$D(l_1, l_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad D(l_2, l_3) = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

τότε οι l_1, l_2, l_3 είναι παράλληλες. Αν αυτό δεν συμβαίνει, τότε είναι συντρέχουσες. $\square$

Ας παρατηρήσουμε ότι αν οι ευθείες είναι συντρέχουσες, τότε το σημείο από το οποίο συντρέχουν είναι το κοινό σημείο των l_1 και l_2 , δηλαδή το

$$(c_1, c_2) = \left(\frac{(1 - t_1)(1 - t_2)}{t_1 + (1 - t_1)(1 - t_2)}, \frac{t_1(1 - t_2)}{t_1 + (1 - t_1)(1 - t_2)} \right).$$

Επειδή $t_1, t_2 \neq 0, 1$, το σημείο αυτό δεν κείται σε καμμία από τις κάθετες πλευρές του κανονικοποιημένου τριγώνου. Επειδή δε

$$c_1 + c_2 = \frac{1 - t_2}{1 - t_2 + t_1 t_2},$$

δεν κείται επίσης και στην υποτείνουσα του τριγώνου. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

A. Τα σημεία y_1, y_2, y_3 βρίσκονται όλα επάνω στις πλευρές του τριγώνου (και όχι στις προεκτάσεις τους). Τότε, $c_1, c_2 > 0$, $c_1 + c_2 < 1$ και το (c_1, c_2) ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου.

B. Δύο από τα σημεία y_1, y_2, y_3 βρίσκονται όλα επάνω στις προεκτάσεις των πλευρών του τριγώνου. Με απευθείας υπολογισμό μπορούμε να δείξουμε ότι το βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου.

Τα παρακάτω θεωρήματα είναι άμεσες συνέπειες της Πρότασης ??:

Θεώρημα 6.3.7. Οι διάμεσοι τριγώνου τέμνονται σε σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου.

Απόδειξη. Στη διαμόρφωσή μας, παίρνουμε $t_i = 1/2$, $i = 1, 2, 3$. Τότε $D(l_1, l_2, l_3) = 0$. Το σημείο τομής είναι το κοινό σημείο των l_1, l_2 , δηλαδή το $(1/3, 1/3)$ που ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου. $\square$

Το παρακάτω θεώρημα είναι γνωστό σαν Θεώρημα του Ceva, αλλά είχε αποδειχθεί πολύ νωρίτερα από τον Άραβα βασιλιά της Σαραγόσα Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud τον 11ο αι. μ.Χ.



Giovanni Benedetto Ceva, 1647-1734

Θεώρημα 6.3.8. (Θεώρημα Ceva και αντίστροφό του.) Από κορυφές τριγώνου A, B, C φέρουμε ευθείες AE, BF και CD προς τις αντίστοιχες απέναντι πλευρές. Οι ευθείες αυτές συντρέχουν αν και μόνο αν

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1.$$

Αντιστρόφως, αν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε οι AE, BF και CD είναι παράλληλες ή συντρέχουσες.



Yusuf Al-Mu'taman ibn Hud, ;-1085

@copyright I.D. PLATIS

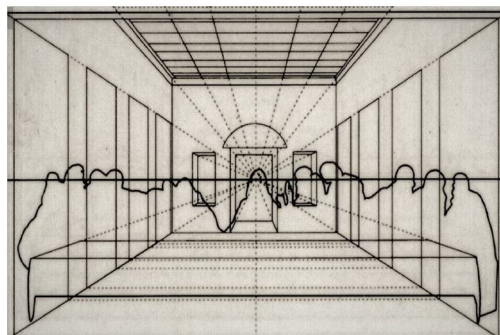
Κεφάλαιο 7

Προβολική Γεωμετρία



G. Desargues (1591–1661).

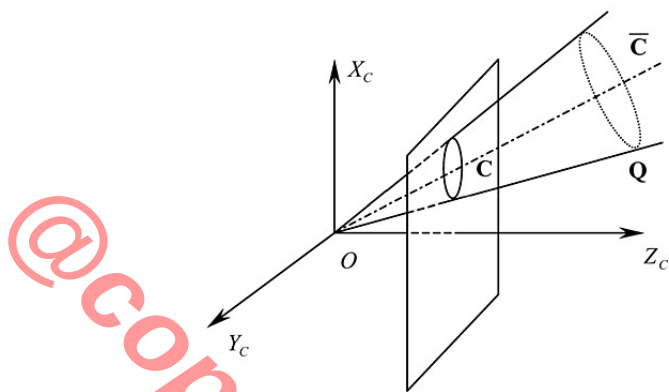
Ήδη από τον 15ο αι. μ.Χ. έγινε κατανοητό ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν επαρκούσε για να μοντελοποιήσει τους μετασχηματισμούς που είχαν σχέση με την προοπτική ενός σχήματος. Η προοπτική εμφανιζόταν κατά κόρον στη ζωγραφική και στην αρχιτεκτονική, με τους ζωγράφους και αρχιτέκτονες της πρώιμης Αναγέννησης, στην Ιταλία αλλά και αλλού, να προσπαθούν με διάφορους τρόπους να τη χειριστούν.



Προοπτικές ευθείες στον Μυστικό Δείπνο του Leonardo da Vinci.

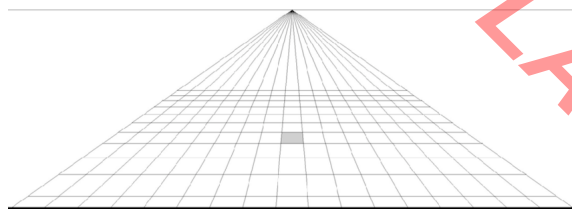
Η μέθοδος της προοπτικής ζωγραφικής αναπτύσσεται τότε, αρχικά στην Ιταλία από τους Brunelleschi και Alberti, ενώ χρησιμοποιήθηκε ευρέως και από τον da Vinci. Ένα ανοικτό ερώτημα της εποχής ήταν ποιές είναι οι κοινές ιδιότητες δύο προοπτικών θέσεων του ιδίου

σχήματος; Κατά τον 17ο αι. ο (αρχιτέκτονας και μηχανικός) Desargues περιέγραψε τις κωνικές ως προοπτικές παραμορφώσεις του κύκλου. Ο Desargues ήταν αυτός που πρώτος συνέλαβε την ιδέα του σημείου στο άπειρο ως την τομή δύο παραλλήλων ευθειών.



Η έλλειψη ως προοπτική παραμόρφωση κύκλου.

Κατά τον 18ο αι. έχουμε την επαναστατική ιδέα των Descartes, Fermat, να περιγράψουν τη Γεωμετρία με αναλυτικό τρόπο, σε αντίθεση με τον συνθετικό των Ελλήνων. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα μία πρωτοφανή έκρηξη νέων γεωμετρικών μεθόδων. Ανάμεσα σε πολλά άλλα, ο Desargues βασιζόμενος σε ιδέες του Pascal, επικεντρώθηκε στις απειροστές προσεγγίσεις μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων. Ο Monge εισήγαγε την Περιγραφική Γεωμετρία και μελέτησε ειδικότερα τη διατήρηση των γωνιών και των μηκών από τις προβολές.



Μήκη και γωνίες δεν διατηρούνται εν γένει από τις προβολές.

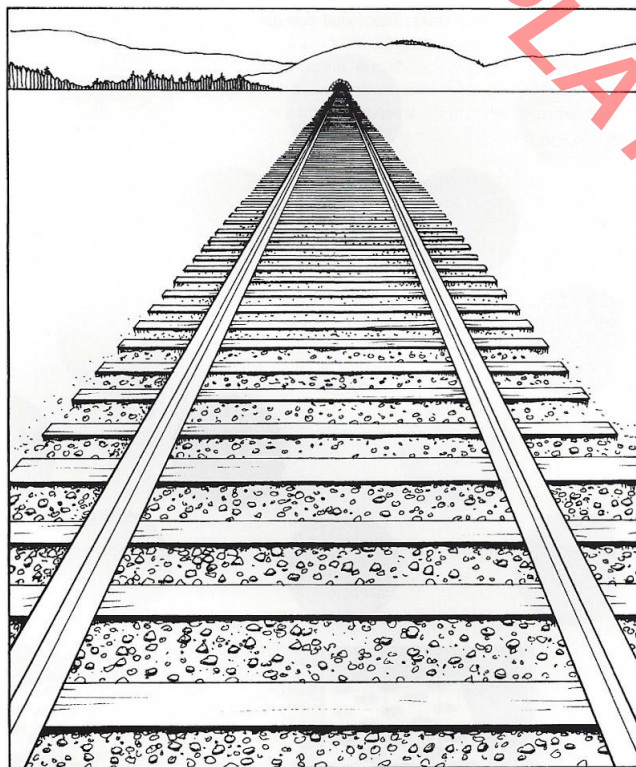
Το 1822, ο Poncelet που ήταν αξιωματικός της στρατιάς του Ναπολέοντα, έγραψε-όντας κλεισμένος σε Ρωσικές φυλακές-διατριβή για τις προβολικές ιδιότητες των σχημάτων και για το αναλλοίωτο των προβολών. Αυτή η διατριβή θεωρείται και ως η πρώτη σε αυτό που σήμερα καλούμε Προβολική Γεωμετρία: μία προβολική ιδιότητα είναι μία ιδιότητα που παραμένει αναλλοίωτη από τις προβολές. Οι Chasles, Möbius μελέτησαν τους πιο γενικούς προβολικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν σημεία σε σημεία και ευθείες σε ευθείες και διατηρούν τον διπλό λόγο.

Κατά το μοντέλο του Klein για τις γεωμετρίες, έχουμε την εξής ιεράρχηση: η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μέρος της Αφφινικής Γεωμετρίας η οποία με τη σειρά της περιέχεται στην Προβολική Γεωμετρία.



J.-V. Poncelet (1788–1867).

Σε γενικές γραμμές μπορούμε επίσης να πούμε ότι η Προβολική Γεωμετρία στέκεται ενδιάμεσα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία που ενδιαφέρεται για μήκη, γωνίες και αποστάσεις, και στην Τοπολογία στην οποία το σχήμα δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η Προβολική Γεωμετρία όπως είπαμε ενδιαφέρεται για ιδιότητες αναλλοίωτες από τις προβολές· έτσι, η ευθεία παραμένει ευθεία, αλλά αποστάσεις, μήκη και γωνίες αλλάζουν. Η παραλληλία επίσης αποκτά διαφορετικό νόημα: δύο ευθείες τέμνονται πάντοτε (φανταστείτε τις γραμμές ενός τρένου-αυτές φαίνεται να τέμνονται στον ορίζοντα).



7.1 Ο Προβολικός Χώρος $\mathbb{R}P^n$

Η Προβολική Γεωμετρία κατά Klein είναι το ζεύγος $(\mathbb{R}P^n, P(n))$, όπου $\mathbb{R}P^n$ είναι ο n -διάστατος προβολικός χώρος και είναι η n -προβολική ομάδα. Δίνουμε αμέσως τον αυστηρό ορισμό του προβολικού n -χώρου $\mathbb{R}P^n$ που είναι και ο υποκείμενος χώρος της Προβολικής Γεωμετρίας-για την προβολική ομάδα $P(n)$ θα μιλήσουμε στην επόμενη ενότητα: στο $\mathbb{R}_*^{n+1}$, $n \geq 1$, θεωρούμε τη σχέση $\sim$ ως εξής:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}_*.$$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, είναι:

- Ανακλαστική διότι $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ εφόσον $\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$.
- Συμμετρική διότι αν $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τότε $\mathbf{x} = (1/\lambda)\mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}$.
- Μεταβατική διότι αν $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_*$ και $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}'' \iff \mathbf{x}'' = \lambda' \mathbf{x}'$, $\lambda' \in \mathbb{R}_*$, τότε $\mathbf{x}'' = \lambda \lambda' \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \sim \mathbf{x}''$.

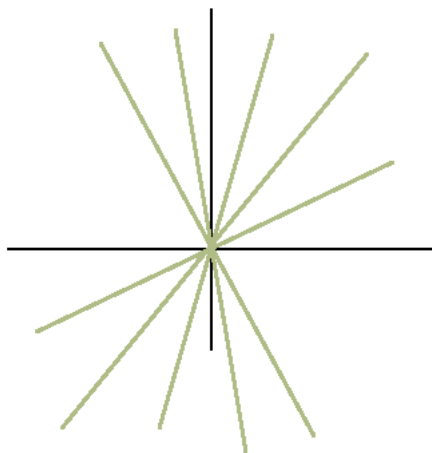
Ο (πραγματικός) προβολικός n -χώρος ορίζεται τώρα ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}_*^{n+1} / \sim = \{[\mathbf{x}] \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1}\}.$$

Στην πράξη, ο $\mathbb{R}P^n$ είναι το σύνολο των ευθειών που περνούν από την αρχή. Πράγματι, μία κλάση ισοδυναμίας ενός $\mathbf{x}$ είναι το σύνολο

$$[\mathbf{x}] = \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\},$$

που είναι η ευθεία που περνά από την αρχή, στην κατεύθυνση του $\mathbf{x}$.



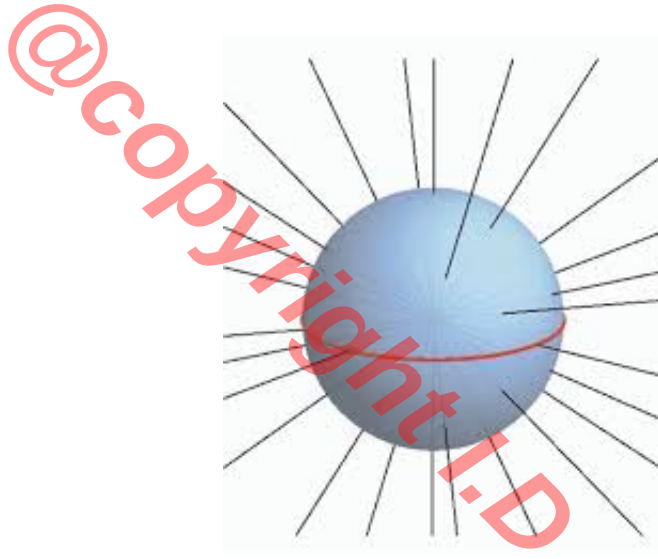
Ο προβολικός χώρος είναι το σύνολο των ευθειών από την αρχή.

Ένας άλλος τρόπος για να θεωρήσουμε τον προβολικό n -χώρο, είναι μέσω της ταυτοποίησης αντιποδικών σημείων της σφαίρας S^n . Πράγματι, κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^{n+1}$ που περνά από την αρχή, καθορίζεται πλήρως από δύο αντιποδικά σημεία της S^n και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, εάν στην S^n ορίσουμε τη σχέση

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \pm \mathbf{y},$$

τότε εύκολα βλέπουμε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim.$$



Προβολικός χώρος και σφαίρα.

Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1}$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$, θα γράφουμε $[\mathbf{x}] = [x_0 : \dots : x_n]$ και θα καλούμε την τελευταία αγκύλη *ομογενείς συντεταγμένες* του $[\mathbf{x}]$. Λόγου χάρη, το σημείο $[1 : 0 : 2]$ του $\mathbb{R}P^2$ αποτελείται από τα σημεία

$$x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = 2\lambda,$$

που δεν είναι παρά η ευθεία με καρτεσιανές εξισώσεις $y = 0, z = 2x$ του $\mathbb{R}^3$.

Για $i = 0, \dots, n$ θεωρούμε τα σύνολα

$$H_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}. \quad (7.1)$$

Τότε επειδή κάθε σημείο $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n$ έχει τουλάχιστον μία συντεταγμένη $x_i \neq 0$, προκύπτει ότι

$$\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=0}^n H_i.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι για $i \neq j$ είναι $H_i \cap H_j \neq \emptyset$. Κάθε ένα όμως από αυτά τα σύνολα είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{R}^n$. Λόγου χάρη, το H_n αποτελείται από σημεία της μορφής

$$[x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n] = [x_0/x_n : x_1/x_n : \dots : x_{n-1}/x_n : 1] = [y_1 : \dots : y_n : 1].$$

Ορίζεται λοιπόν η απεικόνιση κανονικής προβολής $\mathbb{P} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: στο σύνολο H_n δίνεται από την

$$H_n \ni [y_1 : \cdots : y_n : 1] \rightarrow (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Αντίστροφα, αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, η ανύψωσή του στον $\mathbb{R}P^n$ είναι το σημείο $[x_1 : \cdots : x_n : 1]$. Τώρα, το σύνολο

$$\mathbb{R}P^n \setminus H_n = \{[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n \mid x_n = 0\}$$

είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τον προβολικό χώρο $\mathbb{R}P^{n-1}$:

$$\mathbb{R}P^{n-1} \ni [x_0 : \cdots : x_{n-1}] \mapsto [x_0 : \cdots : x_{n-1} : 0] \in \mathbb{R}P^n \setminus H_n.$$

Η αντιστοιχία αυτή παριστάνει την εμφύτευση του $\mathbb{R}P^{n-1}$ στον $\mathbb{R}P^n$ και έχει υποκείμενη την εμφύτευση του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ως το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Από την παραπάνω συζήτηση προκύπτει ότι ο προβολικός χώρος $\mathbb{R}P^n$ μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$ και του προβολικού χώρου $\mathbb{R}P^{n-1}$.

7.1.1 Προβολικοί μετασχηματισμοί και η προβολική ομάδα $P(n)$

Έστω $m : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \mapsto (y_0, \dots, y_n) = m(\mathbf{x}),$$

και έστω

$$M = \begin{pmatrix} m_{01} & \cdots & m_{0n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{n0} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} \in \text{GL}(n, \mathbb{R}^{n+1})$$

ο πίνακας του m ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{R}^{n+1}$ ώστε

$$y_i = \sum_{j=0}^n m_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Τότε, από τον μετασχηματισμό m , παίρνουμε έναν μετασχηματισμό $[m]$ του $\mathbb{R}P^n$ από τη σχέση

$$[m]([\mathbf{x}]) = [m(\mathbf{x})].$$

Η απεικόνιση $[m]$ είναι ένας καλώς ορισμένος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}P^n$:

1. Για το καλώς ορισμένο, για $[\mathbf{x}_1], [\mathbf{x}_2] \in \mathbb{R}P^n$ είναι

$$[\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_2] \iff \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2 \implies m(\mathbf{x}_1) = m(\lambda \mathbf{x}_2) = \lambda m(\mathbf{x}_2) \iff [m(\mathbf{x}_1)] = [m(\mathbf{x}_2)].$$

2. Για το 1-1,

$$[m(\mathbf{x}_1)] = [m(\mathbf{x}_2)] \iff m(\mathbf{x}_1) = \lambda m(\mathbf{x}_2) = m(\lambda \mathbf{x}_2) \implies \mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_2 \iff [\mathbf{x}_1] = [\mathbf{x}_2].$$

3. Για το επί, αν $[\mathbf{y}] \in \mathbb{R}P^n$, τότε υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $m(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, άρα $[m(\mathbf{x})] = [m]([\mathbf{x}]) = [\mathbf{y}]$.

Υπάρχουν κάποιοι συγκεκριμένοι πίνακες της $GL(n+1, \mathbb{R})$ που αντιστοιχούν σε μετασχηματισμούς που δεν έχουν απολύτως καμμία επίδραση στον προβολικό χώρο. Πράγματι, έστω ο πίνακας $M = \lambda I_{n+1}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_*$ που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $m(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε, ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός είναι ο ταυτοτικός:

$$[m]([\mathbf{x}]) = [\lambda \mathbf{x}] = [\mathbf{x}].$$

Η ομάδα των μετασχηματισμών της μορφής $m(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα $(\mathbb{R}_*, \cdot)$ που είναι κανονική υποομάδα της $GL(n+1, \mathbb{R})$. Έτσι λοιπόν στην πραγματικότητα δεν είναι όλη η $GL(n+1, \mathbb{R})$ που δρά στον προβολικό χώρο, αλλά η ομάδα πηλίκου

$$P(n) \simeq \text{PGL}(n+1, \mathbb{R}) = GL(n+1, \mathbb{R})/(\mathbb{R}_*, \cdot).$$

Η ομάδα $\text{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ αποτελείται από κλάσεις $[M]$, $M \in GL(n+1, \mathbb{R})$,

$$[M] = \{\lambda M, \lambda \in \mathbb{R}_*\}.$$

Η πράξη στην $\text{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ δίνεται από τη σχέση

$$[M] * [N] = [MN].$$

Ο παραπάνω ισομορφισμός $P(n) \simeq \text{PGL}(n+1, \mathbb{R})$ δίνεται από τη σχέση $[m] \mapsto [M]$ όπου

$$[M] = \{\lambda M \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν μας δοθεί

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{00} & \dots & m_{0n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ m_{n0} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix},$$

τότε ο αντίστοιχος προβολικός μετασχηματισμός είναι ο

$$[m]([x_0 : \dots : x_n]) = \left[\sum_{i=0}^n m_{0i} x_i : \dots : \sum_{i=0}^n m_{ni} x_i \right].$$

Η αριστερή δράση της $P(n)$ στον $\mathbb{R}P^n$ με προβολικούς μετασχηματισμούς $[m]$ δίνεται από την

$$P(n) \times \mathbb{R}P^n \ni ([m], [\mathbf{x}]) \mapsto [m]([\mathbf{x}]) = [m(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}P^n.$$

Πρόταση 7.1.1. Η δράση της $P(n)$ είναι διπλά μεταβατική και ελεύθερη.

Απόδειξη. Εάν $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}']$ και $[\mathbf{y}]$, $[\mathbf{y}']$ είναι ζεύγη διαφορετικών σημείων του προβολικού χώρου, τότε επειδή τα $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ και $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ είναι ζεύγη γραμμικά ανεξάρτητων σημείων του $\mathbb{R}^{n+1}$, υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός m του $\mathbb{R}^{n+1}$ που απεικονίζει τον υπόχωρο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle$ στον υπόχωρο $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}' \rangle$ με $m(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ και $m(\mathbf{x}') = \mathbf{y}'$. Τότε όμως ο προβολικός μετασχηματισμός $[m]$ απεικονίζει το $[\mathbf{x}]$ στο $[\mathbf{y}]$ και το $[\mathbf{x}']$ στο $[\mathbf{y}']$.

Από την άλλη, αν $[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}P^n$, ο σταθεροποιητής του

$$\text{Stab}(\mathbf{x}) = \{[m] \in P(n) \mid [m]([\mathbf{x}]) = [\mathbf{x}]\}$$

είναι ισόμορφος με το σύνολο $(\mathbb{R}_*, \cdot)$, δηλαδή, το ουδέτερο στοιχείο της $\text{PGL}(n+1, \mathbb{R})$. $\square$

Στο κεφάλαιο αυτό θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην αναλυτική περιγραφή του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ και της γεωμετρίας του. Είναι όμως σωστό να μιλήσουμε πρώτα για την προβολική ευθεία.

7.2 Η Προβολική Ευθεία και η Γεωμετρία της

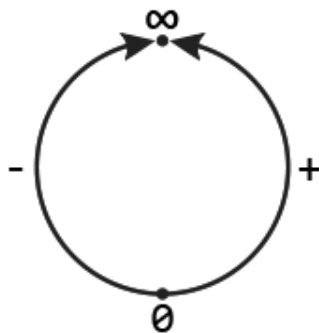
Όταν $n = 1$, το σύνολο $\mathbb{R}P^1$ είναι η *προβολική ευθεία* που όπως είδαμε παραπάνω μπορεί να θεωρείται και ως το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ που περνούν από την αρχή $(0, 0)$. Η προβολική ευθεία είναι η ένωση των υποσυνόλων

$$H_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_0 \neq 0\} \quad \text{και} \quad H_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_1 \neq 0\}.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{R}P^1 = H_0 \cup \{[0 : 1]\}, \quad \text{είτε} \quad \mathbb{R}P^1 = H_1 \cup \{[1 : 0]\},$$

δηλαδή, η προβολική ευθεία μπορεί να γραφεί ως η (ξένη) ένωση της Ευκλείδειας ευθείας (εν προκειμένω, της H_0 ή της H_1 , αντίστοιχα) και ενός σημείου στο άπειρο (του $[0 : 1]$, ή του $[1 : 0]$, αντίστοιχα). Η προβολική ευθεία $\mathbb{R}P^1$ λοιπόν βρίσκεται σε μία 1–1 και επί αντιστοιχία με τον ίδιο τον κύκλο S^1 και όχι απλώς με τον $S^1 / \sim$. Κι αυτό διότι ο S^1 μέσω της στερεογραφικής προβολής (δείτε την Ενότητα 7.1.1), μπορεί να ταυτιστεί με την πραγματική ευθεία στην οποία έχουμε προσθέσει ένα σημείο στο άπειρο. Προκύπτει λοιπόν με απλό τρόπο ότι η προβολική ευθεία είναι συμπαγές σύνολο και το ίδιο ισχύει για τον προβολικό χώρο κάθε διάστασης. Η απόδειξη όμως για $n > 1$ απαιτεί τεχνικές που είναι πέρα από τον σκοπό των σημειώσεων αυτών. Στην Ενότητα 6.3 μπορείτε να δείτε σχηματοποιήσεις του προβολικού επιπέδου σαν μία συμπαγή επιφάνεια.



Προβολική ευθεία και κύκλος.

Μπορούμε να πηγαίνουμε από την προβολική στην Ευκλείδεια ευθεία με την *απεικόνιση προβολής* $\mathbb{P} : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δίνεται στο σύνολο H_0 από την $\mathbb{P}([x_0 : x_1]) = x_1/x_0$, ενώ στο σύνολο H_1 δίνεται από την $\mathbb{P}([x_0 : x_1]) = x_0/x_1$. Αντιστρόφως, μπορούμε να πηγαίνουμε από την Ευκλείδεια ευθεία στην προβολική μέσω της απεικόνισης τυπικής ανύψωσης $x \mapsto [x : 1]$.

Η προβολική ομάδα $P(1)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς $[m] : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^1$, όπου $m : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός. Ένας μετασχηματισμός $[m]$ αντιστοιχεί κατά μοναδικό τρόπο σε ένα στοιχείο της ομάδας

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad M \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \right\}, \quad (7.2)$$

με την αντιστοιχία να ορίζεται από την $[m] \mapsto [M]$. Ο M εδώ είναι ο πίνακας του αντίστοιχου γραμμικού μετασχηματισμού.

Έχουμε την εξής θεμελιώδη πρόταση για τη Γεωμετρία της Προβολικής Ευθείας:

Πρόταση 7.2.1. Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ και $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$ τριάδες διαφορετικών ανά δύο σημείων της $\mathbb{R}P^1$. Τότε υπάρχει μοναδικός $[m] \in P(1)$ τέτοιο ώστε

$$[m]([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad [m]([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad [m]([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'].$$

Απόδειξη. Έστω τα σημεία $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ και $[1 : 1]$. Έστω επίσης ότι

$$[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1], \quad [\mathbf{B}] = [b_0 : b_1], \quad [\mathbf{C}] = [c_0 : c_1].$$

Για $\lambda, \mu \neq 0$, θεωρούμε τον $m_{\lambda, \mu} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$m_{\lambda, \mu}(x_0, x_1) = (\lambda a_0 x_0 + \mu b_0 x_1, \lambda a_1 x_0 + \mu b_1 x_1).$$

ο πίνακας N του μετασχηματισμού αυτού είναι ο

$$N = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \mu b_0 \\ \lambda a_1 & \mu b_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$$

εφόσον η ορίζουσά του είναι ίση με $\lambda\mu(a_0 b_1 - b_0 a_1) \neq 0$ διότι $[\mathbf{A}] \neq [\mathbf{B}]$. Επιπλέον, έχουμε τις σχέσεις

$$[m_{\lambda, \mu}]([1 : 0]) = [\mathbf{A}], \quad [m_{\lambda, \mu}]([0 : 1]) = [\mathbf{B}], \quad [m_{\lambda, \mu}]([1 : 1]) = [\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}].$$

Τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ σχηματίζουν μία βάση του $\mathbb{R}^2$. Έτσι, υπάρχουν μοναδικά λ_0, μ_0 ώστε $\mathbf{C} = \lambda_0 \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{B}$ και τότε ο μετασχηματισμός $[m] = [m_{\lambda_0, \mu_0}]$ ικανοποιεί την $[m]([1 : 1]) = [\mathbf{C}]$. Με την ίδια διαδικασία, βρίσκουμε $m' \in P(1)$ με

$$[m']([1 : 0]) = [\mathbf{A}'], \quad [m']([0 : 1]) = [\mathbf{B}'], \quad [m']([1 : 1]) = [\mathbf{C}'].$$

Ο μετασχηματισμός $[m'] \circ [m^{-1}]$ είναι ο ζητούμενος. Είναι δε μοναδικός, διότι εάν υπήρχε $[m'']$ με

$$[m'']([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad [m'']([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad [m'']([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'],$$

τότε ο $[n] = [m] \circ [m''] \circ [(m')^{-1}]$ θα σταθεροποιούσε τα τρία σημεία $[1 : 0]$, $[0 : 1]$ και $[1 : 1]$. Αν

$$[n]([x_0 : x_1]) = [n_{00}x_0 + n_{01}x_1, n_{10}x_0 + n_{11}x_1],$$

τότε

$$[n]([1 : 0]) = [n_{00} : n_{10}] = [1 : 0] \implies n_{10} = 0,$$

$$[n]([0 : 1]) = [n_{01} : n_{11}] = [0 : 1] \implies n_{01} = 0,$$

$$[n]([1 : 1]) = [n_{00} : n_{11}] = [1 : 1] \implies n_{00} = n_{11}.$$

Άρα ο $[n]$ είναι το ταυτοτικό στοιχείο της $P(1)$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα 7.2.2. Θα βρούμε τον $[m] \in P(1)$ που απεικονίζει τα $[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1]$ στα $[1 : 2], [-1 : 1]$ και $[2 : 1]$, αντίστοιχα. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.2.1 έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*$ και έστω $m_{\lambda, \mu}$ ο μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ με πίνακα

$$N = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ 2\lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$[m_{\lambda, \mu}(1, 1)] = [\lambda - \mu : 2\lambda + \mu].$$

Το σύστημα

$$\lambda - \mu = 2, \quad 2\lambda + \mu = 1$$

έχει λύσεις $\lambda = 1, \mu = -1$. Άρα, ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $[m] = [m_{1, -1}]$ με πίνακα

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή,

$$[m]([x_0 : x_1]) = [x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1].$$

Παράδειγμα 7.2.3. Θα βρούμε τον μετασχηματισμό της $P(1)$ που απεικονίζει τα $[1 : 2], [-1 : 1]$ και $[2 : 1]$ στα $[2 : 1], [-1 : 1]$ και $[1 : 2]$, αντίστοιχα. Λόγω του προηγούμενου παραδείγματος, ο $[m]$ με

$$[m]([x_0 : x_1]) = [x_0 + x_1 : 2x_0 - x_1].$$

απεικονίζει τα $[1 : 0], [0 : 1]$ και $[1 : 1]$ στα $[1 : 2], [-1 : 1]$ και $[2 : 1]$, αντίστοιχα. Βρίσκουμε λοιπόν μόνο τον μετασχηματισμό $[m']$ που απεικονίζει τα $[1 : 0], [0 : 1]$ και $[1 : 1]$ στα $[2 : 1], [-1 : 1]$ και $[1 : 2]$, αντίστοιχα. Όπως προηγουμένως, θεωρούμε $m'_{\lambda, \mu}$ και τον πίνακα του

$$N' = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}.$$

Είναι $[m'_{\lambda, \mu}(1, 1)] = [2\lambda - \mu : \lambda + \mu]$ και από τις σχέσεις

$$2\lambda - \mu = 1, \quad \lambda + \mu = 2,$$

παίρνουμε $\lambda = \mu = 1$. Συνεπώς, ο $[m']$ έχει πίνακα

$$[M'] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

δηλαδή,

$$[m']([x_0 : x_1]) = [2x_0 - x_1 : x_0 + x_1].$$

Ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $[n] = [m'] \circ [m^{-1}]$. Ο πίνακάς του είναι ο

$$[M'M^{-1}] = \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Άρα,

$$[n]([x_0 : x_1]) = [x_1 : x_0].$$

7.2.1 Διπλός λόγος

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων. Ο διπλός λόγος ήταν γνωστός στον Ευκλείδη και η θεμελιώδης του ιδιότητα (Πρόταση ?? παρακάτω) αποδείχθηκε από τον Πάππο. Έστω $[A], [B], [C], [D]$ τέσσερα σημεία της $\mathbb{RP}^1$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα. Έστω χωρίς βλάβη ότι $[A] \neq [B]$. Τότε,

$$C = pA + qB, \quad D = rA + sB. \quad (7.3)$$

Ο διπλός λόγος ορίζεται ως

$$[A, B; C, D] = \frac{qr}{ps}.$$

Παρατηρήστε ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων δεν μπορεί να είναι 0: αν $q = 0$ τότε $[C] = [A]$ ενώ αν $r = 0$ τότε $[D] = [B]$. Αν πάλι ο διπλός λόγος είναι ίσος με 1, καταλήγουμε πάλι σε άτοπο. Κι αυτό διότι από την $qr = ps$ έχουμε

$$C = (qr/s)A + qB = (sq)D \implies [C] = [D]$$

Ο ορισμός του διπλού λόγου είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των αντιπροσώπων: πράγματι, αν A', B', C', D' είναι κάποιοι άλλοι αντιπρόσωποι των $[A], [B], [C], [D]$, τότε υπάρχουν a, b, c, d όλα διαφορετικά του μηδενός τέτοια ώστε $A' = aA, B' = bB, C' = cC$ και $D' = dD$. Τότε,

$$\begin{aligned} C' &= cC = cpA + cqB = (cp/a)A' + (cq/b)B', \\ D' &= dD = drA + dsB = (dr/a)A' + (ds/b)B', \end{aligned}$$

συνεπώς

$$[A', B'; C', D'] = \frac{(cq/b)(dr/a)}{(cp/a)(ds/b)} = \frac{qr}{ps} = [A, B; C, D].$$

Πρόταση 7.2.4. Ο διπλός λόγος είναι προβολική αναλλοίωτος: παραμένει αναλλοίωτος από τη δράση της $P(1)$.

Απόδειξη. Έστω όπως παραπάνω $[A], [B], [C], [D]$ τέσσερα σημεία της $\mathbb{RP}^1$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα και έστω χωρίς βλάβη ότι $[A] \neq [B]$, ώστε να ισχύει η (??). Αν $[m] \in P(1)$ με αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό m , τότε

$$m(C) = p \cdot m(A) + q \cdot m(B), \quad m(D) = r \cdot m(A) + s \cdot m(B).$$

Είναι τώρα $[m(A)] \neq [m(B)]$. Κι αυτό διότι, στην περίπτωση που ίσχυε το αντίθετο θα υπήρχε $\lambda \in \mathbb{R}_*$ με $m(B) = \lambda \cdot m(A)$. Επειδή όμως ο m είναι αντιστρέψιμος, τούτο θα συνεπαγόταν ότι $B = \lambda A$ και άρα $[A] = [B]$, πράγμα που αντικρούει την υπόθεση. Άρα,

$$[m(A), m(B); m(C), m(D)] = \frac{qr}{ps} = [A, B; C, D].$$

□

Πρόταση 7.2.5. Υπάρχει $[m] \in P(1)$ που απεικονίζει τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[A], [B], [C], [D]$ σε τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[A'], [B'], [C'], [D']$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν

$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Απόδειξη. Αν υπάρχει $[m] \in P(1)$ με

$$[m(A)] = [A'], \quad [m(B)] = [B'], \quad [m(C)] = [C'], \quad [m(D)] = [D'],$$

τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από την Πρόταση ???. Έστω τώρα ότι

$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$[A] = [A'] = [1 : 0], \quad [B] = [B'] = [0 : 1], \quad [C] = [C'] = [1 : 1].$$

Τότε, αν $[D] = [d_1 : d_2]$ και $[D'] = [d'_1 : d'_2]$, είναι

$$[A, B; C, D] = d_1/d_2, \quad [A', B'; C', D'] = d'_1/d'_2.$$

Προκύπτει ότι $[D] = [D']$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Σχόλιο 7.2.6. Στο σημείο αυτό κάνουμε μία χρήσιμη παρατήρηση πάνω στην απόδειξη της Πρότασης ???. Έστω $[A], [B], [C]$ και $[D]$ τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία της $\mathbb{R}P^1$ και έστω

$$[A, B; C, D] = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$[(1, 0), (0, 1); (1/\lambda, 1), (1, 1)] = \lambda = [A, B; C, D].$$

Σύμφωνα με την Πρόταση ??, υπάρχει $[m] \in P(1)$ με

$$[m(1, 0)] = [A], \quad [m(0, 1)] = [B], \quad [m(1/\lambda, 1)] = [C], \quad [m(1, 1)] = [D].$$

Άρα, όταν μας δίνονται τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία της $\mathbb{R}P^1$ μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι αυτά είναι τα

$$[1 : 0], \quad [0 : 1], \quad [1/\lambda : 1], \quad [1 : 1],$$

όπου λ είναι ο διπλός λόγος των δοθέντων σημείων.

Ας παρατηρήσουμε ότι μέσω της ταύτισης της $\mathbb{R}P^1$ με τον $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, ο διπλός λόγος μπορεί να οριστεί και για σημεία του $\overline{\mathbb{R}}$ ως εξής: έστω $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$, τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα. Αν κανένα από αυτά δεν είναι το ∞ , θεωρούμε τις ανυψώσεις τους

$$[A] = [a : 1], \quad [B] = [b : 1], \quad [C] = [c : 1], \quad [D] = [d : 1].$$

Αν $a \neq b$, τότε επειδή

$$c = \frac{(c-b)a + (a-c)b}{a-b},$$

$$d = \frac{(d-b)a + (a-d)b}{a-b},$$

έχουμε

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)},$$

το οποίο και ορίζουμε ως τον διπλό λόγο $[a, b; c, d]$ των a, b, c, d . Χρειάζεται βεβαίως να κάνουμε ορισμένες παραδοχές στην περίπτωση όπου δύο από τα σημεία είναι ίσα: λόγου χάρη, αν $b = c$, τότε λέμε ότι $[a, b; c, d] = \infty$. Έτσι, ο διπλός λόγος παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$.¹ Παρατηρήστε τώρα ότι με την επιπλέον παραδοχή ότι $\infty : \infty = 1$, ο διπλός λόγος

$$[a, b; c, d] = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)},$$

ορίζεται και στην περίπτωση που κάποιο από τα a, b, c, d είναι το σημείο στο άπειρο. Θα επανέλθουμε στην πραγμάτευση αυτή του διπλού λόγου στην Ενότητα 7.4.2.

Παράδειγμα 7.2.7. Θα βρούμε με δύο τρόπους τον διπλό λόγο των

$$[\mathbf{A}] = [1 : 2], \quad [\mathbf{B}] = [2 : 1], \quad [\mathbf{C}] = [1 : 0], \quad [\mathbf{D}] = [1 : 1].$$

Κατ' αρχάς είναι

$$\mathbf{C} = (1, 0) = (-1/3)\mathbf{A} + (2/3)\mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = (1, 1) = (1/3)\mathbf{A} + (1/3)\mathbf{B},$$

οπότε,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = \frac{(2/3) \cdot (1/3)}{(-1/3) \cdot (1/3)} = -2.$$

Από την άλλη, επειδή τα $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$ ανήκουν στο σύνολο H_0 , θεωρούμε τις προβολές

$$a = 1/2, \quad b = 2, \quad d = 1,$$

των $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$, αντίστοιχα, επάνω στην πραγματική ευθεία, ενώ παίρνουμε $c = \infty$. Τότε,

$$[a, b; c, d] = \frac{(1-2)(\infty-1/2)}{(1-1/2)(\infty-2)} = \frac{-1}{1/2} \cdot \frac{\infty}{\infty} = (-2) \cdot 1 = -2.$$

Πρόταση 7.2.8. Θεώρημα Τεσσάρων Σημείων. Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{X}]$, $[\mathbf{Y}]$ σημεία της προβολικής ευθείας. Τότε,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{Y}] \implies [\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}].$$

¹Και πάλι έχουμε όθι αν τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, τότε ο διπλός λόγος παίρνει τιμές στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Απόδειξη. Έστω

$$\mathbf{C} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = r\mathbf{A} + s\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y} = r'\mathbf{A} + s'\mathbf{B}.$$

Τότε,

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}] = [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{Y}] \implies \frac{qr}{ps} = \frac{qr'}{ps'} \implies \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}.$$

Οπότε,

$$\mathbf{Y} = r'\mathbf{A} + s'\mathbf{B} = (r'/r)r\mathbf{A} + (s'/s)s\mathbf{B} = (r'/r)(r\mathbf{A} + s\mathbf{B}) = (r'/r)\mathbf{X} \implies [\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}].$$

□

Ένα φυσιολογικό και ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: τί συμβαίνει στον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων όταν μετατάξουμε τα σημεία με μία μετάταξη της ομάδας μετατάξεων S_4 ; Υπάρχουν ως γνωστόν 24 μετατάξεις στην S_4 αλλά ο διπλός λόγος που προκύπτει από οποιαδήποτε από αυτές είναι συνάρτηση ενός προκαθορισμένου διπλού λόγου. Δείτε την Άσκηση 6.2.1.??.

7.2.2 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η σχέση που ορίζεται από την (??) είναι σχέση ισοδυναμίας.
2. Δείξτε ότι η $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ που ορίζεται από την (6.2) είναι ομάδα.
3. Δείξτε ότι η απεικόνιση (??) ορίζει δράση της ομάδας $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ επί της προβολικής ευθείας.
4. Βασιζόμενοι στην απόδειξη της Πρότασης 6.2.1 αλλά και στο Παράδειγμα 6.2.2, βρείτε το $[M]$ που απεικονίζει
 - (α') τα $[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1]$ στα $[-1, 2], [2, 3], [4 : 1]$, αντίστοιχα και
 - (β') τα $[-1 : 1], [0 : 1], [1 : 2]$ στα $[0, 1], [3, -1], [2 : 5]$, αντίστοιχα.
5. Εξετάστε εάν υπάρχει στοιχείο της $P(1)$ που να απεικονίζει τα $[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1]$ και $[1 : -1]$ στα $[0 : 1], [1 : 0], [2 : 1], [1 : 2]$, αντίστοιχα.
6. Δείξτε ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων της προβολικής ευθείας ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = [\mathbf{B}, \mathbf{A}; \mathbf{D}, \mathbf{C}] = [\mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathbf{A}, \mathbf{B}] = [\mathbf{D}, \mathbf{C}; \mathbf{B}, \mathbf{A}] \quad (7.4)$$

και

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] &= \lambda, & [\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{D}, \mathbf{C}] &= 1/\lambda, \\ [\mathbf{A}, \mathbf{C}; \mathbf{B}, \mathbf{D}] &= 1 - \lambda, & [\mathbf{A}, \mathbf{C}; \mathbf{D}, \mathbf{B}] &= 1/(1 - \lambda), \\ [\mathbf{A}, \mathbf{D}; \mathbf{B}, \mathbf{C}] &= 1 - 1/\lambda, & [\mathbf{A}, \mathbf{D}; \mathbf{C}, \mathbf{B}] &= \lambda/(\lambda - 1). \end{aligned}$$

7.3 Το Προβολικό Επίπεδο και η Γεωμετρία του

7.3.1 Γενικά για το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$

Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι η ένωση των εξής τριών συνόλων:

$$\begin{aligned} H_0 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_0 \neq 0\}, \\ H_1 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_1 \neq 0\}, \\ H_2 &= \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_2 \neq 0\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Και πάλι τονίζουμε ότι τα σύνολα αυτά δεν είναι ξένα μεταξύ τους. Το καθένα απ' αυτά όμως είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{R}^2$: λόγω χάρη, τα σημεία του H_2 είναι ισοδύναμα με σημεία της μορφής $[x : y : 1]$ και έτσι έχουμε την απεικόνιση (προβολής) $[x : y : 1] \mapsto (x, y)$. Είναι τώρα

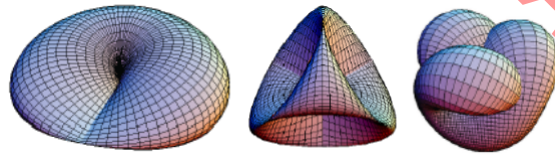
$$L_\infty^3 = \mathbb{R}P^2 \setminus H_2 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_2 = 0\}.$$

Το σύνολο L_∞^3 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αντίγραφο της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ εμβαπτισμένης εντός του $\mathbb{R}P^2$:

$$\mathbb{R}P^1 \ni [x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : x_1 : 0] \in \mathbb{R}P^2,$$

και ονομάζεται *ευθεία στο άπειρο ως προς H_2* . Η εμφύτευση αυτή έχει υποκείμενη την εμφύτευση του Ευκλείδειου επιπέδου $\mathbb{R}^2$ εντός του $\mathbb{R}^3$ ως το επίπεδο $x_2 = 0$.

Σχόλιο 7.3.1. Σημειώνουμε και πάλι χωρίς απόδειξη ότι το προβολικό επίπεδο είναι ένα συμπαγές σύνολο. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε διάφορες αναπαραστάσεις του προβολικού επιπέδου σαν συμπαγή επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.



Αναπαραστάσεις του προβολικού επιπέδου.

7.3.2 Ευθείες στο $\mathbb{R}P^2$

Το Ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ μπορεί να εμβαπτιστεί εντός του $\mathbb{R}^3$ και ως οποιοδήποτε επίπεδο

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0, \quad |a| + |b| + |c| \neq 0, \quad (7.6)$$

που περνά από την αρχή. Τέτοιου είδους επίπεδα προκύπτουν από τη δράση ενός στοιχείου της ορθογώνιας ομάδας $O(3)$ στο $\mathbb{R}^3$. Η Εξίσωση (6.4) παριστάνει την εξίσωση της τυχούσας *προβολικής ευθείας του $\mathbb{R}P^2$* και μας λέει επίσης ότι κάθε τέτοια προβολική ευθεία μπορεί να θεωρηθεί σαν ευθεία στο άπειρο.

Πρόταση 7.3.2. Από κάθε δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{RP}^2$ περνά μοναδική προβολική ευθεία.

Απόδειξη. Έστω $[\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : x_2]$ και $[\mathbf{x}'] = [x'_0 : x'_1 : x'_2]$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία στο $\mathbb{RP}^2$. Τούτο σημειώνει ότι τουλάχιστον μία από τις ελάχιστον ορίζουσες

$$D_0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x'_0 & x'_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x'_0 & x'_1 \end{vmatrix},$$

είναι διαφορετική του μηδενός. Τότε, η ευθεία με εξίσωση

$$D_0 X_0 - D_1 X_1 + D_2 X_2 = 0,$$

περιέχει τα $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}']$. (Επιβεβαιώστε τον ισχυρισμό στην Άσκηση ???: παρατηρήστε ότι ουσιαστικά αποδείξαμε ότι δύο επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ που περνούν από την αρχή τέμνονται σε μία ευθεία!) $\square$

Πόρισμα 7.3.3. Η ευθεία που περνά από τα $[\mathbf{x}]$ και $[\mathbf{x}']$ όπως παραπάνω, δίνεται από τη σχέση

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (7.7)$$

Παράδειγμα 7.3.4. Έστω τα σημεία $[1 : 0 : 2]$ και $[0 : 1 : 2]$ του $\mathbb{RP}^2$. Αν $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ είναι η ευθεία που τα περιέχει, τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 2 = a + 2c = 0 \quad \text{και} \quad a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 2 = b + 2c = 0.$$

Προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η $L : 2X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (??) έχουμε πάλι

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2X_0 - 2X_1 + X_2 = 0.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή και σαν ιδιότητα πρόσπτωσης. Μας εξασφαλίζει την μὴ ύπαρξη παραλληλίας ευθειών στο προβολικό επίπεδο:

Πρόταση 7.3.5. (Πρόσπτωση). Δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται πάντοτε σε ένα μοναδικό σημείο.

Απόδειξη. Έστω οι ευθείες

$$\begin{aligned} L_1 : & ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0, \\ L_2 : & a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0. \end{aligned}$$

Τα κοινά τους σημεία είναι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος, το οποίο, επειδή τουλάχιστον μία από τις ελάχιστον ορίζουσες

$$D_0 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

είναι διαφορετική του μηδενός, έχει άπειρες λύσεις: αν λόγου χάρη $D_2 \neq 0$, τότε

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{D_2} \cdot x_2, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{D_2} \cdot x_2.$$

Προκύπτει το μοναδικό προβολικό σημείο

$$\left[\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right],$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Σχόλιο 7.3.6. Μπορούμε να γράφουμε την εξίσωση μίας ευθείας $L : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ ως $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ · κι αυτό διότι το $\mathbf{A} = (a, b, c)$ είναι το κάθετο διάνυσμα του αντίστοιχου Ευκλείδειου επιπέδου και συνεπώς είναι μη μηδενικό. Δείτε τώρα ότι από την Πρόταση ?? προκύπτει αμέσως ότι το σημείο τομής των ευθειών $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ είναι ακριβώς το $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Αυτό αντανακλά στο γεγονός ότι η τομή δύο επιπέδων που περνούν από την αρχή είναι ευθεία από την αρχή, με διάνυσμα διεύθυνσης το κάθετο προς τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα των επιπέδων.

Πρόταση 7.3.7. Τρία σημεία $[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1 : a_2]$, $[\mathbf{B}] = [b_0 : b_1 : b_2]$ και $[\mathbf{C}] = [c_0 : c_1 : c_2]$ του προβολικού επιπέδου είναι συνευθειακά αν και μόνο αν το μεικτό γινόμενο

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Απόδειξη. Η ευθεία που ορίζουν τα $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ δίνεται από την

$$[\mathbf{B} \times \mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} = \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Σχόλιο 7.3.8. Σημειώνουμε εδώ ότι τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ σχηματίζουν *τρικόρυφο*. Ο όρος *τρίγωνο* που χρησιμοποιείται παρακάτω είναι καταχρηστικός. Και τούτο διότι, ενώ μπορεί να οριστεί η γωνία μεταξύ δύο προβολικών ευθειών ως η διέδρη γωνία των αντίστοιχων Ευκλείδειων επιπέδων, ο ορισμός αυτός δεν είναι προβολικά αναλλοίωτος, δηλαδή, δεν διατηρείται από τους προβολικούς μετασχηματισμούς. Το ίδιο ισχύει και για τον όρο τετράπλευρο, κ.λπ.

7.3.3 Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε τις ευθείες στο άπειρο των συνόλων H_0 και H_1 στην (6.3).
2. Επιβεβαιώστε τον ισχυρισμό της απόδειξης της Πρότασης ??.

3. Βρείτε τις ευθείες L_1 και L_2 που περνούν από τα $[A]$ και $[B]$ όταν αυτά είναι αντίστοιχα τα

$$(\alpha') [1 : 0 : 5], [0 : -1 : 9].$$

$$(\beta') [2 : 3 : 2], [-1 : 4 : 1].$$

4. Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών L_1 και L_2 της προηγούμενης άσκησης.

5. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω τριάδες σημείων είναι συνευθειακές:

$$(\alpha') [-2 : 8 : 1], [3 : 4 : 0], [-2 : 5 : 2].$$

$$(\beta') [1 : -1/2 : 2], [-2 : 1 : 3], [0 : 0 : 1].$$

7.3.4 Η Γεωμετρία του Προβολικού Επιπέδου

Η Γεωμετρία (κατά Klein) του Προβολικού Επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ είναι το ζεύγος $(\mathbb{R}P^2, P(2))$, όπου η ομάδα $P(2)$ είναι η $\text{PGL}(3, \mathbb{R})$ που ορίζεται από την $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ κατά τρόπον ανάλογο με αυτόν που ορίσαμε την $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ από την $\text{GL}(2, \mathbb{R})$. Επίσης με ανάλογο τρόπο όπως στην περίπτωση της προβολικής ευθείας, θεωρούμε τη δράση της ομάδας $P(2)$ στο $\mathbb{R}P^2$:

$$\mathbb{R}P^2 \times \text{PGL}(3, \mathbb{R}) \ni ([x], [A]) \mapsto [xA] \in \mathbb{R}P^2.$$

Η δράση είναι καλώς ορισμένη ακριβώς επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Οι προβολικοί μετασχηματισμοί που παριστάνουν τη δράση ενός $[A] \in P(2)$ στο $\mathbb{R}P^2$ είναι και εδώ απεικονίσεις της μορφής $[x] \mapsto [xM]$ όπου $M \in [A]$.

Η παρακάτω πρόταση είναι ανάλογη της Πρότασης 6.2.1 και συνιστά το Θεμελιώδες Θεώρημα του Προβολικού Επιπέδου:

Πρόταση 7.3.9. Έστω $[A], [B], [C], [D]$ και $[A'], [B'], [C'], [D']$ τετράδες μη συνευθειακών ανά τριών σημείων του $\mathbb{R}P^2$. Τότε υπάρχει μοναδικό $[M] \in P(2)$ με

$$[AM] = [A'], \quad [BM] = [B'], \quad [CM] = [C'], \quad [DM] = [D'].$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παραπλήσια της απόδειξης της Πρότασης 6.2.1. Έστω τα σημεία $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$ και $[1 : 1 : 1]$. Έστω επίσης ότι

$$[A] = [a_0 : a_1 : a_2], \quad [B] = [b_0 : b_1 : b_2], \quad [C] = [c_0 : c_1 : c_2], \quad [D] = [d_0 : d_1 : d_2].$$

Για $\lambda, \mu, \nu \neq 0$, ο πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \mu b_0 & \mu b_1 & \mu b_2 \\ \nu c_0 & \nu c_1 & \nu c_2 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}),$$

εφόσον $[A] \neq [B]$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} [(1, 0, 0)N] &= [A], & [(0, 1, 0)N] &= [B], \\ [(0, 0, 1)N] &= [C], & [(1, 1, 1)N] &= [\lambda A + \mu B + \nu C]. \end{aligned}$$

Εντοπίζουμε τώρα τα κατάλληλα λ, μ, ν παρατηρώντας ότι τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ σχηματίζουν μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Άρα, υπάρχουν μοναδικά λ, μ, ν , όλα διαφορετικά του μηδενός, ώστε

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{C}.$$

(Το ότι τα σημεία υποτέθηκαν ανά τρία μη συνευθειακά, χρειάζεται ακριβώς εδώ). Τότε

$$[(1, 1, 1)N] = [\mathbf{D}].$$

Αναλόγως, βρίσκουμε $[N'] \in P(2)$ με

$$[(1, 0, 0)N'] = [\mathbf{A'}], \quad [(0, 1, 0)N'] = [\mathbf{B'}], \quad [(0, 0, 1)N'] = [\mathbf{C'}], \quad [(1, 1, 1)N'] = [\mathbf{D'}].$$

Το στοιχείο $[M] = [N'N^{-1}]$ είναι το ζητούμενο. Συμπληρώστε από το σημείο αυτό την απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα 7.3.10. Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό κατά τον οποίον

$$[1 : 0 : 0] \mapsto [0 : 0 : 1],$$

$$[0 : 1 : 0] \mapsto [0 : 1 : 1],$$

$$[0 : 0 : 1] \mapsto [1 : 1 : 1],$$

$$[1 : 1 : 1] \mapsto [3 : 2 : 4],$$

έστω $\lambda, \mu, \nu \neq 0$ και

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & \mu \\ \nu & \nu & \nu \end{pmatrix}.$$

Τότε από τη σχέση

$$[(1, 1, 1)M] = [\nu : \mu + \nu : \lambda + \mu + \nu] = [3 : 2 : 4]$$

έχουμε $\lambda = 2, \mu = -1, \nu = 3$ και συνεπώς

$$[M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

7.3.5 Ιδιότητες των προβολικών μετασχηματισμών

Οι επόμενες προτάσεις περιγράφουν ορισμένες από τις ιδιότητες της $P(2)$.

Πρόταση 7.3.11. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

Απόδειξη. Η απόδειξη ουσιαστικά θα μπορούσε να αναχθεί στην απόδειξη της πρότασης: κάθε στοιχείο της $GL(3, \mathbb{R})$ απεικονίζει επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή σε επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή. Αναλυτικά, έστω ευθεία L με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και έστω μετασχηματισμός $[M] \in P(2)$. Θέτουμε για $[\mathbf{X}] \in L$, $\mathbf{X}' = \mathbf{X}M$ και τότε $\mathbf{X}' = \mathbf{X}M \implies \mathbf{X}'M^{-1} = \mathbf{X}$. Έτσι,

$$0 = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = [\mathbf{A}] \cdot (\mathbf{X}'M^{-1}) = [\mathbf{A}(M^T)^{-1}] \cdot \mathbf{X}'.$$

Με άλλα λόγια, η εικόνα της $L : [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ είναι η $L' : [\mathbf{A}(M^T)^{-1}] \cdot \mathbf{X} = 0$. $\square$

Παράδειγμα 7.3.12. Έστω η ευθεία L με εξίσωση

$$[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 2x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$$

και ο μετασχηματισμός $[M]$ με αντιπρόσωπο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Ο αντίστροφος M είναι ο

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -7/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \in \text{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Οπότε, για την $L' = M(L)$ έχουμε

$$[\mathbf{A}(M^T)^{-1}] = [5 : -5 : 1]$$

και έτσι η L' έχει εξίσωση $5x_0 - 5x_1 + x_2 = 0$.

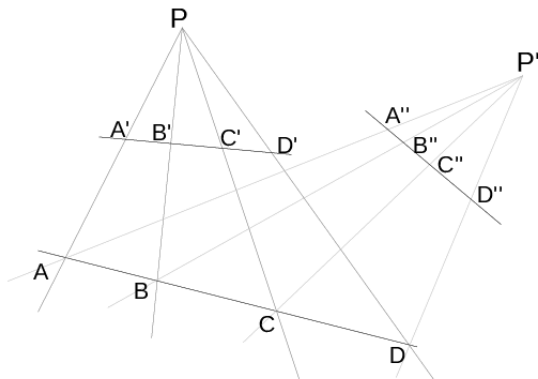
Πρόταση 7.3.13. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει συνευθειακά σημεία σε συνευθειακά σημεία.

Απόδειξη. Κάθε δύο σημεία ανήκουν σε μία ευθεία, η οποία μέσω στοιχείου της $P(2)$ απεικονίζεται σε ευθεία λόγω της Πρότασης ??.

Πρόταση 7.3.14. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ διατηρεί την πρόσπτωση: απεικονίζει το σημείο τομής ευθειών στην τομή των εικόνων τους.

Απόδειξη. Έστω οι ευθείες L με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και L' με εξίσωση $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ που τέμνονται στο $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Αν $[M] \in P(2)$ τότε το σημείο $[(\mathbf{A} \times \mathbf{A}')M]$ θα ανήκει στην τομή $(ML) \cap (ML')$ η οποία συνίσταται από μοναδικό σημείο.

Ο διπλός λόγος $[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}]$ τεσσάρων συνευθειακών σημείων τέτοιων ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά δεν είναι ίσα, ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της $\mathbb{R}P^1$. Οι δύο επόμενες προτάσεις είναι οι ανάλογες των Προτάσεων ?? και ??, αντίστοιχα, και αποδεικνύονται επίσης με τον ίδιο τρόπο, μετά τις κατάλληλες τροποποιήσεις.



Ο διπλός λόγος είναι προβολική αναλλοίωτος.

Πρόταση 7.3.15. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ διατηρεί τον διπλό λόγο τεσσάρων συννευθιακών και διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\mathbb{R}P^2$.

Για την απόδειξη, χρησιμοποιήστε το τετράπλευρο αναφοράς με κορυφές

$$[1 : 0 : 0], \quad [0 : 1 : 0], \quad [0 : 0 : 1], \quad [1 : 1 : 1].$$

Πρόταση 7.3.16. Υπάρχει $[M] \in P(2)$ που απεικονίζει τέσσερα συννευθιακά, διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[A], [B], [C], [D]$ σε τέσσερα συννευθιακά, διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[A'], [B'], [C'], [D']$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν

$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Εφαρμογή. Τέσσερα οποιαδήποτε ανά τρία μη συννευθιακά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ ορίζουν ένα τετράπλευρο (ή, πιο σωστά, τετρακόρυφο). Σύμφωνα με την Πρόταση ?? μπορούμε πάντοτε να υποθέσουμε ότι οι κορυφές είναι οι

$$[A_1] = [1 : 0 : 0], \quad [A_2] = [0 : 1 : 0], \quad [A_3] = [0 : 0 : 1], \quad [A_4] = [1 : 1 : 1].$$

Ορίζονται έξι ευθείες:

- η ευθεία L_{12} από τα $[A_1]$ και $[A_2]$ με τύπο

$$[A_3] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{13} από τα $[A_1]$ και $[A_3]$ με τύπο

$$[A_2] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{14} από τα $[A_1]$ και $[A_4]$ με τύπο

$$[0 : -1 : 1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{23} από τα $[A_2]$ και $[A_3]$ με τύπο

$$[A_1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{24} από τα $[A_2]$ και $[A_4]$ με τύπο

$$[1 : 0 : -1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{34} από τα $[A_3]$ και $[A_4]$ με τύπο

$$[-1 : 1 : 0] \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Τα διαγώνια σημεία του τετραπλεύρου είναι τα

- $L_{13} \cap L_{24} = \{[\mathbf{D}_1] = [1 : 0 : 1]\},$
- $L_{12} \cap L_{34} = \{[\mathbf{D}_2] = [1 : 1 : 0]\},$
- $L_{23} \cap L_{14} = \{[\mathbf{D}_3] = [0 : 1 : 1]\}.$

Η ευθεία από τα $[\mathbf{D}_1]$ και $[\mathbf{D}_3]$ είναι η

$$[-1 : -1 : 1]\mathbf{X} = 0$$

και τέμνει την L_{12} στο

$$[\mathbf{A}'_1] = [-1 : 1 : 0].$$

Υπολογίζουμε τον διπλό λόγο $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_1, \mathbf{D}_2]$: είναι

$$\mathbf{A}'_1 = (-1) \cdot \mathbf{A}_1 + 1 \cdot \mathbf{A}_2 = 1 \cdot \mathbf{A}_1 + 1 \cdot \mathbf{A}_2$$

και συνεπώς $[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_1, \mathbf{D}_2] = -1$. Όταν ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων είναι ίσος με -1 , λέμε ότι τα σημεία βρίσκονται σε αρμονική θέση.

Πρόταση 7.3.17. Η δράση κάθε στοιχείου της $P(2)$ αφήνει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο του $\mathbb{R}P^2$.

Απόδειξη. Αν $[M] \in P(2)$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο p_M είναι τρίτου βαθμού, άρα έχει είτε μία είτε τρεις πραγματικές ιδιοτιμές. Αν λ είναι μία τέτοια ιδιοτιμή και $\mathbf{A}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της, τότε $[\mathbf{A}M] = [\lambda\mathbf{A}]$. $\square$

7.3.6 Ασκήσεις

1. Βρείτε όλους τους προβολικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν τα $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$ στα $[2 : 0 : 1]$, $[0 : -1 : 2]$, $[0 : 0 : 1]$, αντίστοιχα. Δείξτε ότι από όλους αυτούς, μόνο ένας απεικονίζει το $[1 : 1 : 1]$ στο $[3 : -1 : 0]$.
2. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της Πρότασης ??, βρείτε το στοιχείο της $P(2)$ που απεικονίζει τα $[-1 : 2 : 0]$, $[2 : -1 : 0]$, $[0 : 1 : 2]$, $[0 : 1 : -2]$ στα $[0 : 2 : 1]$, $[0 : 2 : -1]$, $[1 : 2 : 0]$, $[2 : 1 : 0]$, αντίστοιχα.
3. Έστω ευθείες $L_1 : [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $L_2 : [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} = 0$.
 - (α') Βρείτε το σημείο τομής τους $[\mathbf{P}]$.
 - (β') Έστω $[M] \in P(2)$ με αντιπρόσωπο

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε τις εικόνες των L_1 και L_2 μέσω του $[M]$ καθώς και την εικόνα του σημείου τομής τους.

4. Δώστε λεπτομερή απόδειξη της Πρότασης ??.

5. Δώστε λεπτομερή απόδειξη της Πρότασης ??.

6. Έστω

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(α') Δείξτε ότι $[M] \in P(2)$ βρίσκοντας τον M^{-1} .

(β') Βρείτε τα σταθερά του σημεία.

7.4 Δυϊσμός

Ο δυϊσμός είναι μία σημαντική ιδιότητα της προβολικής γεωμετρίας. Περιγράψουμε αμέσως την αρχή που την διέπει.

7.4.1 Αρχή Δυϊσμού

Έστω η ευθεία L του $\mathbb{R}P^2$ με εξίσωση $[A] \cdot X = ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$. Το προβολικό σημείο $[A] = [a : b : c]$ λέγεται *δυϊκό σημείο της προβολικής ευθείας L* . Αντιστρόφως τώρα, αν $[A] = [a : b : c] \in \mathbb{R}P^2$, τότε η ευθεία L με εξίσωση $[A] \cdot X = 0$ καλείται *δυϊκή ευθεία του $[A]$* . Συμπεραίνουμε ότι στο προβολικό επίπεδο υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία σημείων και ευθειών, κάτι που προέρχεται από την 1-2 αντιστοιχία επιπέδων του $\mathbb{R}^3$ από την αρχή και κατευθύνσεων: σε κάθε επίπεδο από την αρχή αντιστοιχούν τα δύο μοναδιαία κάθετά του διανύσματα. Δεν υπάρχει έννοια αντίστοιχη του δυϊσμού στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία.

Θυμηθείτε τώρα ότι από την Πρόταση ?? προκύπτει αμέσως ότι το σημείο τομής των ευθειών $[A] \cdot X = 0$ και $[A'] \cdot X = 0$ είναι ακριβώς το $[A \times A']$. Λέμε τότε ότι η ευθεία από τα $[A]$ και $[A']$ έχει *δυϊκές συντεταγμένες* $[A \times A']$. Δυϊκά, οι ευθείες $[A] \cdot X = 0$ και $[A'] \cdot X = 0$ τέμνονται στο $[A \times A']$.

Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη

Αρχή δυϊσμού: *Η ισχύς μιας πρότασης της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου που αναφέρεται σε σημεία και ευθείες παραμένει αναλλοίωτη αν εναλλάξουμε τα σημεία με ευθείες και τις ευθείες με σημεία.*

Λόγου χάρη, είδαμε ότι δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται (συντρέχουν) σε ένα μοναδικό σημείο. Η δυϊκή πρόταση είναι:

Πρόταση 7.4.1. *Δύο οποιαδήποτε προβολικά σημεία συντρέχουν σε μοναδική ευθεία.*

Παράδειγμα 7.4.2. Οι κορυφές του τριγώνου που ορίζουν οι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο ευθείες

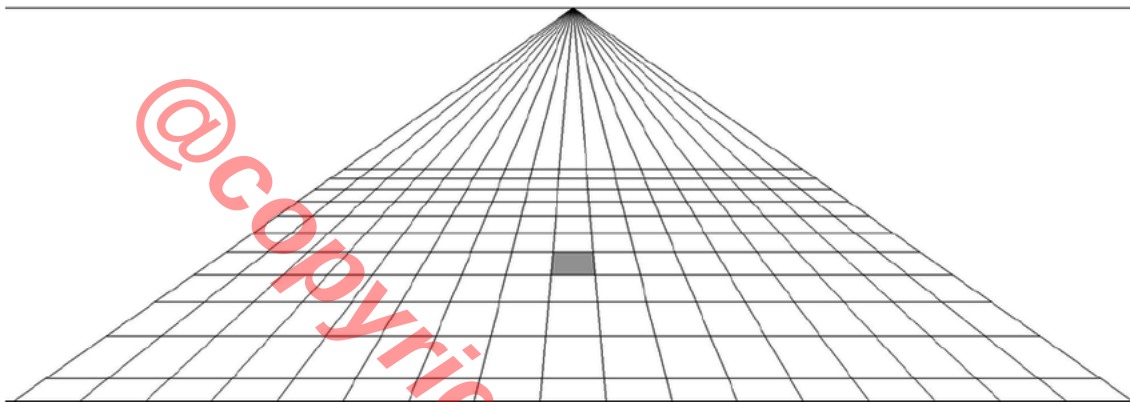
$$[A] \cdot X = 0, \quad [B] \cdot X = 0, \quad [C] \cdot X = 0,$$

είναι τα σημεία

$$[A \times B], \quad [B \times C], \quad [C \times A].$$

7.4.2 Διπλοί λόγοι και δυϊσμός

Αρχίζουμε με κάποια ορολογία. Μία συλλογή σημείων Σ του $\mathbb{R}P^2$ θα καλείται *σημειοσειρά*. Αν η Σ βρίσκεται επάνω σε μία ευθεία L , τότε η L θα καλείται *άξονας* της σημειοσειράς Σ . Το δυϊκό σύνολο P της σημειοσειράς Σ θα καλείται *δέσμη ευθειών ομόλογη με την Σ* . Αν η Σ έχει άξονα $L : [\mathbf{O}] \cdot \mathbf{X} = 0$, τότε όλες οι ευθείες της δέσμης P περνούν από το $[\mathbf{O}]$, η P καλείται *κεντρική δέσμη* και το $[\mathbf{O}]$ καλείται *κορυφή* της P .



Κεντρική δέσμη ευθειών με εγκάρσιες σε αυτήν ευθείες.

Σε μία κεντρική δέσμη μπορεί να οριστεί ο διπλός λόγος κάθε τεσσάρων ευθειών της δέσμης· κι αυτό, διότι τα αντίστοιχα δυϊκά σημεία κάθε μίας από αυτές ανήκουν στον άξονα L . (Με άλλα λόγια, τέσσερις ευθείες ανήκουν σε κεντρική δέσμη, δηλαδή συντρέχουν, αν και μόνο αν τα αντίστοιχα δυϊκά τους σημεία είναι συνευθειακά.)

Παράδειγμα 7.4.3. Έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι οι ευθείες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} &= [1 : 1 : 2] \cdot \mathbf{X} = 0, & [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} &= [3 : -1 : 4] \cdot \mathbf{X} = 0, \\ [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} &= [5 : 1 : 8] \cdot \mathbf{X} = 0, & [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{X} &= [2 : 0 : 3] \cdot \mathbf{X} = 0, \end{aligned}$$

συντρέχουν. Παίρνουμε δύο οποιαδήποτε δυϊκά σημεία, έστω τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{B}]$. Η ευθεία που περνά από αυτά είναι η

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 4x_2,$$

δηλαδή η $L : [3 : 1 : -2] \cdot \mathbf{X} = 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$[3 : 1 : -2] \cdot (5, 1, 8) = [3 : 1 : -2] \cdot (2, 0, 3) = 0$$

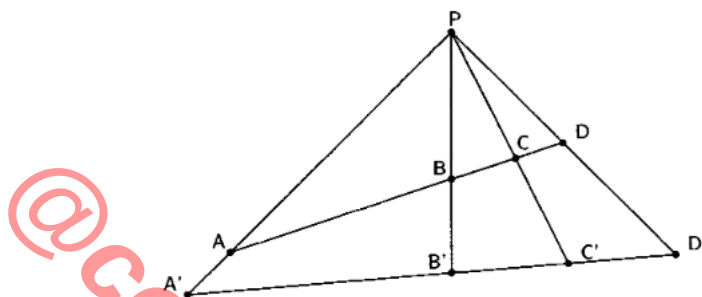
και άρα όλα τα σημεία ανήκουν στην L . Συμπεραίνουμε ότι οι δοθείσες ευθείες συντρέχουν. Το κοινό τους σημείο είναι το $[\mathbf{O}] = [3 : 1 : -2]$ που είναι και η κορυφή της δέσμης. Υπολογίζουμε τώρα τον διπλό τους λόγο. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{C} = 2 \cdot \mathbf{A} + 1 \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = (1/2) \cdot \mathbf{A} + (1/2) \cdot \mathbf{B},$$

άρα

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}] = 1/2.$$

Κάθε ευθεία που δεν περνά από την κορυφή κεντρικής δέσμης P με άξονα L καλείται *εγκάρσια ευθεία στην P* . Εάν η P είναι δέσμη τεσσάρων ευθειών, τότε κάθε εγκάρσια ευθεία συναντά την P σε τέσσερα συνευθειακά σημεία. Η επόμενη πρόταση είναι γνωστή και ως *Θεμελιώδες Θεώρημα των Διπλών Λόγων*.



Θεμελιώδες Θεώρημα των Διπλών Λόγων.

Πρόταση 7.4.4. Τα τέσσερα συνευθειακά σημεία που προσδιορίζονται από ευθεία εγκάρσια σε κεντρική δέσμη τεσσάρων ευθειών έχουν διπλό λόγο ίσο με τον διπλό λόγο της δέσμης.

Απόδειξη. Έστω ότι οι ευθείες της δέσμης έχουν δυϊκά σημεία $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ και έστω επίσης $C = pA + qB$, $D = rA + sB$. Έστω επίσης $L : [T] \cdot X = 0$ η ευθεία εγκάρσια στη δέσμη. Τα σημεία τομής της L με τις ευθείες της δέσμης είναι τα

$$[T \times A], \quad [T \times B], \quad [T \times C], \quad [T \times D].$$

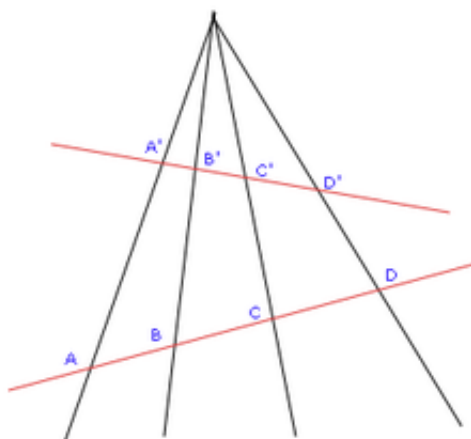
Τώρα

$$T \times C = p(T \times A) + q(T \times B), \quad T \times D = r(T \times A) + s(T \times B)$$

και συνεπώς

$$[T \times A, T \times B; T \times C, T \times D] = [A, B; C, D].$$

□



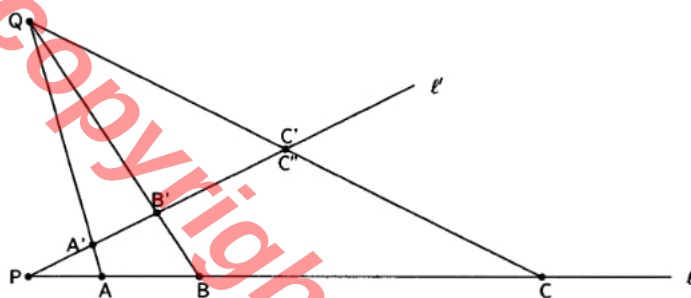
Σημεία σε θέση προοπτικής.

Πόρισμα 7.4.5. Έστω ευθείες L και L' εγκάρσιες σε κεντρική δέσμη τεσσάρων ευθειών που τέμνουν τις ευθείες της δέσμης στα $[A], [B], [C], [D]$ και $[A'], [B'], [C'], [D']$, αντίστοιχα. Τότε

$$[A, B; C, D] = [A', B'; C', D'].$$

Όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, λέμε ότι τα σημεία $[A], [B], [C], [D]$ και $[A'], [B'], [C'], [D']$, βρίσκονται σε θέση προοπτικής από την κορυφή $[O]$ της δέσμης.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί μερικό αντίστροφο του Πορίσματος 6.3.7.



Πρόταση ??.

Πρόταση 7.4.6. Έστω L και L' ευθείες που τέμνονται στο $[P]$. Αν $[A], [B], [C]$, και $[A'], [B'], [C']$, είναι τριάδες σημείων στην L και στην L' , αντίστοιχα, με

$$[P, A; B, C] = [P, A'; B', C'],$$

τότε τα $[A], [B], [C]$ και $[A'], [B'], [C']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από κάποιο σημείο $[O]$.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι οι ευθείες από τα $[A]$ και $[A']$, $[B]$ και $[B']$, $[C]$ και $[C']$, συντρέχουν. Οι ευθείες από τα $[A]$ και $[A']$, $[B]$ και $[B']$ τέμνονται σε κάποιο σημείο $[O]$. Η ευθεία από τα $[O]$, $[C]$ τέμνει την L' σε κάποιο $[C'']$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $[C'] = [C'']$. Αφού τα $[P], [A], [B], [C]$, και $[P], [A'], [B'], [C'']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[O]$, έχουμε ότι $[P, A; B, C] = [P, A'; B', C'']$. Όμως τότε από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

$$[P, A'; B', C'] = [P, A'; B', C''] \implies [C'] = [C''],$$

όπως προκύπτει από το Θεώρημα των Τεσσάρων Σημείων (Πρόταση 6.2.4). $\square$

Εφαρμογή. Έστω $[A], [B], [C], [X]$ σημεία ευθείας L και $[A'], [B'], [C'], [X']$ σημεία ευθείας L' τέτοια ώστε τα σημεία τομής

1. $[P']$ των ευθειών από τα $[A], [B']$ και από τα $[B], [A']$,
2. $[P'']$ των ευθειών από τα $[A], [C']$ και από τα $[C], [A']$,
3. $[P''']$ των ευθειών από τα $[A], [X']$ και από τα $[X], [A']$,

να είναι συνευθειακά. Τότε θα δείξουμε ότι

$$[A, B; C, X] = [A', B'; C', X'].$$

Πράγματι, έχουμε κατ'αρχάς ότι τα $[P']$, $[P'']$ και $[P''']$ είναι συνευθειακά και έστω L'' η ευθεία που τα περιέχει. Έστω $[A'']$ το σημείο τομής της L'' και της ευθείας από τα $[A]$ και $[A']$. Τότε τα $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[X]$ και $[A'']$, $[P']$, $[P'']$ και $[P''']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[A']$. Συνεπώς,

$$[A, B; C, X] = [A'', P'; P'', P'''].$$

Από την άλλη, τα $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[X']$ και $[A'']$, $[P']$, $[P'']$ και $[P''']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[A]$. Άρα,

$$[A', B'; C', X'] = [A'', P'; P'', P''']$$

και έπεται το ζητούμενο.

7.4.3 Προβολική και προοπτική θέση

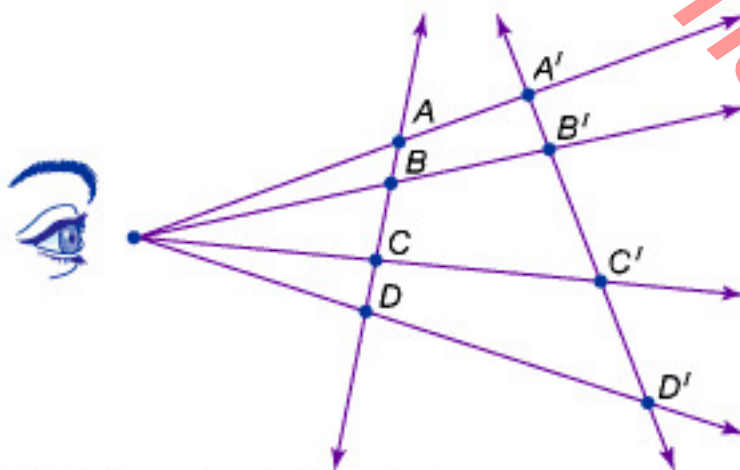
Έστω οι σημειοσειρές

$$\Sigma = ([A_1], \dots, [A_m]) \text{ και } \Sigma' = ([B_1], \dots, [B_m]).$$

Θα λέμε ότι οι Σ , Σ' είναι σε θέση προβολής και θα γράφουμε

$$\Sigma \wedge \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([A_1], \dots, [A_m]) \wedge ([B_1], \dots, [B_m]),$$

αν υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός (προβολική απεικόνιση) δια του οποίου $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$, $i = 1, \dots, m$.



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.

Σημεία σε θέση προοπτικής.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $m = 4$. Έστω τετράδες *συννευθιακών* σημείων (διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο)

$$\Sigma = ([A_1], [A_2], [A_3], [A_4]), \quad \Sigma' = ([B_1], [B_2], [B_3], [B_4]).$$

Θα λέμε ότι οι Σ, Σ' είναι σε *θέση προβολής*,

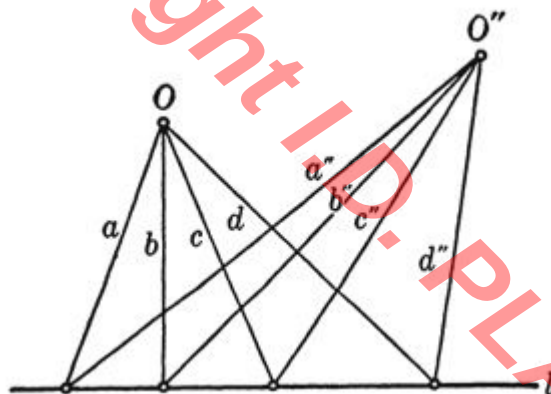
$$\Sigma \wedge \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([A_1], [A_2], [A_3], [A_4]) \wedge ([B_1], [B_2], [B_3], [B_4]),$$

αν $(A_1, A_2; A_3, A_4) = (B_1, B_2; B_3, B_4)$. Αυτό έπεται από την Πρόταση ?? . Μία ειδική περίπτωση τέτοιας προβολικής απεικόνισης είναι η *προοπτική απεικόνιση* από κάποιο σημείο $[O]$. Δηλαδή, όταν οι τετράδες σημείων βρίσκονται επάνω σε ευθείες εγκάρσιες σε κεντρική δέσμη με κορυφή το $[O]$. Γράφουμε τότε

$$\Sigma \wedge^{[O]} \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([A_1], [A_2], [A_3], [A_4]) \wedge^{[O]} ([B_1], [B_2], [B_3], [B_4]).$$

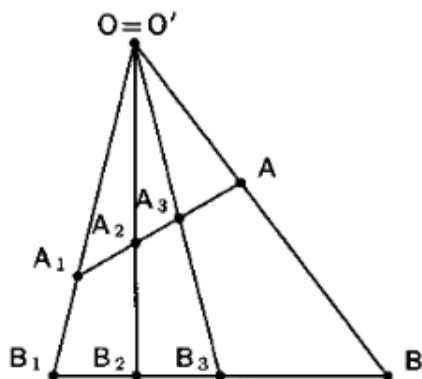
και λέμε επίσης ότι οι Σ, Σ' βρίσκονται σε *θέση προοπτικής*.

Μία θέση προοπτικής (ανάμεσα σε δύο τετράδες σημείων) είναι πάντοτε θέση προβολής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε (γιατί; δείτε το σχήμα!)



Θα δούμε όμως αμέσως παρακάτω ότι υπάρχει άμεση σχέση των θέσεων προβολής και προοπτικής. Έστω τριάδες σημείων $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$ που κείνται σε ευθείες L και L' , αντίστοιχα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Οι τριάδες βρίσκονται σε θέση προοπτικής από σημείο $[O]$.



Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο ελέγχου του πότε μία απεικόνιση προβολής είναι απεικόνιση προοπτικής.

Πρόταση 7.4.8. Έστω ευθείες L και L' που τέμνονται στο $[P]$. Τότε μια απεικόνιση προβολής μεταξύ δύο σημειοσειρών των L και L' , αντίστοιχα, είναι απεικόνιση προβολής αν και μόνο αν το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του υπό μία απεικόνιση προοπτικής. Για το αντίστροφο, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό και το σχήμα της προηγούμενης πρότασης στην κατασκευή των δύο απεικονίσεων προοπτικής. Έστω ότι η ευθεία από τα $[O]$, $[P]$ τέμνει την ευθεία από τα $[A_3]$, $[B_2]$ σε σημείο $[X']$. Εφόσον το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του, το $[O']$ πρέπει να κείται στην ευθεία από τα $[O]$, $[X']$. Αλλά τα $[O]$, $[O']$ κείνται επίσης στην (διαφορετική) ευθεία από τα $[A_1]$, $[B_1]$. Συνεπώς τα $[O]$ και $[O']$ ταυτίζονται και η θέση προβολής είναι θέση προοπτικής από το $[O]$. $\square$

Εφαρμογή. Θεωρώντας ότι το δυϊκό σύνολο μίας σημειοσειράς επάνω σε μία ευθεία είναι η κεντρική δέσμη που ορίζει και ότι μία απεικόνιση προβολής ανάμεσα σε δύο δέσμες ευθειών είναι μία αντιστοιχία που διατηρεί τους διπλούς λόγους, διατυπώνουμε τις δυϊκές των προτάσεων της ενότητας αυτής.

- Δύο δέσμες Σ και Σ' είναι σε θέση προοπτικής από μία ευθεία L αν κάθε ευθεία ℓ της Σ τέμνει την αντίστοιχη ευθεία ℓ' της Σ' επάνω στην L .
- Μία προβολική απεικόνιση μεταξύ δύο δεσμών είναι είτε μία προοπτική απεικόνιση είτε σύνθεση δύο προοπτικών απεικονίσεων.
- Μία προβολική απεικόνιση είναι προοπτική απεικόνιση αν και μόνο αν η ευθεία που ενώνει τις κορυφές των δύο δεσμών απεικονίζεται στον εαυτό της.

7.4.4 Ασκήσεις

1. Διατυπώστε το δυϊκό Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου.
2. Βρείτε τις κορυφές του τριγώνου που ορίζουν οι ευθείες

$$[1 : 1 : 1] \cdot \mathbf{X} = 0, \quad [-1 : 3 : 0] \cdot \mathbf{X} = 0 \quad \text{και} \quad [0 : 2 : 7] \cdot \mathbf{X} = 0.$$

3. Έστω τα σημεία $[0 : 1 : -2]$, $[1 : 0 : -3]$, $[-2 : 3 : 0]$, $[1 : 1 : -5]$.

- (α') Δείξτε ότι είναι συνευθειακά.
- (β') Υπολογίστε τον διπλό τους λόγο, με τη σειρά που δίνονται παραπάνω.
- (γ') Υπολογίστε την κορυφή της δέσμης που ορίζουν οι δυϊκές τους ευθείες.

7.5 Κλασικά θεωρήματα της Προβολικής Γεωμετρίας

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε δύο κλασικά θεωρήματα της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου. Το πρώτο, που οφείλεται στον Πάππο, είναι ουσιαστικά θεώρημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Το δεύτερο, που οφείλεται στον Desargues δεν έχει ανάλογο στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία.

7.5.1 Θεώρημα Πάππου

Έστω ότι η σημειοσειρά συνευθειακών σημείων $\Sigma = ([A_i])$ σχετίζεται προβολικά με τη σημειοσειρά συνευθειακών σημείων $\Sigma' = ([B_i])$, $i = 1, \dots, n$, ώστε $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$. Σταθεροποιούμε ένα i . Τότε η δέσμη ευθειών από το $[A_i]$ προς όλα τα $[B_j]$ και η δέσμη ευθειών από το $[B_i]$ προς όλα τα $[A_j]$ είναι σε θέση προβολής:

$$([A_i], [B_j]) \wedge^{[B_i]} ([A_j], [B_j]) \wedge^{[A_i]} ([B_i], [A_j]).$$

Η ευθεία $L_{i,i}$ από τα $[A_i]$, $[B_i]$ απεικονίζεται στον εαυτό της και άρα η απεικόνιση αυτή είναι μία απεικόνιση προοπτικής από μία ευθεία C_i . Εναλλάσσοντας τα i, j βλέπουμε ότι η ευθεία αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του i . Η $C = C_i$ καλείται *ευθεία του Πάππου της απεικόνισης προβολής* και έχει την εξής ιδιότητα:

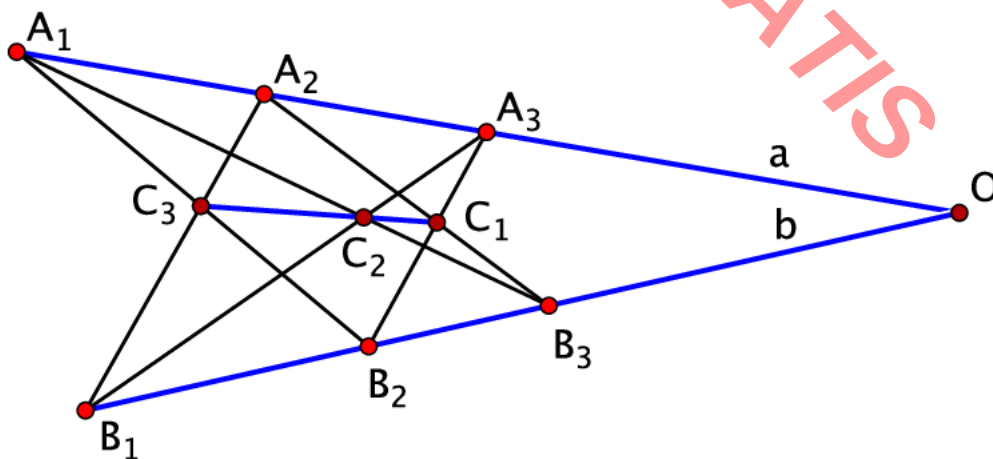
- Για κάθε $i \neq j$, η τομή των ευθειών $L_{i,j}$ και $L_{j,i}$ ανήκει στην C .

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της ευθείας του Πάππου είναι η εξής: έστω ότι μας δίνονται τριάδες σημείων $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$, που κείνται σε ευθείες L και L' , αντίστοιχα. Εάν μας δίνεται $[A] \in L$ και η ευθεία του Πάππου, τότε το σημείο $[B] \in L'$ για το οποίο ισχύει $[A_1, A_2; A_3, A] = [B_1, B_2; B_3, B]$ καθορίζεται πλήρως.

Θεώρημα 7.5.1. Πάππου. Έστω $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$, τριάδες συνευθειακών σημείων που κείνται σε διαφορετικές ευθείες. Για $i, j = 1, 2, 3$ έστω $L_{i,j}$ η ευθεία από τα $[A_i]$, $[B_j]$ και έστω ότι:

- $[C_1] = L_{2,3} \cap L_{3,2}$,
- $[C_2] = L_{1,3} \cap L_{3,1}$,
- $[C_3] = L_{1,2} \cap L_{2,1}$.

Τότε τα $[C_1], [C_2], [C_3]$, είναι συνευθειακά.

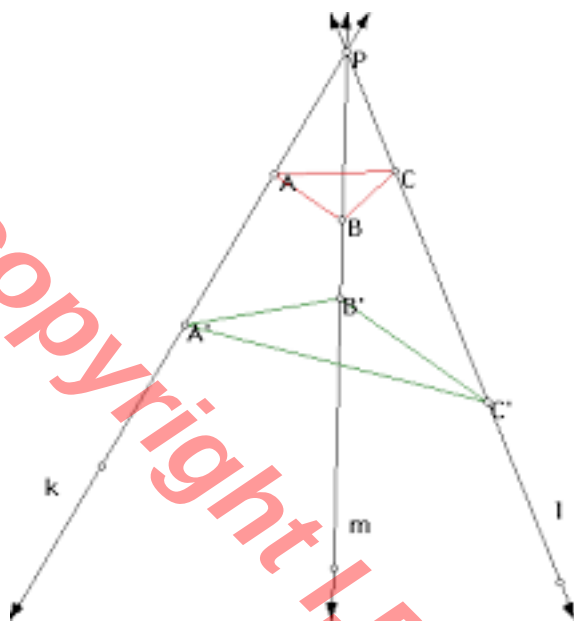


Το Θεώρημα του Πάππου.

Απόδειξη. Μία προβολική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τρία ζεύγη αντίστοιχων σημείων · στην περίπτωσή μας η αντιστοιχία είναι $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$, $i = 1, 2, 3$. Τα σημεία $[C_1], [C_2], [C_3]$ κείνται στην ευθεία του Πάππου C της απεικόνισης προβολής. $\square$

7.5.2 Θεώρημα Desargues

Το Θεώρημα Desargues αφορά σε τρίγωνα του $\mathbb{R}P^2$ τα οποία βρίσκονται σε θέση προοπτικής: οι ευθείες που ορίζουν οι αντίστοιχες κορυφές τους συντρέχουν. Σημειώνουμε ότι το θεώρημα αυτό έχει τρισδιάστατη φύση, δείτε και την Άσκηση ??..??.



Τρίγωνα σε προοπτική θέση.

Θεώρημα 7.5.2. *Εάν δύο τρίγωνα είναι σε θέση προοπτικής, τότε τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών τους είναι συνευθειακά.*

Απόδειξη. Αναφερόμαστε στο σχήμα παρακάτω. Τα τρίγωνα με κορυφές $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής. Τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών είναι τα $[C_1], [C_2], [C_3]$ τα οποία και θα δείξουμε ότι είναι συνευθειακά. Αν $[P]$ είναι το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες που ορίζουν οι αντίστοιχες κορυφές, τότε εφόσον τα $[P], [A_1]$ και $[B_1]$ είναι συνευθειακά, υπάρχουν $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_*$ με

$$P = \lambda A_1 + \lambda' B_1.$$

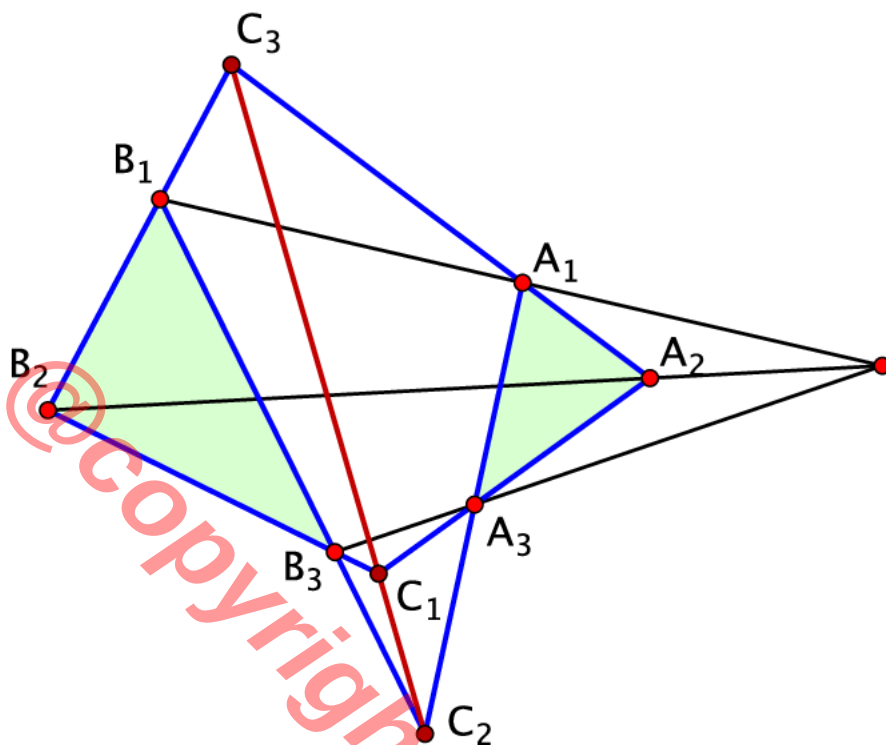
Επιλέγοντας αντιπροσώπους για τα $[A_1], [B_1]$ τα λA_1 και $\lambda' B_1$, αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε

$$P = A_1 + B_1$$

και ομοίως θα έχουμε

$$P = A_2 + B_2,$$

$$P = A_3 + B_3.$$



Το Θεώρημα Desargues: τα τρίγωνα πράσινου χρώματος βρίσκονται σε θέση προοπτικής.

Η ευθεία από τα $[A_1]$ και $[A_2]$ είναι η $[A_1 \times A_2] \cdot X = 0$ και η ευθεία από τα $[B_1]$ και $[B_2]$ είναι η $[B_1 \times B_2] \cdot X = 0$. Συνεπώς, το σημείο τομής τους είναι το

$$[(A_1 \times A_2) \times (B_1 \times B_2)].$$

Θέτουμε $C = B_1 \times B_2$ και έχουμε

$$(A_1 \times A_2) \times C = (A_1 \cdot C)A_2 - (A_2 \cdot C)A_1.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} A_1 \cdot C &= A_1 \cdot (B_1 \times B_2) \\ &= A_1 \cdot ((P - A_1) \times (P - A_2)) \\ &= (A_1 - P) \cdot (A_1 \times (P - A_2)) \\ &= -P \cdot (A_1 \times (P - A_2)) \\ &= A_1 \cdot (P \times (P - A_2)) \\ &= -A_1 \cdot (P \times A_2) \\ &= (A_1, A_2, P), \end{aligned}$$

δηλαδή το μεικτό γινόμενο των A_1 , A_2 και P . Ομοίως βρίσκουμε

$$A_2 \cdot C = (A_1, A_2, P)$$

και έτσι

$$[(A_1 \times A_2) \times (B_1 \times B_2)] = [A_1 - A_2].$$

Παρόμοια, παίρνουμε ότι

- το σημείο τομής της ευθείας από τα $[A_1], [A_3]$ και της ευθείας από τα $[B_1], [B_3]$ είναι το $[A_1 - A_3]$ και
- το σημείο τομής της ευθείας από τα $[A_2], [A_3]$ και της ευθείας από τα $[B_2], [B_3]$ είναι το $[A_2 - A_3]$.

Επειδή όμως

$$(A_1 - A_2) + (A_3 - A_1) + (A_2 - A_3) = 0,$$

τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. □

7.5.3 Ασκήσεις

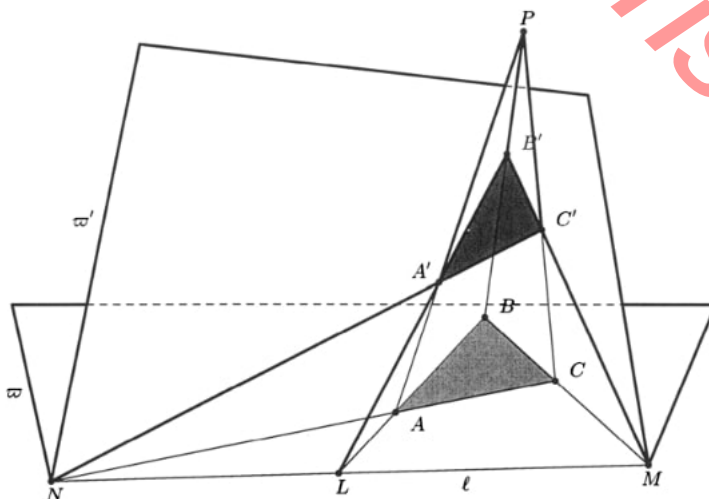
1. Δίνονται τα σημεία

$$[A_1] = [1 : 0 : -1], \quad [A_2] = [0 : 1 : 0], \quad [A_3] = [-1 : 1 : 1],$$

και τα σημεία

$$[B_1] = [0 : 2 : 1], \quad [B_2] = [1 : 0 : 0], \quad [B_3] = [3 : 4 : 2]$$

- (α') Δείξτε ότι τα $[A_i]$ καθώς και τα $[B_i], i = 1, 2, 3$, είναι συνευθειακά και διαπιστώστε ότι κείνται σε διαφορετικές ευθείες.
 - (β') Βρείτε την ευθεία του Πάππου των $[A_i], [B_i]$.
2. Στην άσκηση αυτή περιγράφουμε έναν κάπως ευκολότερο τρόπο απόδειξης του Θεωρήματος του Desargues ο οποίος οφείλεται στην ανύψωση του θεωρήματος στον τρισδιάστατο χώρο, δείτε το σχήμα.



Τρισδιάστατη απόδειξη του Θεωρήματος Desargues.

Εδώ τα τρίγωνα που βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $\mathbf{P}$ υποτίθενται ότι κείνται σε επίπεδα ϖ και ϖ' , αντίστοιχα. Έστω πρώτα ότι τα επίπεδα είναι διαφορετικά και τέμνονται σε ευθεία ℓ . Τα επίπεδα από τα $\mathbf{P}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ και από τα $\mathbf{P}, \mathbf{A}', \mathbf{B}'$ συμπίπτουν από υπόθεση. Αυτό το κοινό επίπεδο τέμνει το ϖ στην ευθεία από τα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$. Επίσης, τέμνει το ϖ' στην ευθεία από τα $\mathbf{A}'$ και $\mathbf{B}'$. Άρα οι ευθείες αυτές που τέμνονται στο $\mathbf{L}$ πρέπει να τέμνονται επίσης και σε σημείο της ℓ . Ομοίως, το ίδιο συμβαίνει και με τα άλλα σημεία $\mathbf{M}, \mathbf{N}$.

Εάν τώρα $\varpi = \varpi'$ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο επιχείρημα, καθώς η ℓ δεν μπορεί να οριστεί. Αντ' αυτού, παίρνουμε μία ευθεία ℓ από το σημείο προοπτικής $\mathbf{P}$, υποθέτουμε την ℓ να μην ανήκει στο ϖ και έστω σημεία $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \ell$ διαφορετικά του $\mathbf{P}$. Τότε, οι ευθείες από τα $\mathbf{P}_1, \mathbf{A}$ και από τα $\mathbf{P}_2, \mathbf{A}'$ κείνται στο επίπεδο που περιέχει τις ευθείες από τα $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}, \mathbf{P}_2$ και από τα $\mathbf{P}, \mathbf{A}', \mathbf{A}$. Άρα, τέμνονται σε σημείο, έστω το $\mathbf{A}''$. Ομοίως, οι ευθείες από τα $\mathbf{P}_1, \mathbf{B}$ και από τα $\mathbf{P}_2, \mathbf{B}'$ τέμνονται σε κάποιο $\mathbf{B}''$ και οι ευθείες από τα $\mathbf{P}_1, \mathbf{C}$ και από τα $\mathbf{P}_2, \mathbf{C}'$ τέμνονται σε κάποιο $\mathbf{C}''$. Τότε, το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ είναι σε θέση προοπτικής με το τρίγωνο με κορυφές $\mathbf{A}'', \mathbf{B}'', \mathbf{C}''$, με κορυφή προοπτικής το $\mathbf{P}_2$.

Έστω ϖ' το επίπεδο των $\mathbf{A}'', \mathbf{B}'', \mathbf{C}''$. Τότε $\varpi \neq \varpi'$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Desargues στην περίπτωση αυτή: η διαφορά έγκειται στο ότι η ευθεία προοπτικής των πλευρών είναι εδώ η κοινή ευθεία των ϖ και ϖ' που περιέχει τα $\mathbf{L}, \mathbf{M}$ και $\mathbf{N}$.

@copyright I.D. PLATIS

Κεφάλαιο 8

Γεωμετρία της Αντιστροφής

Η Γεωμετρία της Αντιστροφής μπορεί να θεωρηθεί σαν μία επέκταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στον επεκτεταμένο n -διάστατο πραγματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ του οποίου η Γεωμετρία κατά Klein καθορίζεται από μετασχηματισμούς που αποτελούν συνθέσεις *αντιστροφών*. Τέτοιοι μετασχηματισμοί έχει επικρατήσει να καλούνται μετασχηματισμοί Möbius προς τιμήν του μεγάλου Γερμανού Μαθηματικού A.F. Möbius.



A.F. Möbius (1790–1868).

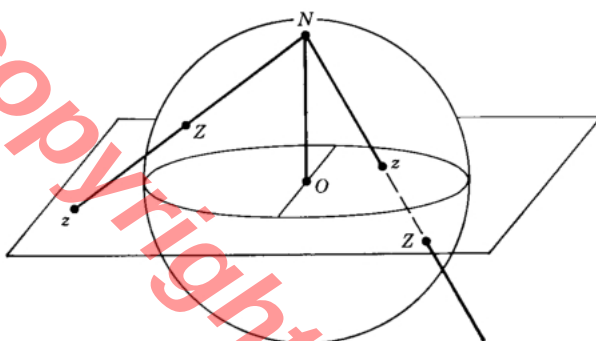
Το επεκτεταμένο $\mathbb{R}^n$ είναι ο συμπαγής χώρος που προκύπτει φυσιολογικά από την απεικόνιση της *στερεογραφικής προβολής* που ήταν γνωστή στον Κλαύδιο Πτολεμαίο. Η δε απεικόνιση της αντιστροφής σε σφαίρα, παρότι στηρίζεται εξ ολοκλήρου στη Γεωμετρική Αντιστροφή που ήταν γνωστή στους Αρχαίους Έλληνες, ορίστηκε μόλις περί τις αρχές του 19ου αι. από τον Γερμανοεβραίο Μαθηματικό Magnus. Στη Γεωμετρία της Αντιστροφής ορίζεται φυσιολογικά ένας (μετρικός) διπλός λόγος ο οποίος είναι και η μοναδική αναλλοίωτος των μετασχηματισμών Möbius. Διαμέσου της Γεωμετρίας της Αντιστροφής μπορούμε να οδηγηθούμε φυσιολογικά στην Υπερβολική Γεωμετρία και αυτός είναι ο δρόμος που θα ακολουθήσουμε εδώ.

Τέλος, αξίζει να τονιστεί πως αφηρημένες Γεωμετρίες Αντιστροφής μπορούν να οριστούν σε διάφορους μετρικούς (και ημι-μετρικούς) χώρους που συμπαγοποιούνται κατά σημείο και των οποίων η ομάδα των ομοιοθεσιών περιέχει αντιστροφές σε μετρικές σφαίρες. Αυτό αποτελεί και τη βάση της σύγχρονης *Möbius Γεωμετρίας*.

8.1 Στερεογραφική προβολή και το $\overline{\mathbb{R}^n}$

Στην Ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη στερεογραφική προβολή, την κατασκευή του επεκτεταμένου $\mathbb{R}^n$ μέσω αυτής και τις μετρικές του ιδιότητες. Η βασική ιδιότητα είναι ότι ο επεκτεταμένος πραγματικός χώρος εφοδιασμένος με τη μετρική τοπολογία που έρχεται από τη στερεογραφική προβολή και ο συνήθης Ευκλείδειος χώρος με την τυπική μετρική τοπολογία είναι συμβατοί: περιορισμένες στο $\mathbb{R}^n$ οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται.

8.1.1 Στερεογραφική προβολή



Στερεογραφική προβολή.

Έστω η σφαίρα

$$S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Εμφυτεύουμε το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^{n+1}$ ως το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$ και θεωρούμε την απεικόνιση $\mathbf{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ που απεικονίζει κάθε σημείο $(\mathbf{x}, 0) = (x_1, \dots, x_n, 0)$ του $\mathbb{R}^n$ στο σημείο τομής του ευθυγράμμιου τμήματος με άκρα $(\mathbf{x}, 0)$ και $N = (\mathbf{0}, 1)$ και της S^n . Αναλυτικά, το ευθύγραμμο τμήμα αυτό είναι το σύνολο των σημείων

$$(1-t)(\mathbf{x}, 0) + t(\mathbf{0}, 1) = ((1-t)\mathbf{x}, t), \quad t \in [0, 1]$$

και στο σημείο που τέμνει την S^n είναι

$$1 = \|((1-t)\mathbf{x}, t)\|^2 = (1-t)^2\|\mathbf{x}\|^2 + t^2 \implies t = 1, \quad \frac{\|\mathbf{x}\|^2 - 1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}.$$

Η τιμή $t = 1$ απορρίπτεται, καθώς το N είναι σταθεροποιημένο. Παίρνουμε λοιπόν για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \cdot (2\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|^2 - 1).$$

Εκ κατασκευής, η $\mathbf{S}$ είναι 1-1 και επί απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$ στην $S^n \setminus \{N\}$. Θεωρώντας ένα επιπλέον σημείο στο άπειρο το οποίο θα συμβολίζουμε με ∞ , θεωρούμε το σύνολο $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$

το οποίο καλούμε *επεκτεταμένο* $\mathbb{R}^n$. Τότε, ορίζοντας $\mathbf{S}(\infty) = N$ επεκτείνουμε τη στερεογραφική προβολή σε μία 1-1 και επί απεικόνιση $\overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow S^n$. Η απεικόνιση $\mathbf{S}$ καλείται *στερεογραφική προβολή* του επεκτεταμένου $\mathbb{R}^n$ στη σφαίρα S^n του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Για να πάρουμε την αντίστροφη της $\mathbf{S}$, έστω σημείο $\mathbf{y} \in S^n$ και θεωρούμε την ευθεία από το N που περνά από το $\mathbf{y}$. Αυτό είναι το σύνολο των σημείων της μορφής

$$(1-t)(\mathbf{0}, 1) + t(\mathbf{y}_n, y_{n+1}) = (t\mathbf{y}_n, 1 + t(y_{n+1} - 1)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Η ευθεία αυτή συναντά το $\mathbb{R}^n$ όταν

$$t = \frac{1}{1 - y_{n+1}}.$$

Άρα,

$$\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{y}) = \begin{cases} \frac{\mathbf{y}_n}{1 - y_{n+1}} & \mathbf{y} \in S^n \setminus \{N\}, \\ \infty & \mathbf{y} = N. \end{cases}$$

8.1.2 Μετρική τοπολογία του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Μέσω της στερεογραφικής προβολής μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\overline{\mathbb{R}^n}$ με την (επαγόμενη από την Ευκλείδεια μετρική τοπολογία του $\mathbb{R}^{n+1}$) μετρική τοπολογία της S^n και να καταστήσουμε το $\overline{\mathbb{R}^n}$ *συμπαγή* μετρικό χώρο. Η μετρική με την οποία εφοδιάζουμε το $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι η λεγόμενη *χορδική* μετρική, την οποία και θα συμβολίζουμε με d . Ορίζεται δε από τη σχέση

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\|, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{\mathbb{R}^n}.$$

Η d είναι μετρική: κατ' αρχάς

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \iff \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\| = 0 \iff \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = 0 \iff \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2,$$

όπου η δεύτερη ισοδυναμία ισχύει διότι η $\mathbf{S}$ είναι 1-1 και επί. Επίσης,

$$d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\| = \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_1)\| = d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$$

και τέλος, για $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \overline{\mathbb{R}^n}$,

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3) &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_3)\| \\ &\leq \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_2)\| + \|\mathbf{S}(\mathbf{x}_2) - \mathbf{S}(\mathbf{x}_3)\| \\ &= d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) + d(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3), \end{aligned}$$

με την ανισότητα να ισχύει λόγω της ισχύος της Τριγωνικής Ανισότητας στην Ευκλείδεια απόσταση.

Πρόταση 8.1.1. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)^{1/2}}.$$

Αν $\mathbf{y} = \infty$, τότε

$$d(\mathbf{x}, \infty) = \frac{2}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}}.$$

Απόδειξη. Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{y})\|^2 \\ &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathbf{S}(\mathbf{y})\|^2 - 2(\mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{y})). \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}(\mathbf{x})\|^2 &= \|\mathbf{S}(\mathbf{y})\|^2 = 1, \\ \mathbf{S}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{y}) &= \frac{(2\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|^2 - 1) \cdot (2\mathbf{y}, \|\mathbf{y}\|^2 - 1)}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)} = \frac{4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1)}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 2 \left(1 - \frac{4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + (\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1)}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)} \right) \\ &= \frac{4\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \infty) &= \|\mathbf{S}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\infty)\|^2 \\ &= 1 + 1 - 2 \frac{((2\mathbf{x}, \|\mathbf{x}\|^2 - 1) \cdot (\mathbf{0}, 1))}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1} \\ &= \frac{4}{\|\mathbf{x}\|^2 + 1}. \end{aligned}$$

□

Η τελευταία πρόταση της ενότητας αυτής μας δείχνει τη σχέση των τοπολογιών της χορδικής και της Ευκλείδειας μετρικής σε φραγμένα σύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 8.1.2. Η χορδική και η Ευκλείδεια μετρική είναι ισοδύναμες μετρικές σε φραγμένα σύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω Ω φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}^n$: υπάρχει $M = M(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}\| \leq M$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$. τότε

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)^{1/2}} \leq 2\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(Παρατηρήστε ότι η σχέση αυτή ισχύει και σε μη φραγμένα σύνολα του $\mathbb{R}^n$.) Από την άλλη,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = (1/2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\|\mathbf{x}\|^2 + 1)^{1/2}(\|\mathbf{y}\|^2 + 1)^{1/2} < (1/2)(1 + M^2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Οι ανισότητες

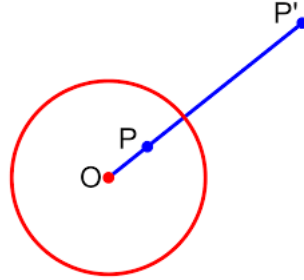
$$(1/2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq (1/2)(1 + M^2)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

αποδεικνύουν το ζητούμενο.

□

8.2 Αντιστροφές σε σφαίρες και υπερεπίπεδα του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Η έννοια της αντιστροφής σε σφαίρα είναι η φυσιολογική γενίκευση της αντιστροφής σε κύκλο που ήταν γνωστή από την αρχαιότητα.



Αντιστροφή σε κύκλο.

Στο παραπάνω σχήμα $\|\mathbf{P} - \mathbf{O}\| \cdot \|\mathbf{P}' - \mathbf{O}\| = r^2$ όπου r είναι η ακτίνα του κύκλου. Τα σημεία $\mathbf{P}, \mathbf{P}'$ είναι αντίστροφα ως προς τον κύκλο. Στην Ενότητα ?? θα μελετήσουμε την αντιστροφή σε σφαίρα του $\mathbb{R}^n$, στην Ενότητα 7.2.1 θα μελετήσουμε αντιστροφές σε υπερεπίπεδα που δεν είναι τίποτε άλλο από τις ήδη γνωστές μας ανακλάσεις, ενώ τέλος, στην Ενότητα 7.2.2 θα εξετάσουμε τη δράση των αντιστροφών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$.

8.2.1 Αντιστροφή σε σφαίρα του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Έστω $S(\mathbf{a}, r)$ σφαίρα του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, κέντρου $\mathbf{a}$ και ακτίνας $r > 0$:

$$S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}.$$

Ορίζουμε την *αντιστροφή ως προς τη σφαίρα* $S(\mathbf{a}, r)$ να είναι η απεικόνιση $\iota_{\mathbf{a}, r} : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ που αντιστοιχεί σε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$ το $\mathbf{y}$ εκείνο επάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ για το οποίο ισχύει

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = r^2, \quad (8.1)$$

ενώ στο $\mathbf{a}$ αντιστοιχεί το ∞ και στο ∞ αντιστοιχεί το $\mathbf{a}$. Το $\mathbf{a}$ καλείται *κέντρο* της αντιστροφής, το r *δύναμη* της αντιστροφής και η $S(\mathbf{a}, r)$ *σφαίρα* της αντιστροφής. Τα σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}' = \iota_{\mathbf{a}, r}(\mathbf{x})$ λέγονται *αντίστροφα*.

Υπολογίζουμε τώρα τον ακριβή τύπο της $\iota_{\mathbf{a}, r}$. Το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ έχει παραμετρική εξίσωση

$$\mathbf{y} = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{x}, \quad t \in [0, 1].$$

Οπότε,

$$\mathbf{y} - \mathbf{a} = t(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \implies \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = t\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|.$$

Από την (??) παίρνουμε τότε

$$r^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = t\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \implies t = \frac{r^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}. \quad (8.2)$$

Έστω $S = S^{n-1} = S(\mathbf{0}, 1)$ και $\iota = \iota_{\mathbf{0},1}$ με

$$\iota(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^n \quad (8.3)$$

να ορίζει την αντιστροφή στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$.

Για $\delta > 0$, $\delta \neq 1$, θεωρούμε την απεικόνιση $D_\delta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, με

$$D_\delta(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.4)$$

Μία τέτοια απεικόνιση λέγεται *ομοιοθεσία*. Κάθε ομοιοθεσία επεκτείνεται σε συνάρτηση του $\overline{\mathbb{R}^n}$ θέτοντας $D_\delta(\infty) = \infty$. Το ίδιο συμβαίνει και με κάθε μεταφορά $T_{\mathbf{c}}$ του $\mathbb{R}^n$.

Στο εξής, εκτός και αν σημειώνεται διαφορετικά, οι αντιστροφές σε σφαίρες, οι ομοιοθεσίες και οι μεταφορές θα θεωρούνται απεικονίσεις του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Πρόταση 8.2.1. Η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ ως προς σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ γράφεται ως

$$\iota_{\mathbf{a},r} = T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r} \circ T_{-\mathbf{a}}, \quad (8.5)$$

όπου $T_{\mathbf{a}}, T_{-\mathbf{a}}$ είναι οι μεταφορές του $\mathbb{R}^n$ κατά $\mathbf{a}$ και $-\mathbf{a}$, αντίστοιχα.

Απόδειξη. Για $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n}$ έχουμε

$$\begin{aligned} (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r} \circ T_{-\mathbf{a}})(\mathbf{x}) &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r})(T_{-\mathbf{a}}(\mathbf{x})) \\ &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota \circ D_{1/r})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \\ &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r \circ \iota) \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{r} \right) \\ &= (T_{\mathbf{a}} \circ D_r) \left(r \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right) \\ &= T_{\mathbf{a}} \left(r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right) \\ &= \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Σχόλιο 8.2.2. Έστω $Q_{\mathbf{a},r} = T_{\mathbf{a}} \circ D_r$. Τότε μπορούμε να γράφουμε

$$\iota_{\mathbf{a},r} = Q_{\mathbf{a},r} \circ \iota \circ Q_{\mathbf{a},r}^{-1}.$$

Θα επανέλθουμε στον τύπο αυτόν αργότερα.

Ιδιότητες της αντιστροφής σε σφαίρα

Ένα άμεσο πόρισμα του ορισμού της αντιστροφής σε σφαίρα (καθώς και της Εξίσωσης (7.2)) είναι η εξής:

Πρόταση 8.2.3. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είναι 1-1 και επί μετασχηματισμός του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Πρόταση 8.2.4. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είναι ενελεικτική:

$$\iota_{\mathbf{a},r}^2 = id.$$

Απόδειξη. Λόγω της εξίσωσης (7.2) αρκεί να δείξουμε ότι η ι είναι ενελεικτική. Πράγματι, αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^n$, τότε

$$(\iota \circ \iota)(\mathbf{x}) = \iota \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) = \mathbf{x}.$$

□

Παρατηρούμε ότι λόγω της ενελεικτικότητας έχουμε

$$\iota_{\mathbf{a},r}^{-1} = \iota_{\mathbf{a},r}.$$

Δηλαδή, για κάθε $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n}$

$$\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{y}).$$

Πρόταση 8.2.5. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είναι ομοιομορφισμός του $(\overline{\mathbb{R}^n}, d)$, όπου d είναι η χορδική μετρική.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης ?? και της Πρότασης ?? αρκεί να δείξουμε ότι η $\iota_{\mathbf{a},r}$ είναι συνεχής ως προς τη χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{R}^n}$. Τούτο ισχύει διότι η $\iota_{\mathbf{a},r}$ είναι συνεχής ως προς την Ευκλείδεια μετρική και άρα ως προς τη χορδική μετρική σε κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$. Επιπλέον έχουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} d(\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}), \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{a})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} d(\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}), \infty) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \left(\frac{2}{(1 + \|\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})\|^2)^{1/2}} \right) = 0,$$

αφού

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \|\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})\|^2 = +\infty.$$

Επίσης, για την αντιστροφή ι έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} d(\iota(\mathbf{x}), \iota(\infty)) &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} d(\iota(\mathbf{x}), \mathbf{0}) \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \left(\frac{2\|\iota(\mathbf{x})\|}{(1 + \|\iota(\mathbf{x})\|^2)^{1/2}} \right) \\ &= \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{(1 + \|\mathbf{x}\|^2)^{1/2}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Λόγω της Εξίσωσης (7.2) έχουμε τότε και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} d(\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}), \iota_{\mathbf{a},r}(\infty)) = 0.$$

□

Πρόταση 8.2.6. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ διατηρεί κατά σημείο τη σφαίρα αντιστροφής.

Απόδειξη. Έστω η $\iota_{\mathbf{a},r}$ στη σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ και έστω $\mathbf{x} \in S(\mathbf{a}, r)$, δηλαδή $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$. Τότε

$$\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{r^2} = \mathbf{x}.$$

□

Σχόλιο 8.2.7. Παρατηρήστε ότι σιχύνει και το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης: τα σταθερά σημεία της $\iota_{\mathbf{a},r}$ είναι ακριβώς τα σημεία της $S(\mathbf{a}, r)$.

Πρόταση 8.2.8. Κάθε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ απεικονίζει το εσωτερικό της $S(\mathbf{a}, r)$ στο εξωτερικό της και αντιστρόφως.

Απόδειξη. Έστω η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ στη σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ και έστω $\mathbf{x} \in \text{Int}(S(\mathbf{a}, r))$, δηλαδή $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$. Τότε,

$$\|\iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}\| = \frac{r^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} > r \implies \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x}) \in \text{Ext}(S(\mathbf{a}, r)).$$

Ομοίως αποδεικνύεται και το αντίστροφο.

□

Πρόταση 8.2.9. Έστω αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$. Για κάθε δύο αντίστροφα σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$, με $\mathbf{x} \in \text{Ext}(S(\mathbf{a}, r))$, θεωρούμε το σημείο $\mathbf{s}$ της σφαίρας

$$\mathbf{s} = S(\mathbf{a}, r) \cap [\mathbf{x}, \mathbf{x}'].$$

Τότε

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{s}\| = \frac{r\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}{r + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|}.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| &= r + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|, \\ \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{s}\| &= r. \end{aligned}$$

Τότε από το αριστερό και το δεξιό σκέλος της ισότητας

$$r^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\| = (r + \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|)(r - \|\mathbf{x}' - \mathbf{s}\|),$$

παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Πρόταση 8.2.10. Έστω αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$. Για κάθε δύο σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{a}\}$ και τα αντίστοιχα αντίστροφά τους $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$, είναι:

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\| = \frac{r^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|}.$$

Αν $\mathbf{y} = \mathbf{a}$, τότε

$$\|\mathbf{x}' - \mathbf{a}\| = \frac{r^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}.$$

Απόδειξη. Είναι

$$\mathbf{x}' - \mathbf{y}' = r^2 \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right).$$

Παίρνοντας νόρμες στο τετράγωνο έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}' - \mathbf{y}'\|^2 &= r^4 \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right\|^2 \\ &= r^4 \left(\frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} - 2 \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right) \right) \\ &= \frac{r^4}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} (\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 - 2(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a})) \\ &= \frac{r^4 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2}. \end{aligned}$$

Το δεύτερο σκέλος της πρότασης προκύπτει από τον ορισμό. □

8.2.2 Αντιστροφή σε υπερεπίπεδο του $\overline{\mathbb{R}^n}$

Υπενθυμίζουμε ότι ένα υπερεπίπεδο $W(\mathbf{A}, b)$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από την εξίσωση

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{A}\| = 1$ και $b \in \mathbb{R}$. Ένα τέτοιο υπερεπίπεδο επεκτείνεται σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$ προσθέτοντάς του το σημείο στο ∞ : $\overline{W(\mathbf{A}, b)} = W(\mathbf{A}, b) \cup \{\infty\}$. Ορίζουμε την αντιστροφή στο υπερεπίπεδο $W(\mathbf{A}, b)$ να είναι η ανάκλαση $R_{\mathbf{A}, b}$:

$$R_{\mathbf{A}, b}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + 2(b - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}))\mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (8.6)$$

Αυτή επεκτείνεται σε μία απεικόνιση $\overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ θέτοντας $R_{\mathbf{A}, b}(\infty) = \infty$.

Ιδιότητες της αντιστροφής σε υπερεπίπεδο

Η παρακάτω πρόταση συνοψίζει ορισμένες βασικές ιδιότητες των αντιστροφών σε υπερεπίπεδα και αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 8.2.11. Έστω $R_{\mathbf{A},b} : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ αντιστροφή σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A},b)}$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Τότε

- η $R_{\mathbf{A},b}$ είναι 1-1 και επί,
- η $R_{\mathbf{A},b}$ είναι ενελεικτική: $R_{\mathbf{A},b} \circ R_{\mathbf{A},b} = id.$,
- η $R_{\mathbf{A},b}$ είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{R}^n}$,
- $R_{\mathbf{A},b}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} \in \overline{W(\mathbf{A},b)}$.

8.2.3 Δράση των αντιστροφών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$

Έστω η αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ στη σφαίρα $S(\mathbf{a},r)$. Ένα υπερεπίπεδο $\overline{W}$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$ που περνά από το κέντρο $\mathbf{a}$ της σφαίρας έχει εξίσωση

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

όπου $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{A}\| = 1$. Αν $\mathbf{x} \in W$ έστω $\mathbf{y} = \iota_{\mathbf{a},r}(\mathbf{x})$. Τότε

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2}$$

και συνεπώς

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{A},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\mathbf{y} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}.$$

Ένα υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A},b)}$ που δεν περνά από το κέντρο $\mathbf{a}$ της αντιστροφής έχει εξίσωση

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = b, \quad b \neq \mathbf{a} \cdot \mathbf{A},$$

όπου $\|\mathbf{A}\| = 1$. Για $\mathbf{x} \in W(\mathbf{A},b)$ και $\mathbf{y}$ όπως προηγουμένως, είναι τότε

$$b = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \cdot \mathbf{A}.$$

Γράφουμε ισοδύναμα

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + \frac{r^2}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} - b} (\mathbf{y} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο προκύπτει

$$\left\| \mathbf{y} - \left(\mathbf{a} + \frac{r\mathbf{A}}{2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} - b)} \right) \right\|^2 = \frac{r^4}{4|\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} - b|^2},$$

η οποία παριστάνει σφαίρα που περνά από το $\mathbf{a}$. Αποδείξαμε την εξής:

Πρόταση 8.2.12. Η αντιστροφή $\iota_{a,r}$ απεικονίζει κάθε υπερεπίπεδο που περνά από το κέντρο αντιστροφής στον εαυτό του και κάθε υπερεπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής σε σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ που περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Πόρισμα 8.2.13. Η αντιστροφή $\iota_{a,r}$ απεικονίζει κάθε σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ που περνά από το κέντρο αντιστροφής σε υπερεπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Έστω τώρα σφαίρα $S(\mathbf{a}, r')$ ομόκεντρη της σφαίρας αντιστροφής. Αν $\mathbf{x} \in S(\mathbf{a}, r')$ τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r'$. Θέτουμε $\mathbf{y} = \iota_{a,r}(\mathbf{x})$. Τότε,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| = r^2/r',$$

δηλαδή το $\mathbf{y} \in S(\mathbf{a}, r^2/r')$. Αν τώρα $S(\mathbf{a}', r')$ είναι τυχαία σφαίρα, τότε $\|\mathbf{x}' - \mathbf{a}'\| = r'$ για κάθε $\mathbf{x}' \in S(\mathbf{a}', r')$. Θέτουμε πάλι $\mathbf{y} = \iota_{a,r}(\mathbf{x})$ και τότε από τη σχέση

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \iff \mathbf{x} = \mathbf{a} + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2},$$

συνεπάγεται

$$r' = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}'\| = \left\| \mathbf{a} - \mathbf{a}' + r^2 \frac{\mathbf{y} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2} \right\|.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, έπεται μετά τις πράξεις η σχέση

$$(\|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|^2 - (r')^2) \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + 2r^2(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + r^4 = 0.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $B = \|\mathbf{a} - \mathbf{a}'\|^2 - (r')^2 = 0$: η σφαίρα $S(\mathbf{a}', r')$ περνά από το κέντρο αντιστροφής. Τότε παίρνουμε

$$2r^2(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + r^4 = 0.$$

το οποίο παριστάνει υπερεπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

2. $B \neq 0$: η σφαίρα $S(\mathbf{a}', r')$ δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής. Γράφουμε

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{a}\|^2 + 2(r^2/B)(\mathbf{a} - \mathbf{a}') \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{a}) + r^4/B = 0$$

και συμπληρώνοντας το τετράγωνο προκύπτει

$$\|\mathbf{y} - (\mathbf{a} + (r^2/B)(\mathbf{a}' - \mathbf{a}))\|^2 = r^4(r')^2/B^2,$$

που είναι εξίσωση σφαίρας που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Όλα τα παραπάνω συνοψίζονται στην εξής:

Πρόταση 8.2.14. Η αντιστροφή $\iota_{a,r}$ απεικονίζει:

- κάθε σφαίρα ομόκεντρη με τη σφαίρα αντιστροφής σε σφαίρα ομόκεντρη με τη σφαίρα αντιστροφής,

- κάθε σφαίρα που περνά από το κέντρο αντιστροφής σε υπερεπίπεδο που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής,
- κάθε σφαίρα που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής σε σφαίρα που δεν περνά από το κέντρο αντιστροφής.

Έστω τώρα $R_{A,b}$ αντιστροφή σε υπερεπίπεδο $\bar{W}(A, b)$. Η απόδειξη της επόμενης πρότασης αφήνεται ως άσκηση.

Πρόταση 8.2.15. *Η αντιστροφή $R_{A,b}$ απεικονίζει σφαίρες του $\mathbb{R}^n$ σε σφαίρες του $\mathbb{R}^n$ και υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$ σε υπερεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$.*

Στο εξής, λέγοντας απλώς *αντιστροφή* του $\mathbb{R}^n$ θα εννοούμε είτε αντιστροφή σε σφαίρα είτε αντιστροφή σε υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, θα ονομάζουμε *γενικευμένη σφαίρα* είτε μία (Ευκλείδεια) σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ είτε ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Από τη συζήτηση αυτής της Ενότητας προκύπτει το εξής:

Θεώρημα 8.2.16. *Κάθε αντιστροφή του $\mathbb{R}^n$ απεικονίζει γενικευμένες σφαίρες σε γενικευμένες σφαίρες του $\mathbb{R}^n$.*

8.2.4 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι η στερεογραφική προβολή $\mathbf{S} : (\mathbb{R}^n, d) \rightarrow (S^n, e_{n+1})$ είναι ομοιομορφισμός. Εδώ e_{n+1} είναι η Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^{n+1}$ περιορισμένη στην σφαίρα S^n .
2. Έστω καμπύλες $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ και έστω $t_0 \in [a, b]$ με $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = \mathbf{x}_0$, δηλαδή, οι καμπύλες τέμνονται στο $\mathbf{x}_0$. Η γωνία θ των γ_1 και γ_2 στο $\mathbf{x}_0$ ορίζεται από τη σχέση

$$\cos \theta = \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\|\dot{\gamma}_1(t_0)\| \cdot \|\dot{\gamma}_2(t_0)\|}.$$

Οι καμπύλες $\gamma'_i = \mathbf{S}(\gamma_i)$, $i = 1, 2$ τέμνονται στο $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$. Αν θ' είναι η γωνία των γ'_1, γ'_2 στο $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0)$, τότε αποδείξτε ότι $\theta = \theta'$. Η άσκηση αυτή μας λέει ότι η στερεογραφική προβολή είναι *σύμμορφη* απεικόνιση. Θα δούμε με περισσότερη λεπτομέρεια τις σύμμορφες απεικονίσεις στην Ενότητα 7.3.2.

3. Ταυτίζοντας το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ με το $\mathbb{R}^2$, θεωρήστε το σύνολο $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Το επεκτεταμένο σύνολο των μιγαδικών αριθμών λέγεται *σφαίρα του Riemann*. Με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της Ενότητας 7.1:

(α') Ορίστε τη στερεογραφική προβολή $\mathbf{S} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow S^2$ και βρείτε την αντίστροφή της. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την περιγραφή της S^2 ως το σύνολο

$$\{(\zeta, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |\zeta|^2 + t^2 = 1\}.)$$

Αυτό θα δώσει $\mathbf{S}^{-1}(\zeta, t) = \zeta/(1 - t).$

(β') Ορίστε τη χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{C}}$.

(γ') Δείξτε ότι η S απεικονίζει γενικευμένους κύκλους του $\overline{\mathbb{C}}$ σε σφαιρικούς κύκλους. (Μπορεί να σας χρειαστούν τα εξής: κάθε Ευκλείδεια ευθεία του $\mathbb{C}$ έχει εξίσωση της μορφής $\Re(Az) = b$, όπου $A \in \mathbb{C}_*$, $|A| = 1$, και $b \in \mathbb{R}$ ενώ κάθε κύκλος $S(a, r)$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής $z = a + re^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.)

4. Συνέχεια της προηγούμενης άσκησης: ορίστε την αντιστροφή σε κύκλο και την αντιστροφή σε ευθεία του $\mathbb{C}$ και διατυπώστε προτάσεις ανάλογες με αυτές της Ενότητας 7.2 για την περίπτωση αυτή.
5. Έστω η αντιστροφή ι και $\mathbf{x} \in \text{Int}(S(\mathbf{0}, 1))$. Εκφράστε το σημείο s της Πρότασης ?? συναρτήσει του $\mathbf{x}$ λύνοντας ως προς t την εξίσωση

$$\|(1-t)\mathbf{x} + t\iota(\mathbf{x})\| = 1, \quad t \in (0, 1).$$

6. Έστω η αντιστροφή R_A στο υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, 0)}$. Αν $\mathbf{x}$ και $\mathbf{x}'$ είναι αντίστροφα σημεία, βρείτε το σημείο τομής του ευθυγράμμου τμήματος $[\mathbf{x}, \mathbf{x}']$ και του $\overline{W(\mathbf{A}, 0)}$.
7. Έστω τρία οποιαδήποτε διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ του $\overline{\mathbb{R}^2}$ (ή του $\overline{\mathbb{C}}$). Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικός γενικευμένος κύκλος που τα περιέχει. (Υπόδειξη: Αν κάποιο από τα $\mathbf{x}_i$ είναι το ∞ , τότε τα $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ περιέχονται σε Ευκλείδεια ευθεία. Αν όλα τα $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ είναι διάφορα από το ∞ , τότε είτε περιέχονται σε Ευκλείδεια ευθεία ή σε κύκλο τον οποίο και να κατασκευάσετε.)
8. Δείξτε ότι το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης ισχύει και για κάθε $\overline{\mathbb{R}^n}$, $n \geq 1$. Κάθε τρία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\overline{\mathbb{R}^n}$ περιέχονται σε μοναδικό γενικευμένο κύκλο του $\overline{\mathbb{R}^n}$.
9. Δείξτε ότι κάθε ομοιοθεσία D_δ του $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι σύνθεση αντιστροφών σε σφαίρες.
10. Αποδείξτε την Πρόταση 7.2.4.
11. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση καθώς και το Θεώρημα των Ανακλάσεων, δείξτε ότι για οποιαδήποτε τρία σημεία $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ του $\overline{\mathbb{R}^n}$, υπάρχει σύνθεση αντιστροφών A τέτοια ώστε

$$A(\mathbf{x}_1) = \infty, \quad A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}, \quad A(\mathbf{x}_3) = \mathbf{1} = (1, \mathbf{0}_{n-1}).$$

Υπόδειξη: Θεωρώντας τη δράση της μεταφοράς $T_{-\mathbf{x}_1}$, τα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ απεικονίζονται στα

$$\mathbf{0}, \quad \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}'_3 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1.$$

Θεωρώντας τη δράση της αντιστροφής ι , τα $\mathbf{0}, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3$ απεικονίζονται στα

$$\infty, \quad \mathbf{x}''_2 = \iota(\mathbf{x}'_2), \quad \mathbf{x}''_3 = \iota(\mathbf{x}'_3).$$

Με τη μεταφορά $T_{-\mathbf{x}''_2}$, τα $\infty, \mathbf{x}''_2, \mathbf{x}''_3$ απεικονίζονται στα

$$\infty, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}'''_3 = \iota(\mathbf{x}'_3) - \mathbf{x}''_2.$$

Υπάρχει τώρα στοιχείο της $O(n)$ που απεικονίζει το $\mathbf{x}'''_3$ σε σημείο $(a, \mathbf{0}_{n-1})$, $a > 0$. Αφήνοντας την ομοιοθεσία $D_{1/a}$ να δράσει στα $\infty, \mathbf{0}, (a, \mathbf{0}_{n-1})$, παίρνουμε το ζητούμενο.

12. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι οποιαδήποτε τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $z_i, i = 1, \dots, 4$ μπορούν να απεικονιστούν μέσω μιας σύνθεσης αντιστροφών στα σημεία

$$\infty, \quad 0, \quad 1, \quad X \in \mathbb{C}.$$

Ο μιγαδικός αριθμός $X = [z_1, z_2; z_3, z_4]$ είναι ο μιγαδικός διπλός λόγος των z_1, z_2, z_3, z_4 .

8.3 Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^n}$

Ορισμός 8.3.1. Ένας μετασχηματισμός Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι μία σύνθεση πεπερασμένου πλήθους αντιστροφών του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Συμβολίζουμε με $\text{GM}(n) = \text{GM}(\overline{\mathbb{R}^n})$ (απαντάται και ο συμβολισμός $\text{Inn}(\overline{\mathbb{R}^n})$) το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Το σύνολο $\text{GM}(n)$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση (Άσκηση 7.3.5.1). Από το Θεώρημα 7.2.9 έχουμε αμέσως το

Θεώρημα 8.3.2. Κάθε μετασχηματισμός Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$ απεικονίζει γενικευμένες σφαίρες σε γενικευμένες σφαίρες του $\overline{\mathbb{R}^n}$.

Ορισμός 8.3.3. Η Γεωμετρία της Αντιστροφής (κατά Klein) είναι το ζεύγος $(\overline{\mathbb{R}^n}, \text{GM}(n))$.

8.3.1 Η μορφή των μετασχηματισμών Möbius

Κάθε στοιχείο A της Ευκλείδειας ομάδας ισομετριών $E(n) = \text{O}(n) \times \mathbb{R}^n$ επεκτείνεται στο $\overline{\mathbb{R}^n}$ θέτοντας $A(\infty) = \infty$. Τα στοιχεία αυτά είναι όλα μετασχηματισμοί Möbius:

- Οποιαδήποτε μεταφορά T_a γράφεται ως η σύνθεση της ανάκλασης στο υπερεπίπεδο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$ ακολουθουμένης από την ανάκλαση στο υπερεπίπεδο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2/2$.
- Λόγω του Θεωρήματος των Ανακλάσεων, κάθε στοιχείο της $\text{O}(n)$ είναι σύνθεση ανακλάσεων, δηλαδή, αντιστροφών σε υπερεπίπεδα.

Από την άλλη, και οι ομοιοθεσίες D_δ είναι μετασχηματισμοί Möbius: $D_\delta = \iota \circ \iota_{\mathbf{0}, 1/\sqrt{\delta}}$. Λόγω της Πρότασης 7.2.1 προκύπτει τώρα η εξής:

Πρόταση 8.3.4. Δύο οποιεσδήποτε αντιστροφές σε σφαίρες του $\mathbb{R}^n$ είναι συζυγείς στην ομάδα $\text{GM}(n)$.

Απόδειξη. Έστω αντιστροφές ι_1, ι_2 σε σφαίρες S_1, S_2 , αντίστοιχα. Υπάρχουν στοιχεία $Q_1, Q_2 \in \text{GM}(n)$ τέτοια ώστε

$$\iota_i = Q_i \circ \iota \circ Q_i^{-1}, \quad i = 1, 2,$$

όπου ι είναι η αντιστροφή στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$. Τότε

$$\iota = Q_1^{-1} \circ \iota_1 \circ Q_1 = Q_2^{-1} \circ \iota_2 \circ Q_2 \implies \iota_2 = Q \circ \iota_1 \circ Q^{-1}, \quad Q = Q_2 Q_1^{-1}.$$

□

Το παρακάτω θεώρημα δίνει μία πλήρη περιγραφή των στοιχείων της $\text{GM}(n)$.

Θεώρημα 8.3.5. Κάθε $g \in \text{GM}(n)$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση των παρακάτω μετασχηματισμών του $\overline{\mathbb{R}^n}$:

- μεταφορών $T_{\mathbf{a}}$,
- στοιχείων $A \in \text{O}(n)$,
- αντιστροφής ι στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$,
- ομοιοθεσιών D_δ .

(Οι μεταφορές, περιστροφές και ομοιοθεσίες εννοούνται εδώ επεκτεταμένες στο $\overline{\mathbb{R}^n}$.)

Μας χρειάζεται το παρακάτω:

Λήμμα 8.3.6. Έστω h μετασχηματισμός Möbius που έχει μία από τις μορφές του Θεωρήματος 7.3.2 και έστω j αντιστροφή του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Τότε η σύνθεση $h \circ j$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μετασχηματισμών των μορφών του Θεωρήματος 7.3.2.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 7.2.1 εάν ο j είναι αντιστροφή σε σφαίρα, ενώ αν είναι αντιστροφή $R_{\mathbf{A},b}$ σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$, τότε μπορεί να γραφεί ως $R_{\mathbf{A},b} = T_{2b\mathbf{A}} \circ R_{\mathbf{A},0}$, δηλαδή, ως σύνθεση μιας μεταφοράς και ενός στοιχείου της $\text{O}(n)$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2. Έστω $g \in \text{GM}(n)$, $g = j_1 \circ \dots \circ j_n$, όπου j_i είναι αντιστροφές του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n .

Εάν $n = 1$ τότε ο g είναι είτε αντιστροφή $\iota_{\mathbf{a},r}$ σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ είτε ανάκλαση $R_{\mathbf{A},b}$ σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε το αποτέλεσμα από την Πρόταση 7.2.1. Στη δεύτερη περίπτωση, έχουμε από την απόδειξη του Λήμματος 7.3.3 ότι κάθε αντιστροφή σε υπερεπίπεδο μπορεί να γραφεί ως σύνθεση μίας μεταφοράς και ενός στοιχείου της $\text{O}(n)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το αποτέλεσμα ισχύει για όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι του n και γράφουμε $g = h \circ j_{n+1}$, όπου ο h είναι σύνθεση μετασχηματισμών όπως στην υπόθεση του θεωρήματος. Το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από το Λήμμα 7.3.3. $\square$

Σύγκριση της Γεωμετρίας της Αντιστροφής με άλλες Γεωμετρίες

Θεωρώντας τη δράση των στοιχείων της ομάδας $E(n)$ των Ευκλείδειων ισομετριών στο $\overline{\mathbb{R}^n}$, προκύπτει από το Θεώρημα 7.3.2 ότι η $E(n)$ είναι γνήσια υποομάδα της ομάδας $\text{GM}(n)$ των μετασχηματισμών Möbius. Συμπεραίνουμε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία (του επεκτεταμένου πραγματικού n -χώρου, δηλαδή, το ζεύγος $(\overline{\mathbb{R}^n}, \overline{E(n)})$) περιέχεται στη Γεωμετρία της Αντιστροφής. Εδώ, η ομάδα $\overline{E(n)}$ είναι η ομάδα ισομετριών της επεκτεταμένης Ευκλείδειας μετρικής $\bar{d}$ που ορίζεται ως εξής: $\bar{d}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\bar{d}(\mathbf{x}, \infty) = \bar{d}(\infty, \mathbf{x}) = +\infty$, $\bar{d}(\infty, \infty) = 0$. Η $\overline{E(n)}$ είναι η $E(n)$ θεωρούμενη με τα στοιχεία της επεκτεταμένα ώστε να αφήνουν αναλλοίωτο το σημείο στο άπειρο.

Εξετάζουμε τώρα τη σχέση της Γεωμετρίας της Αντιστροφής με την Αφφινική Γεωμετρία και για ευκολία θα περιοριστούμε στην περίπτωση $n = 2$. Ταυτίζοντας το $\mathbb{R}^2$ με το $\mathbb{C}$, έχουμε δει ότι κάθε στοιχείο της $A(2)$ είναι της μορφής

$$f(z) = Az + B\bar{z} + C, \quad A, B, C \in \mathbb{C}, \quad |A| + |B| \neq 0.$$

Τέτοιοι μετασχηματισμοί επεκτείνονται στο $\bar{\mathbb{C}}$ θέτοντας $f(\infty) = \infty$. Όμως, οι αντιστροφές σε κύκλους του $\mathbb{C}$ δεν μπορούν να γραφούν στην παραπάνω μορφή (δικαιολογήστε!). Προκύπτει συνεπώς ότι εν γένει, ο περιορισμός ενός Möbius μετασχηματισμού στο $\mathbb{C}$ δεν ανήκει στην $A(2)$. Από την άλλη, η επέκταση ενός αφφινικού μετασχηματισμού στο $\bar{\mathbb{C}}$ δεν είναι κατ' ανάγκη Möbius μετασχηματισμός. Λόγου χάρη, έστω η

$$f(z) = ((1+K)/2)z + ((1-K)/2)\bar{z}, \quad 0 < K < 1,$$

και ο μοναδιαίος κύκλος $|z| = 1$. Τότε, επειδή

$$w = f(z) \iff z = \Re(w) + i \frac{\Im(w)}{K},$$

έπεται η εξίσωση

$$1 = |z| = \left| \Re(w) + i \frac{\Im(w)}{K} \right|,$$

η οποία παριστάνει έλλειψη. Όμως αυτό δεν μπορεί να είναι δυνατόν, εφ' όσον οι μετασχηματισμοί Möbius απεικονίζουν γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους.

8.3.2 Συμμορφία των μετασχηματισμών Möbius

Μία απεικόνιση $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ λέγεται *σύμμορφη* στο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν διατηρεί τις γωνίες στο $\mathbf{x}_0$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε αυτό σημαίνει ότι ο Ιακωβιανός πίνακας $Df(\mathbf{x}_0)$ της f στο $\mathbf{x}_0$ ικανοποιεί μια σχέση της μορφής

$$(Df(\mathbf{x}_0))(Df(\mathbf{x}_0))^T = \lambda(\mathbf{x}_0)I_n,$$

όπου $\lambda(\mathbf{x}_0) \neq 0$ και I_n είναι ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας. (Δείτε την Άσκηση 7.3.5.1(θ')iiiB' για την απόδειξη.)

Θεώρημα 8.3.7. Κάθε $g \in \text{GM}(n)$ είναι σύμμορφη απεικόνιση του $\mathbb{R}^n$. Αν ο g περιέχει άρτιο αριθμό αντιστροφών, τότε διατηρεί τον προσανατολισμό. Στην αντίθετη περίπτωση, αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.2 αρκεί να αποδείξουμε το παρόν θεώρημα για τις εξής περιπτώσεις:

1. Ο g είναι μεταφορά. Αν $g = T_{\mathbf{a}}$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a} \implies DT_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = I_n,$$

ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας. Είναι $\det(DT_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = 1 > 0$ και συνεπώς οι μεταφορές διατηρούν τον προσανατολισμό.

2. O g είναι στοιχείο της $O(n)$. Αν $g = A \in O(n)$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A \implies Dg(\mathbf{x}) = A^T.$$

Είναι $\det(Dg(\mathbf{x})) = 1$ αν $A \in SO(n)$ ενώ $\det(Dg(\mathbf{x})) = -1$ όταν ο A είναι ανάκλαση σε υπερεπίπεδα από την αρχή.

3. O g είναι ομοιοθεσία. Αν $g = D_\delta$, $\delta > 0$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$D_\delta(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x} \implies D_\delta(\mathbf{x}) = \delta I_n.$$

Είναι $\det(D_\delta(\mathbf{x})) = \delta^n > 0$.

4. O g είναι η αντιστροφή ι . Αν $g = \iota$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\iota(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \implies D\iota(\mathbf{x}) = D\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \cdot \mathbf{x}\right).$$

Υπενθυμίζουμε πως αν $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμες, όπου U ανοικτό του $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $\mathbf{x} \in U$,

$$D(f \cdot g)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})^T (Df(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x}) Dg(\mathbf{x}).$$

Στην περίπτωσή μας, $f(\mathbf{x}) = 1/\|\mathbf{x}\|^2$ και $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Άρα, $Dg(\mathbf{x}) = I_n$ και

$$Df(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4} D(\|\mathbf{x}\|^2) = -\frac{2\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4}.$$

Συνεπώς,

$$D\iota(\mathbf{x}) = -\frac{2\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4} + \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} I_n = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} (I_n - 2Q(\mathbf{x})), \quad Q(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Παρατηρούμε ότι ο $Q(x)$ είναι συμμετρικός και

$$Q^2(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x}^T \mathbf{x})(\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^4} = \frac{\mathbf{x}^T (\mathbf{x} \mathbf{x}^T) \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^4} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2 (\mathbf{x}^T \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^4} = Q(\mathbf{x}).$$

Άρα,

$$(D\iota(\mathbf{x}))(D\iota(\mathbf{x}))^T = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4} (I_n - 2Q(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^4} I_n$$

και η ι είναι σύμμορφη. Παίρνοντας τώρα ορίζουσες έχουμε ότι

$$(\det(D\iota(\mathbf{x})))^2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{4n}} \implies \det(D\iota(\mathbf{x})) = \pm \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n}}.$$

Λόγω της συνεκτικότητας του $\mathbb{R}_*^n$ η ορίζουσα μπορεί να είναι είτε μόνο θετική είτε μόνο αρνητική. Για να διαπιστώσουμε το πρόσημο, εξετάζουμε την τιμή της ορίζουσας το σημείο $\mathbf{1} = (1, 0, \dots, 0)$:

$$D\iota(\mathbf{1}) = I_n - 2Q(\mathbf{1}) = J,$$

όπου ο J είναι διγώνιος $n \times n$ πίνακας με $j_{11} = -1$ και $j_{ii} = 1$ για κάθε $i > 1$. Συνεπώς η ορίζουσά του είναι -1 και συμπεραίνουμε ότι

$$D\iota(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^{2n}},$$

και άρα η ι αντιστρέφει τον προσανατολισμό. $\square$

Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφερθεί ότι ισχύει και το εξής καταπληκτικό (και βαθύ) αποτέλεσμα του Liouville: Σε διαστάσεις $n > 2$, όλες οι σύμμορφες απεικονίσεις του $\mathbb{R}^n$ είναι μετασχηματισμοί Möbius. Στη διάσταση 2 κάτι τέτοιο δεν ισχύει: οι ολόμορφες (και οι αντιολόμορφες) απεικονίσεις του $\mathbb{C}$ είναι όλες σύμμορφες.

Το Θεώρημα ?? μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 8.3.8. Το σύνολο των μετασχηματισμών Möbius του $\overline{\mathbb{R}^n}$ που διατηρούν τον προσανατολισμό θα συμβολίζεται με $M(n)$.

Το σύνολο $M(n)$ είναι ομάδα, δείτε την Άσκηση 7.3.5.??.

8.3.3 Μετρικός διπλός λόγος

Έστω d η χορδική μετρική στο $\mathbf{R}^n$. Έστω τετράδα σημείων $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4 \in \overline{\mathbf{R}^n}$. Καθορίζοντας τη σειρά που παίρνουμε αυτά τα σημεία καθορίζουμε και έναν προσανατολισμό στην τετράδα. Λόγου χάρη, γράφοντας $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ εννοούμε την τετράδα με το $\mathbf{x}_1$ να είναι το πρώτο σημείο, το $\mathbf{x}_2$ το δεύτερο, κ.ο.κ. Για οποιαδήποτε προανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ τεσσάρων διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων, ο μετρικός διπλός λόγος της $\mathbf{p}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{d(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_2) \cdot d(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1)}{d(\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_1) \cdot d(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2)}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι αρκεί να χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = \frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|},$$

με την παραδοχή (η οποία τώρα είναι απολύτως δικαιολογημένη) $\infty : \infty = 1$ (δείτε την Άσκηση 7.3.5.??). Ισχύει το εξής λήμμα (δείτε την Άσκηση 7.3.5.??).

Λήμμα 8.3.9. Εάν $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα σημείων του $\mathbf{R}^n$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, τότε οι μετρικοί διπλοί λόγοι $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l)$, $(i, j, k, l) \in S_4$, είναι συναρτήσεις των μετρικών διπλών λόγων

$$\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4).$$

Θεώρημα 8.3.10. Μία απεικόνιση $f : \overline{\mathbf{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbf{R}^n}$ είναι μετασχηματισμός Möbius αν και μόνο αν διατηρεί τον μετρικό διπλό λόγο κάθε τετράδας σημείων του $\overline{\mathbf{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο.

Απόδειξη. Για το ευθύ, αρκεί λόγω του Θεωρήματος 7.3.2 να δείξουμε ότι οι μεταφορές, τα στοιχεία της $O(n)$, οι ομοιοθεσίες και η αντιστροφή στη σφαίρα $S(\mathbf{0}, 1)$ διατηρούν τον μετρικό διπλό λόγο. Δείχνουμε εδώ μόνο το τελευταίο και αφήνουμε τα υπόλοιπα στην Άσκηση 7.3.5.?? . Αν λοιπόν ι είναι η αντιστροφή στην $S(\mathbf{0}, 1)$, τότε χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.2.3 έχουμε

$$\begin{aligned} (\iota(\mathbf{x}_1), \iota(\mathbf{x}_2); \iota(\mathbf{x}_3), \iota(\mathbf{x}_4)) &= \frac{\|\iota(\mathbf{x}_4) - \iota(\mathbf{x}_2)\| \cdot \|\iota(\mathbf{x}_3) - \iota(\mathbf{x}_1)\|}{\|\iota(\mathbf{x}_4) - \iota(\mathbf{x}_1)\| \cdot \|\iota(\mathbf{x}_3) - \iota(\mathbf{x}_2)\|} \\ &= \frac{\frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_4\| \cdot \|\mathbf{x}_2\|} \cdot \frac{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_3\| \cdot \|\mathbf{x}_1\|}}{\frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_4\| \cdot \|\mathbf{x}_1\|} \cdot \frac{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|}{\|\mathbf{x}_3\| \cdot \|\mathbf{x}_2\|}} \\ &= \frac{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|}{\|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_1\| \cdot \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\|} \\ &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4). \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο, συνθέτοντας την f εν ανάγκη με έναν μετασχηματισμό Möbius, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(\infty) = \infty$. Για $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, 4$, η σχέση

$$\frac{(\infty, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4)}{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \infty, \mathbf{x}_4)} = \frac{(\infty, f(\mathbf{x}_2); f(\mathbf{x}_3), f(\mathbf{x}_4))}{(f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2); \infty, f(\mathbf{x}_4))}$$

γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\|}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|} = \frac{\|f(\mathbf{x}_3) - f(\mathbf{x}_4)\|}{\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_4\|}.$$

Προκύπτει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} = k > 0.$$

Άρα, ο f είναι Ευκλείδεια ισομετρία ή ομοιοθεσία και συνεπώς μετασχηματισμός Möbius. $\square$

Πόρισμα 8.3.11. Έστω $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ και $\mathbf{p}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4\}$ προσανατολισμένες τετράδες σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο. Αν πάρχει $f \in \text{GM}(n)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}'_i$, $i = 1, \dots, 4$, τότε

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2; \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4) = \mathbb{X}(\mathbf{p}').$$

Το επόμενο θεώρημα είναι το Θεμελιώδες Θεώρημα των Διπλών Λόγων.

Θεώρημα 8.3.12. Έστω $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ και $\mathbf{p}' = \{\mathbf{x}'_1, \mathbf{x}'_2, \mathbf{x}'_3, \mathbf{x}'_4\}$ προσανατολισμένες τετράδες σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο. Υπάρχει $f \in \text{GM}(n)$ τέτοιος ώστε $f(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathbf{p}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2; \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4) = \mathbb{X}_1(\mathbf{p}'), \\ \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_3; \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_4) = \mathbb{X}_2(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Το ευθύ προκύπτει από το Πόρισμα 7.3.4 (αναλλοίωτο των μετρικών διπλών λόγων). Για το αντίστροφο, μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ώστε

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 = \infty, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{y}_3 = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x}_4 = \mathbf{X}, \quad \mathbf{y}_4 = \mathbf{Y},$$

me $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}_*^n \setminus \{\mathbf{1} = \mathbf{e}_1\}$ (δείτε την Άσκηση 7.2.3.??). Από τις ισότητες των διπλών λόγων παίρνουμε τότε, αντίστοιχα

$$\|\mathbf{X}\| = \|\mathbf{Y}\|, \quad \|\mathbf{X} - \mathbf{1}\| = \|\mathbf{Y} - \mathbf{1}\|.$$

Αν $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$, τότε υψώνοντας τη δεύτερη σχέση στο τετράγωνο και χρησιμοποιώντας την πρώτη ισότητα προκύπτει $X_1 = Y_1$. Επίσης, αν $\mathbf{X}_{n-1} = (X_2, \dots, X_n)$ και $\mathbf{Y}_{n-1} = (Y_2, \dots, Y_n)$, τότε πάλι από την πρώτη σχέση παίρνουμε $\|\mathbf{X}_{n-1}\| = \|\mathbf{Y}_{n-1}\|$. Συνεπώς, υπάρχει $A \in O(n-1)$ τέτοιος ώστε $\mathbf{X}_{n-1}A = \mathbf{Y}_{n-1}$. Έπεται ότι ο μετασχηματισμός $\phi: \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ με

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^n},$$

είναι μετασχηματισμός Möbius με $\phi(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$. □

8.3.4 Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας της Αντιστροφής

Το παρακάτω θεώρημα είναι το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας της Αντιστροφής:

Θεώρημα 8.3.13. *Η $g \in \text{GM}(n)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}^n}$: αν $\mathbf{x}_i$ και $\mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$, είναι τριάδες διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $g \in \text{GM}(n)$ τέτοιος ώστε*

$$g(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Εάν g' είναι ένας άλλος μετασχηματισμός που ικανοποιεί τις παραπάνω σχέσεις, τότε $g' \in gH$ όπου H υποομάδα της $\text{GM}(n)$ συζυγής με την $O(n-1)$. Εάν $n = 2$, τότε είτε $g = g'$, είτε $g' = gh$ όπου h συζυγής με ανάκλαση σε ευθεία. Εάν $n = 1$ τότε ο g είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Άσκηση 7.2.3.?? υπάρχουν μετασχηματισμοί Möbius h_1 και h_2 τέτοιοι ώστε

$$h_1(\mathbf{x}_1) = h_2(\mathbf{y}_1) = \infty, \quad h_1(\mathbf{x}_2) = h_2(\mathbf{y}_2) = \mathbf{0}, \quad h_1(\mathbf{x}_3) = h_2(\mathbf{y}_3) = \mathbf{1}.$$

Ο μετασχηματισμός $g = h_2^{-1} \circ h_1 \in M(\overline{\mathbb{R}^n})$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις του θεωρήματος. Έστω ότι υπήρχε g' με $g'(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$. Τότε ο μετασχηματισμός $f = h_1 g^{-1} g' h_1^{-1}$ σταθεροποιεί τα σημεία ∞ , $\mathbf{0}$, $\mathbf{1} = \mathbf{e}_1$ και άρα $f \in O(n-1)$. Συνεπώς, $g^{-1} g' = h_1^{-1} f h_1 = h$ που είναι στοιχείο που σταθεροποιεί τα $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$. Παίρνουμε έτσι $g' = gh$ (δείτε και την Άσκηση 7.3.5.??).

Εάν $n = 2$ τότε $h = id$. αν $f = id$. και $h = h_1^{-1} r h_1$ αν $f = r$, η ανάκλαση στην $x_2 = 0$. Προκύπτει λοιπόν ότι είτε $g' = g$ είτε $g' = gh$ όπου h συζυγής με ανάκλαση. Για $n = 1$ είναι τώρα προφανές. □

8.3.5 Ασκήσεις

1. Δείξτε με τον ορισμό ότι το σύνολο $\text{GM}(n)$ των Möbius μετασχηματισμών του $\overline{\mathbb{R}^n}$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση.
2. Η άσκηση αυτή δικαιολογεί τη συνθήκη για τις διαφορίσιμες σύμμορφες απεικονίσεις. Έστω $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμικός μετασχηματισμός και $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ διανύσματα του $\mathbb{R}_*^n$. Η γωνία $\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ των $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\cos(\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

Συνεπώς ο A διατηρεί τις γωνίες αν για οποιαδήποτε μη μηδενικά $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ ισχύει ότι

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|} = \frac{A(\mathbf{v}) \cdot A(\mathbf{w})}{\|A(\mathbf{v})\| \cdot \|A(\mathbf{w})\|}. \quad (8.7)$$

(Υπενθυμίζουμε πως $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}A$ εφόσον τα $\mathbf{x}$ θεωρούνται διανύσματα γραμμές.) Θα δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας A του μετασχηματισμού ικανοποιεί τη σχέση

$$AA^T = A^T A = \lambda I, \quad \text{για κάποιο } \lambda \neq 0.$$

Έστω η κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Για $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i, \mathbf{w} = \mathbf{e}_j, i \neq j$ παίρνουμε από την Εξίσωση (7.4) ότι $A(\mathbf{e}_i) \cdot A(\mathbf{e}_j) = 0$ και συνεπώς οι γραμμές του A είναι ορθογώνια μεταξύ τους διανύσματα. Αυτό σημαίνει όμως ότι τα (ij) -στοιχεία του AA^T είναι όλα 0 για $i \neq j$. Κατά συνέπεια, ο AA^T είναι διαγώνιος πίνακας. Τώρα πάλι για $i \neq j$ έχουμε

$$0 = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) = (A(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)) \cdot (A(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j)) = (A^T A)_{ii} - (A^T A)_{jj}$$

και συμπεραίνουμε ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του AA^T είναι ίσα με έναν αριθμό $\lambda \neq 0$.

3. Έστω το σύνολο $\text{M}(n)$ των μετασχηματισμών Möbius που διατηρούν τον προσανατολισμό. Δείξτε ότι είναι υποομάδα της $\text{GM}(n)$.
4. (Κανονικοποίηση των γενικευμένων σφαιρών). Δείξτε τα ακόλουθα.

(α') Αν Σ είναι μία σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ στο $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $f \in \text{M}(n)$ με $f(\Sigma) = S(\mathbf{0}, 1)$. (Υπόδειξη: Με τη μεταφορά $T_{-\mathbf{a}}$ απεικονίστε την Σ στην $S(\mathbf{0}, r)$. Εφαρμόστε κατόπιν την ομοιοθεσία $D_{1/r}$).

(β') Αν P είναι ένα υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ στο $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $g \in \text{M}(n)$ με $g(P) = \overline{W(\mathbf{e}_1, 0)}$. (Υπόδειξη: Γράψτε την εξίσωση του υπερεπιπέδου ως $(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{A} = 0$. Με τη μεταφορά $T_{-\mathbf{a}}$ απεικονίστε το υπερεπίπεδο στο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} = 0$. Πάρτε κατόπιν το στοιχείο εκείνο της $O(n)$ που απεικονίζει το $\mathbf{A}$ σε διάνυσμα $\delta \mathbf{e}_1, \delta > 0$).

(γ') Δείξτε ότι υπάρχει $h \in \text{GM}(n)$ με $h(S(\mathbf{0}, 1)) = \overline{W(\mathbf{e}_1, 0)}$. (Υπόδειξη: Κάνοντας πρώτα κατάλληλη μεταφορά, χρησιμοποιήστε κατόπιν την Πρόταση 7.2.5).

(δ') Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω συμπεράνετε το Θεώρημα 7.2.9, στο οποίο τώρα μπορεί να προστεθεί η εξής πρόταση: *Εάν Σ και Σ' είναι γενικευμένες σφαίρες του $\overline{\mathbb{R}^n}$, τότε υπάρχει $\phi \in \text{GM}(n)$ με $\phi(\Sigma) = \Sigma'$.*

5. Δείξτε ότι το σύνολο $\text{GM}(1)$ αποτελείται από 1-1 και επί μετασχηματισμούς f του $\overline{\mathbb{R}}$ της μορφής

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

(Εδώ θεωρούμε πάντοτε ότι $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$). Δείξτε επίσης ότι η ομάδα $M(1)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς της παραπάνω μορφής με $ad - bc > 0$. (Υπόδειξη: Ονομάστε G το σύνολο των f της παραπάνω μορφής και δείξτε ότι είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Αν τώρα $f \in G$, διακρίνετε δύο περιπτώσεις: α) Αν $c = 0$, τότε $f(x) = (a/d)x + (b/d)$ που είναι σύνθεση Ευκλείδειων ισομετριών και ομοιοθεσιών του $\mathbb{R}$. β) Αν $c \neq 0$ τότε

$$f(x) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + (d/c)},$$

που είναι σύνθεση ισομετριών, ομοιοθεσιών και της αντιστροφής στο 0. Άρα, έχουμε ότι $G \subset \text{GM}(1)$. Από την άλλη, κάθε στοιχείο του $\text{GM}(1)$ μπορεί να γραφεί ως στοιχείο του G).

6. Δείξτε την ισοδυναμία των ορισμών του μετρικού διπλού λόγου τεσσάρων σημείων του $\overline{\mathbb{R}^n}$.
7. Δείξτε ότι οι μεταφορές, τα στοιχεία της $O(n)$ και οι ομοιοθεσίες διατηρούν τον μετρικό διπλό λόγο τεσσάρων σημείων.
8. Αποδείξτε ότι κάθε μετασχηματισμός Möbius f με $f(\infty) = \infty$ είναι της μορφής

$$f(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}A + \mathbf{a}, \quad A \in O(n), \delta > 0.$$

(Υπόδειξη: Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος ??).

9. Δείξτε ότι κάθε Möbius μετασχηματισμός του $\overline{\mathbb{R}^n}$ που κρατά σταθερά τα σημεία ∞ , $\mathbf{0}$, $\mathbf{1} = \mathbf{e}_1$, είναι στοιχείο της $O(n-1)$ όπως αυτή θεωρείται με την εμβύθισή της

$$O(n-1) \ni A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in O(n).$$

Συμπεράνετε πως αν $n = 2$, τότε ένας τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να είναι είτε ο ταυτοτικός είτε η ανάκλαση στην ευθεία $x_2 = 0$. Υπενθυμίζουμε ότι εάν μία ομάδα G δρα επάνω σε ένα σύνολο X και $x \in X$, τότε ο σταθεροποιητής $\text{Stab}(x)$ είναι η υποομάδα

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, έχουμε την $\text{GM}(n)$ να δρα στο σύνολο

$$(\overline{\mathbb{R}^n})^3 \setminus \{\text{διαγώνιοι}\}.$$

Το αποτέλεσμα της άσκησης μπορεί να γραφεί και ως

$$\text{Stab}((\infty, \mathbf{0}, \mathbf{1})) = \text{O}(n-1).$$

Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 7.3.5.?? για να συμπεράνετε πως για τυχαία διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, είναι

$$\text{Stab}((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)) = h\text{O}(n-1)h^{-1}, \quad h \in \text{GM}(n),$$

δηλαδή, ο σταθεροποιητής των $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ είναι ομάδα συζυγής με την $\text{O}(n-1)$.

10. Αποδείξτε το Λήμμα ??.

11. (Θεώρημα του Πτολεμαίου.) Έστω $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, 4$ διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία του $\overline{\mathbb{R}^n}$. Θεωρήστε μία οποιαδήποτε μετάταξη $(1, 2, 3, 4) \mapsto (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4))$ της S_4 και την τετράδα $\mathbf{p} = \{\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \mathbf{x}_{\sigma(3)}, \mathbf{x}_{\sigma(4)}\}$. Θεωρήστε επίσης τους μετρικούς διπλούς λόγους της $\mathbf{p}$:

$$\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(2)}; \mathbf{x}_{\sigma(3)}, \mathbf{x}_{\sigma(4)}) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) = (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \mathbf{x}_{\sigma(3)}; \mathbf{x}_{\sigma(2)}, \mathbf{x}_{\sigma(4)}).$$

(α') Δείξτε ότι $\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) + \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) \geq 1$. (Υπόδειξη: Κανονικοποιήστε ώστε

$$\mathbf{x}_{\sigma(1)} = \infty, \quad \mathbf{x}_{\sigma(2)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_{\sigma(3)} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{x}_{\sigma(4)} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathbf{p}) + \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) &= \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{1}\| \\ &\geq \|\mathbf{x} - (\mathbf{x} - \mathbf{1})\| = 1. \end{aligned}$$

Δικαιολογήστε το κάθε βήμα σας.)

(β') Γράψτε την παραπάνω ανισότητα ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{\sigma(4)} - \mathbf{x}_{\sigma(1)}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\sigma(3)} - \mathbf{x}_{\sigma(2)}\| &\leq \|\mathbf{x}_{\sigma(4)} - \mathbf{x}_{\sigma(2)}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\sigma(3)} - \mathbf{x}_{\sigma(1)}\| \\ &\quad + \|\mathbf{x}_{\sigma(4)} - \mathbf{x}_{\sigma(3)}\| \cdot \|\mathbf{x}_{\sigma(2)} - \mathbf{x}_{\sigma(1)}\|. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας τα $\mathbf{x}_{\sigma(1)}$ κορυφές τετραπλεύρου, ερμηνεύστε γεωμετρικά την παραπάνω ανισότητα που είναι γνωστή ως *Ανισότητα του Πτολεμαίου*.

(γ') Αποδείξτε το *Θεώρημα του Πτολεμαίου*: Η ισότητα στην Ανισότητα του Πτολεμαίου ισχύει τότε και μόνον τότε όταν τα $\mathbf{x}_i$ κείνται σε γενικευμένο κύκλο του $\overline{\mathbb{R}^n}$. (Υπόδειξη: Στην ανισότητα του πρώτου ερωτήματος η ισότητα ισχύει τότε και μόνον τότε όταν τα $\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{1}$ είναι συνευθειακά.)

8.4 Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}}$

Η Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}}$ είναι η γεωμετρία (κατά Klein) $(\overline{\mathbb{R}}, \text{GM}(1))$. Η ομάδα $\text{GM}(1)$ έχει μια ενδιαφέρουσα περιγραφή την οποία εξετάζουμε αμέσως παρακάτω.

8.4.1 Η ομάδα $\text{GM}(1)$

Στο $\overline{\mathbb{R}}$ θεωρούμε απεικονίσεις της μορφής

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (8.8)$$

όπου $f(\infty) = a/c$, $f(-d/c) = \infty$ (αν $c = 0$ τότε έχουμε μόνο τη σχέση $f(\infty) = \infty$). Τέτοιου είδους απεικονίσεις είναι 1-1 και επί: η αντίστροφη f^{-1} της f δίνεται από την

$$f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a},$$

και $f^{-1}(\infty) = -d/c$, $f^{-1}(a/c) = \infty$. Κάθε τέτοια f είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{R}}$ (δείτε την Άσκηση 7.4.3.1(θ')iiiA). Επίσης, το σύνολο G των μετασχηματισμών της μορφής (7.5) αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων (δείτε την Άσκηση 7.4.3.??). Παρατηρούμε τώρα ότι όλοι οι παρακάτω μετασχηματισμοί, θεωρούμενοι ως μετασχηματισμοί του $\overline{\mathbb{R}}$, είναι στοιχεία της G :

- Μεταθέσεις: $T_a(x) = x + a$, $a \in \mathbb{R}$,
- Ανάκλαση στο 0: $R(x) = -x$,
- Ομοιοθεσίες: $D_\delta(x) = \delta x$, $\delta > 0$,
- Αντιστροφή στο 0: $\iota(x) = 1/x$.

Άρα, $G \subset \text{GM}(1)$. Επίσης, κάθε $f \in G$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(x) = \begin{cases} (a/d)x + b/d & \text{όταν } c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+(d/c)} & \text{όταν } c \neq 0, \end{cases}$$

που είναι σύνθεση όλων των παραπάνω μετασχηματισμών. Συμπεραίνουμε την παρακάτω:

Πρόταση 8.4.1. Η ομάδα $\text{GM}(1)$ των μετασχηματισμών Möbius της επεκτεταμένης πραγματικής ευθείας αποτελείται από μετασχηματισμούς της μορφής (7.5).

8.4.2 Η προβολική ομάδα $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ και η $\text{GM}(1)$

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της προβολικής ομάδας $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ από την Ενότητα 6.2. Στην ομάδα $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ ορίζουμε τη σχέση $\sim$ ως εξής: για κάθε $A, B \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$, $A \sim B$ αν και μόνο αν $A = \lambda B$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_*$. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ των τροχιών

$$\text{PGL}(2, \mathbb{R}) = \{[A] \mid A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})\}$$

αποτελεί ομάδα με πράξη $[A] \cdot [B] = [AB]$. Υπενθυμίζουμε επίσης πως αν $[A] \in \text{PGL}(2, \mathbb{R})$ και

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

τότε γράφουμε

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Υπάρχει απεικόνιση $\Phi : \text{PGL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{GM}(1)$ που δίνεται από την

$$\Phi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = f \mid f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}. \quad (8.9)$$

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται στην Άσκηση 7.4.3.??.

Πρόταση 8.4.2. Η απεικόνιση Φ της (??) είναι ισομορφισμός ομάδων.

Κατά συνέπεια, η $\text{GM}(1)$ ταυτίζεται με την $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$ που είναι η ομάδα $P(1)$ των μετασχηματισμών της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό εφόσον υπάρχει ταύτιση του κύκλου $S^1 = \overline{\mathbb{R}}$ και της $\mathbb{R}P^1$. Προκύπτει λοιπόν το εξής:

Θεώρημα 8.4.3. Η Γεωμετρία της Αντιστροφής $(\overline{\mathbb{R}}, \text{GM}(1))$ είναι η Γεωμετρία της Προβολικής Ευθείας $(\mathbb{R}P^1, P(1))$.

Υπάρχει και μία άλλη περιγραφή της $\text{GM}(1)$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Psi : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}(2, \mathbb{R}), \quad A \mapsto [A].$$

Η Ψ είναι μονομορφισμός ομάδων και $\ker(\Psi) = \{I, -I\}$. Συνεπώς, από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Ομάδων έχουμε την εξής:

Πρόταση 8.4.4.

$$\text{GM}(1) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\} := \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Σχόλιο 8.4.5. Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί Möbius του $\overline{\mathbb{R}}$ που διατηρούν τον προσανατολισμό είναι οι μεταφορές και οι ομοιοθεσίες· η ανάκλαση $x \mapsto -x$ και η αντιστροφή $x \mapsto 1/x$ αλλάζουν τον προσανατολισμό. Επειδή κάθε στοιχείο της $\text{GM}(1)$ είναι σύνθεση αντιστροφών, έχουμε ότι το υποσύνολο της $\text{GM}(1)$ που αποτελείται από στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό, είναι το σύνολο των στοιχείων που είναι συνθέσεις αρτίου πλήθους ανακλάσεων. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με $M(1)$ ή $\text{PSL}^+(2, \mathbb{R})$. Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι αν $f \in \text{GM}(1)$, τότε

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \implies f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2},$$

και συνεπώς ο f αντιστρέφει ή διατηρεί τον προσανατολισμό αναλόγως του προσήμου της ορίζουσας του αντιπροσώπου του στην $\text{PGL}(2, \mathbb{R})$.

8.4.3 Διπλοί λόγοι

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας είτε αποτελούν περιπτώσεις αποτελεσμάτων που έχουν ήδη αποδειχθεί είτε οι αποδείξεις τους είναι απλές· για τον λόγο αυτόν αφήνονται ως ασκήσεις.

Υπάρχουν δύο είδη διπλών λόγων, ο πραγματικός και ο μετρικός διπλός λόγος. Ο πρώτος, μας έρχεται από τη γεωμετρία της προβολικής ευθείας. Έστω $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$, τότε ο διπλός λόγος της $\mathbf{p}$ είναι ο

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [x_1, x_2; x_3, x_4] = \frac{(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

με τις αναγκαίες τροποποιήσεις αν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ . Αυτός είναι ακριβώς ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ και ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 8.4.6. Έστω $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $\sigma \in S_4$ μετάταξη των σημείων της $\mathbf{p}$. Τότε ο διπλός λόγος $\mathbf{X}(\sigma(\mathbf{p})) = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}; x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]$ είναι συνάρτηση του $\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [x_1, x_2; x_3, x_4]$.

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.3.??, Δείτε και την Άσκηση 6.2.1.??.

□

Πρόταση 8.4.7. Ο διπλός λόγος παραμένει αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $GM(1)$.

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.3.??.

□

Πρόταση 8.4.8. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $GM(1)$ που απεικονίζει μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ σε μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων με τρόπον ώστε $x_i \leftrightarrow x'_i, i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [x_1, x_2; x_3, x_4] = [x'_1, x'_2; x'_3, x'_4] = \mathbf{X}(\mathbf{p}').$$

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.3.??, δείτε και αμέσως παρακάτω.

□

Υπενθυμίζουμε ότι η $GM(1)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}}$. Υπάρχει ο εξής ωραίος τρόπος να το αποδείξουμε αυτό μέσω των διπλών λόγων. Έστω $\{x_1, x_2, x_3\}$ και $\{y_1, y_2, y_3\}$ τριάδες διαφορετικών μεταξύ τους σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Ο μετασχηματισμός g που στέλνει τα x_1, x_2, x_3, x στα $\infty, 0, 1, g(x)$, αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση

$$[\infty, 0; 1, g(x)] = [x_1, x_2; x_3, x] \iff g(x) = \frac{(x - x_2)(x_3 - x_1)}{(x - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Ομοίως, ο μετασχηματισμός h που στέλνει τα y_1, y_2, y_3, x στα $\infty, 0, 1, h(x)$ δίνεται από τη σχέση

$$h(x) = \frac{(x - y_2)(y_3 - y_1)}{(x - y_1)(y_3 - y_2)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $f = hg^{-1}$ και είναι μοναδικός. Πράγματι, αν υπήρχε f' ώστε $x_i \leftrightarrow y_i$ μέσω της f' , τότε ο $F = hf^{-1}f'g^{-1}$ θα σταθεροποιούσε τα $\infty, 0, 1$. Συνεπώς

$$[\infty, 0; 1, z] = [\infty, 0; 1, F(z)] \iff z = F(z).$$

Συμπεραίνουμε επίσης ότι αν ένας μετασχηματισμός Möbius της επεκτεταμένης ευθείας σταθεροποιεί τρία σημεία, τότε είναι αναγκαστικά ο ταυτοτικός.

Σχόλιο 8.4.9. Παρατηρήστε ότι

$$g'(x) = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}{x_3 - x_2} \cdot \frac{1}{(x - x_1)^2}, \quad h'(x) = \frac{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{y_3 - y_2} \cdot \frac{1}{(x - y_1)^2}.$$

Συνεπώς ο f είναι στοιχείο της $M(1)$ αν οι παραστάσεις $(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$ και $(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)$ είναι ομόσημες. Συνεπώς το αν ο f είναι στοιχείο της $M(1)$ ή όχι, καθορίζεται από τη *διάταξη* των σημείων επάνω στην επεκτεταμένη ευθεία.

Ο δεύτερος διπλός λόγος είναι ο μετρικός διπλός λόγος που ορίσαμε μέσω της χορδικής μετρικής. Αν $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$, τότε ο *μετρικός διπλός λόγος* της $\mathbf{p}$ είναι ο

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = (x_1, x_2; x_3, x_4) = |[x_1, x_2; x_3, x_4]| = \frac{|(x_4 - x_2)(x_3 - x_1)|}{|(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)|},$$

και πάλι με τις αναγκαίες τροποποιήσεις αν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ . Ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 8.4.10. Έστω $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{R}}$ και έστω $\sigma \in S_4$ μετάταξη των σημείων της $\mathbf{p}$. Τότε ο μετρικός διπλός λόγος $\mathbb{X}(\sigma(\mathbf{p})) = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}; x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(4)}]$ είναι συνάρτηση των μετρικών διπλών λόγων

$$\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) = (x_1, x_2; x_3, x_4) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) = (x_1, x_3; x_2, x_4).$$

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.3.??.

□

Πρόταση 8.4.11. Ο μετρικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $GM(1)$.

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.3.??.

□

Πρόταση 8.4.12. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $GM(1)$ που απεικονίζει μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων σε μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{x'_1, x'_2, x'_3, x'_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους σημείων με τρόπον ώστε $x_i \leftrightarrow x'_i$, $i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathbf{p}) &= (x_1, x_2; x_3, x_4) = (x'_1, x'_2; x'_3, x'_4) = \mathbb{X}_1(\mathbf{p}'), \\ \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) &= (x_1, x_3; x_2, x_4) = (x'_1, x'_3; x'_2, x'_4) = \mathbb{X}_2(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.3.??.

□

8.4.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι κάθε f της μορφής (7.5) είναι ομοιομορφισμός του $\overline{\mathbb{R}}$. (Υπόδειξη: Κατ' αρχάς η f είναι προφανώς ομοιομορφισμός στο $\mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$. Τώρα, αν d είναι η χορδική μετρική στο $\overline{\mathbb{R}}$,

$$d(x, y) = \frac{2|x - y|}{(1 + |x|^2)^{1/2}(1 + |y|^2)^{1/2}}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

$$d(x, \infty) = \frac{2}{(1 + |x|^2)^{1/2}}.$$

Δείξτε ότι

$$\begin{aligned} d(f(x), f(\infty)) &\rightarrow 0 \quad \text{όταν } d(x, \infty) \rightarrow 0, \\ d(f(x), f(-d/c)) &\rightarrow 0 \quad \text{όταν } d(x, -d/c) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2. Δείξτε ότι το σύνολο G των μετασχηματισμών της μορφής (7.5) αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση.
3. Αποδείξτε την Πρόταση ??.
4. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.4.
5. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.5.
6. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.6.
7. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.7.
8. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.8.
9. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.9.
10. Να βρεθεί το στοιχείο της $M(1)$ που απεικονίζει τα $-1, 0, 1$ στα $2, 3, 4$, αντίστοιχα.
11. Βρείτε το $r \in \mathbb{R}$, $|r| > 1$, ώστε να υπάρχει μετασχηματισμός της $GM(1)$ που να απεικονίζει τα $\infty, 0, 1, r$ στα $-r, -1, 1, r$, αντίστοιχα. Κατόπιν, βρείτε τον μετασχηματισμό αυτόν. (Απάντηση: Είναι $r = -1/3$ και αν ο f είναι ο ζητούμενος μετασχηματισμός, τότε

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{3x + 1}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$(f^{-1})'(x) = -\frac{2}{(3x + 1)^2} < 0,$$

άρα ο f^{-1} και συνεπώς και ο f αντιστρέφει τον προσανατολισμό.)

8.5 Γεωμετρία της Αντιστροφής στο $\overline{\mathbb{R}^2} = \overline{\mathbb{C}}$

Η μελέτη της Γεωμετρίας της Αντιστροφής του επεκτεταμένου επιπέδου $(\overline{\mathbb{R}^2}, \text{GM}(2))$, γίνεται καλύτερα όταν ταυτίσουμε το επεκτεταμένο επίπεδο με την επεκτεταμένη μιγαδική ευθεία $\overline{\mathbb{C}}$, ή σφαίρα του *Riemann*. Γράφουμε

$$S^2 = \{(\zeta, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid |\zeta|^2 + t^2 = 1\}.$$

Εάν $z = x + iy \in \mathbb{C}$, τότε η στερεογραφική προβολή $\mathbf{S} : \mathbb{C} \rightarrow S^2$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{S}(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right) & z \in \mathbb{C} \\ (0, 1) & z = \infty. \end{cases}$$

Η αντίστροφη $\mathbf{S}^{-1}$ δίνεται τότε από τον τύπο

$$\mathbf{S}^{-1}(\zeta, t) = \begin{cases} \frac{|\zeta|^2}{1-t}, & (\zeta, t) \in S^2 \setminus \{(0, 1)\} \\ \infty & (\zeta, t) = (0, 1). \end{cases}$$

8.5.1 Η ομάδα $\text{GM}(2)$

Θεώρημα 8.5.1. Η ομάδα $\text{GM}(2)$ αποτελείται από μετασχηματισμούς του $\overline{\mathbb{C}}$ της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{ή} \quad f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad (8.10)$$

όπου $ad - bc \neq 0$.

Απόδειξη. Γράφουμε πρώτα τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς Möbius σε μιγαδική μορφή:

- Οι μεταφορές $T_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$ γράφονται ως

$$T_\alpha(z) = z + \alpha, \quad \alpha = a + ib.$$

- Για τις περιστροφές R_θ , $\theta \in \mathbb{R}$ με

$$R_\theta(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$$

έχουμε

$$R_\theta(z) = e^{-i\theta} z.$$

- Για τις ανακλάσεις r_θ , $\theta \in \mathbb{R}$ με

$$r_\theta(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = (x \cos \theta + y \sin \theta, x \sin \theta - y \cos \theta)$$

έχουμε

$$r_\theta(z) = e^{i\theta}\bar{z}.$$

Για τις ομοιοθεσίες D_δ , $\delta > 0$ με $D_\delta(x, y) = (\delta x, \delta y)$ είναι

$$D_\delta(z) = \delta z.$$

- Τέλος, για την αντιστροφή ι με $\iota(x, y) = (x, y)/(x^2 + y^2)$ είναι

$$\iota(z) = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}.$$

Όλοι λοιπόν οι στοιχειώδεις μετασχηματισμοί της $GM(2)$, επομένως και όλοι οι μετασχηματισμοί της $GM(2)$ γράφονται σε μία από τις μορφές της σχέσης (??). Και τούτι γιατί κάθε $g \in GM(2)$ είναι σύνθεση στοιχειωδών μετασχηματισμών και κάθε σύνθεση συναρτήσεων της μορφής (??) είναι και πάλι συνάρτηση της μορφής (??). Μένει να αποδείξουμε ότι κάθε στοιχείο της μορφής (??) είναι σύνθεση στοιχειωδών μετασχηματισμών Möbius. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν $j(z) = \bar{z}$ είναι η ανάκλαση στην πραγματική ευθεία, τότε

$$f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} = g(j(z)), \quad g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Από την άλλη, για g όπως παραπάνω, έχουμε

$$g(z) = \begin{cases} (a/d)z + b/d & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 8.5.2. Η ομάδα $M(2)$ των μετασχηματισμών Möbius που διατηρούν τον προσανατολισμό αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (8.11)$$

Κάθε μετασχηματισμός Möbius που δεν διατηρεί τον προσανατολισμό είναι σύνθεση ενός στοιχείου της $M(2)$ με την ανάκλαση στην πραγματική ευθεία $j(z) = \bar{z}$.

Απόδειξη. Στοιχεία της μορφής (??) είναι ολόμορφες συναρτήσεις του $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ με μιγαδική παράγωγο

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

η οποία είναι διάφορη του 0 στο $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$. Συνεπώς είναι σύμμορφες και διατηρούν τον προσανατολισμό.¹ □

¹Υπενθυμίζουμε ότι μία ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ σε ένα ανοικτό U του $\mathbb{C}$ ικανοποιεί

8.5.2 Η προβολική ομάδα $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$

Η ομάδα $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ είναι το σύνολο των αντιστρέψιμων 2×2 πινάκων με μιγαδικούς συντελεστές. Όπως και στην περίπτωση της Ενότητας ??, ορίζουμε την εξής σχέση στην $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$: για κάθε $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$,

$$A \sim B \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}_* : A = \lambda B. \quad (8.12)$$

Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και το σύνολο των τροχιών

$$\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) = \{[A] \mid A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})\},$$

αποτελεί ομάδα με πράξη

$$[A] \cdot [B] = [AB]. \quad (8.13)$$

Η επόμενη πρόταση είναι η ανάλογη της Πρότασης ??:

Πρόταση 8.5.3. Η απεικόνιση $\Phi^{\mathbb{C}} : \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{GM}(2)$ που δίνεται από την

$$\Phi^{\mathbb{C}} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = f \mid f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (8.14)$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Άρα, η $\mathrm{GM}(2)$ ταυτίζεται με την $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Η ομάδα $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ είναι η ομάδα $P^{\mathbb{C}}(1)$ των μετασχηματισμών της Μιγαδικής Προβολικής Ευθείας $\mathbb{C}P^1$ (υπάρχει ταύτιση της $S^2 = \overline{\mathbb{C}}$ και της $\mathbb{C}P^1$). Η $\mathbb{C}P^1$ κατασκευάζεται με τρόπο παντελώς ανάλογο με αυτόν της κατασκευής της $\mathbb{R}P^1$ στην Ενότητα 6.2. Προκύπτει λοιπόν το εξής ανάλογο του Θεωρήματος 7.4.1:

Θεώρημα 8.5.4. Η Γεωμετρία της Αντιστροφής $(\overline{\mathbb{C}}, \mathrm{GM}(2) = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}))$ είναι η Γεωμετρία της Μιγαδικής Προβολικής Ευθείας $(\mathbb{C}P^1, P^{\mathbb{C}}(1))$.

τις συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \quad \text{και} \quad u_y = -v_x.$$

Επομένως, ο Ιακωβιανός πίνακας της f σε τυχαίο σημείο $z \in U$ είναι της μορφής

$$Df(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Αν $|a| + |b| \neq 0$, τότε

$$\det(Df(z)) = a^2 + b^2 > 0$$

και

$$(Df(z))^T Df(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)I_2,$$

όπου I_2 είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. Υπογραμμίζουμε επίσης ότι η μιγαδική παράγωγος $f'(z) = a - ib$ και έτσι

$$\det(Df(z)) = |f'(z)|^2.$$

Η εναλλακτική περιγραφή της $GM(2)$ προκύπτει από την απεικόνιση

$$\Psi^{\mathbb{C}} : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PGL(2, \mathbb{C}), \quad A \mapsto [A].$$

Η $\Psi^{\mathbb{C}}$ είναι μονομορφισμός ομάδων και $\ker(\Psi^{\mathbb{C}}) = \{I, -I\}$. Πάλι από το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Ομάδων έχουμε την:

Πρόταση 8.5.5.

$$GM(2) = SL(2, \mathbb{C}) / \{I, -I\} := PSL(2, \mathbb{C}).$$

Σχόλιο 8.5.6. Η ομάδα $M(2)$ συμβολίζεται και με $PSL^+(2, \mathbb{C})$.

8.5.3 Διπλοί Λόγοι

Στην Ενότητα αυτή παρουσιάζονται έννοιες και αποτελέσματα που στην πλειοψηφία τους αποτελούν μιγαδικές γενικεύσεις των αποτελεσμάτων της Ενότητας 7.4.2.

Όπως και στην περίπτωση της ελεγκτεταμένης πραγματικής ευθείας, έτσι και εδώ υπάρχουν δύο διπλοί λόγοι. Κατ' αρχάς, έχουμε τον μιγαδικό διπλό λόγο που μας έρχεται από τη γεωμετρία της μιγαδικής προβολικής ευθείας: αν $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, τότε ο μιγαδικός διπλός της λόγος είναι ο

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)},$$

πάντοτε με τις αναγκαίες τροποποιήσεις εάν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ .

Πρόταση 8.5.7. Έστω $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο, και $\sigma \in S_4$ μετάταξη των σημείων της $\mathbf{p}$. Τότε ο διπλός λόγος $\mathbf{X}(\sigma(\mathbf{p})) = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}; z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}]$ είναι συνάρτηση του διπλού λόγου $\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4]$.

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.6.??.

□

Πρόταση 8.5.8. Ο μιγαδικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $M(1)$.

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.6.??.

□

Παρατηρούμε στο σημείο αυτό ότι ο μιγαδικός διπλός λόγος δεν παραμένει αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $GM(2)$: για την ανάκλαση $j(z) = \bar{z}$ έχουμε

$$[j(z_1), j(z_2); j(z_3), j(z_4)] = \overline{[z_1, z_2; z_3, z_4]}.$$

Είναι φυσικό λοιπόν να ρωτήσουμε πότε ο μιγαδικός διπλός λόγος είναι πραγματικός (οπότε και παραμένει αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $GM(2)$). Απαντούμε στο ερώτημα αυτό στην Πρόταση ??.

Πρόταση 8.5.9. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $M(2)$ που απεικονίζει μια προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ σε μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ με τρόπον ώστε $z_i \leftrightarrow w_i, i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\mathbf{X}(\mathbf{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4] = [w_1, w_2; w_3, w_4] = \mathbf{X}(\mathbf{p}').$$

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.6.??.

□

Η $GM(2)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}^2}$. Θα αποδείξουμε εδώ μέσω μιγαδικών διπλών λόγων ότι η $M(2)$ δρα τριπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{C}}$. Ο τρόπος είναι παραπλήσιος με αυτόν που ακολουθήσαμε στην Ενότητα 7.4.2, αλλά για πληρότητα επαναλαμβάνουμε την απόδειξη. Έστω $(z_i), (w_i), i = 1, 2, 3$, τριάδες διαφορετικών μεταξύ τους σημείων και έστω $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Ο μετασχηματισμός g που στέλνει τα z_1, z_2, z_3, z στα $\infty, 0, 1, g(z)$, αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση

$$[\infty, 0; 1, g(z)] = [z_1, z_2; z_3, z] \iff g(z) = \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_4)(z_3 - z_2)}.$$

Ομοίως, ο μετασχηματισμός h που στέλνει τα w_1, w_2, w_3, z στα $\infty, 0, 1, h(z)$, αντίστοιχα, δίνεται από τη σχέση

$$h(z) = \frac{(z - w_2)(w_3 - w_1)}{(z - w_4)(w_3 - w_2)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος μετασχηματισμός είναι ο $f = hg^{-1}$. Αποδεικνύεται με τρόπο ταυτόσημο με αυτόν της ενότητας 7.4.2 ότι είναι μοναδικός. Προκύπτει επίσης ότι κάθε στοιχείο της $M(2)$ που αφήνει αναλλοίωτα τρία διαφορετικά σημεία είναι αναγκαστικά ο ταυτοτικός μετασχηματισμός.

Πρόταση 8.5.10. Ο μιγαδικός διπλός λόγος μιας προσανατολισμένης τετράδας $\mathbf{p}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ είναι πραγματικός αριθμός αν και μόνο αν τα σημεία της $\mathbf{p}$ κείνται στον ίδιο γενικευμένο κύκλο.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ και έστω $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{p})$. Υπάρχει στοιχείο της $M(2)$ που απεικονίζει τα z_1, z_2, z_3, z_4 στα $\infty, 0, 1, \mathbf{X}$ αντίστοιχα. Τότε,

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [\infty, 0; 1, \mathbf{X}] = \mathbf{X}.$$

Αν $\mathbf{X} \in \mathbb{R}$, τότε επειδή τα $\infty, 0, 1, \mathbf{X}$ ανήκουν στην ευθεία $y = 0$ έχουμε ότι και τα z_1, z_2, z_3, z_4 ανήκουν σε γενικευμένο κύκλο. Το αντίστροφο είναι τώρα προφανές. □

Ο μετρικός διπλός λόγος ορίζεται τώρα ως εξής: αν $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ είναι προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, τότε ο μετρικός διπλός της λόγος είναι ο

$$\mathbb{X}(\mathbf{p}) = (z_1, z_2; z_3, z_4) = |[z_1, z_2; z_3, z_4]| = \frac{|(z_4 - z_2)(z_3 - z_1)|}{|(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)|},$$

και ως συνήθως εννοείται με τις αναγκαίες τροποποιήσεις αν κάποιο από τα σημεία είναι το ∞ . Ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 8.5.11. Έστω $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ προσανατολισμένη τετράδα διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ και $\sigma \in S_4$ οποιαδήποτε μετάταξη των σημείων της. Τότε, ο μετρικός διπλός λόγος $\mathbb{X}(\sigma(\mathbf{p})) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}; z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)})$ είναι συνάρτηση των μετρικών διπλών λόγων

$$\mathbb{X}_1(\mathbf{p}) = (z_1, z_2; z_3, z_4) \quad \text{και} \quad \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) = (z_1, z_3; z_2, z_4).$$

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.6.??.

□

Πρόταση 8.5.12. Ο μετρικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος από τη διαγώνια δράση της $\text{GM}(2)$.

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.6.??.

□

Πρόταση 8.5.13. Υπάρχει μοναδικό στοιχείο της $\text{GM}(2)$ που απεικονίζει μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$ σε μία προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων του $\overline{\mathbb{C}}$, με τρόπον ώστε $z_i \leftrightarrow w_i, i = 1, \dots, 4$, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(\mathbf{p}) &= [z_1, z_2; z_3, z_4] = [w_1, w_2; w_3, w_4] = \mathbb{X}_1(\mathbf{p}'), \\ \mathbb{X}_2(\mathbf{p}) &= [z_1, z_3; z_2, z_4] = [w_1, w_3; w_2, w_4] = \mathbb{X}_2(\mathbf{p}'). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Άσκηση 7.4.6.??.

□

8.5.4 Ασκήσεις

1. (Απολλώνιοι κύκλοι.) Για $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, k > 0$, θεωρήστε την εξίσωση

$$\left| \frac{z - \alpha}{z - \beta} \right| = k. \quad (8.15)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η εξίσωση των Απολλώνιων κύκλων στο $\overline{\mathbb{C}}$.

- (α') Αποδείξτε ότι η εξίσωση των Απολλώνιων κύκλων παριστάνει ευθεία αν $k = 1$ και κύκλο αν $k \neq 1$. Άρα, η Εξίσωση (7.6) είναι εξίσωση γενικευμένου κύκλου στο $\overline{\mathbb{C}}$. (Απάντηση: Αν $k = 1$, έχουμε την ευθεία

$$2\Re(\bar{\alpha}z) = |\alpha|^2 - |\beta|^2,$$

Αν $k \neq 1$ έχουμε τον κύκλο

$$\left| z - \frac{\alpha - k^2\beta}{1 - k^2} \right| = \frac{k|\alpha - \beta|}{|1 - k^2|}.)$$

- (β') Αποδείξτε ότι η $\text{GM}(2)$ απεικονίζει Απολλώνιους κύκλους σε Απολλώνιους κύκλους. (Υπόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει απευθείας από το Θεώρημα ??, αλλά μπορείτε να εξετάσετε και χωριστά τις περιπτώσεις των στοιχειωδών μετασχηματισμών).

(γ') Αποδείξτε αντιστρόφως ότι κάθε γενικευμένος κύκλος είναι Απολλώνιος, δηλαδή, γράφεται στη μορφή (7.6). Συμπαράντε κατόπιν απευθείας πως αν $g \in M(2)$, τότε ο g απεικονίζει γενικευμένους κύκλους σε γενικευμένους κύκλους. (Υπόδειξη: Έστω C γενικευμένος κύκλος. Αν C είναι η ευθεία $\Re(e^{-i\theta}z) = 0$, τότε αυτή γράφεται

$$|z - e^{-i\theta/2}| = |z + e^{-i\theta/2}|.$$

Αν C είναι η ευθεία $\Re(e^{-i\theta}z) = b$, $b \in \mathbb{R}_*$, τότε είναι η μεταφορά της $\Re(e^{-i\theta}z) = 0$ κατά a (ποιο;) και άρα Απολλώνιος κύκλος. Αν C είναι ο κύκλος $|z| = r$, θεωρήστε τον μετασχηματισμό

$$f(z) = \frac{z - r}{z + r},$$

και δείξτε ότι ο $f(C)$ είναι Απολλώνιος κύκλος, οπότε και ο $|z| = r$ είναι Απολλώνιος κύκλος. Αν C είναι ο κύκλος $|z - z_0| = r$, ακολουθήστε διαδικασία ανάλογη με της ευθείας.

2. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.13.
3. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.14.
4. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.15.
5. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.16.
6. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.17.
7. Αποδείξτε την Πρόταση 7.4.18.
8. Βρείτε το στοιχείο της $M(2)$ που απεικονίζει τα $-i, 0, i$ στα $-1, 0, 1$, αντίστοιχα.
9. Έστω προσανατολισμένη τετράδα $\mathbf{p} = \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων και έστω

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1(\mathbf{p}) = [z_1, z_2; z_3, z_4], \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2(\mathbf{p}) = [z_1, z_3; z_2, z_4].$$

- a) Δείξτε ότι $\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 = 1$.
- b) Αν $\mathbb{X}_1 = |\mathbf{X}_1|$, $\mathbb{X}_2 = |\mathbf{X}_2|$ είναι οι αντίστοιχοι μετρικοί διπλοί λόγοι, τότε

$$\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 \geq 1 \quad \text{και} \quad |\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2| \leq 1.$$

10. Έστω D ο μοναδιαίος δίσκος $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ και

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

- (α') Δείξτε ότι ο f απεικονίζει τον D στο χωρίο $\mathcal{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$. (Υπόδειξη: Γράψτε

$$w = \frac{z - i}{z + i} \implies z = -i \frac{w + 1}{w - 1}.)$$

(β') Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της $M(2)$ της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc > 0.$$

απεικονίζει το $\mathcal{H}^2$ στον εαυτό του. Δείξτε και αντιστρόφως ότι αν κάποιο στοιχείο $f \in M(2)$ απεικονίζει το $\mathcal{H}^2$ στον εαυτό του, τότε είναι της παραπάνω μορφής. (Υπόδειξη για το αντίστροφο: Ο f θα διατηρεί την ευθεία $y = 0$, άρα θα είναι στοιχείο της $PGL(2, \mathbb{R})$.)

@copyright I.D. PLATIS

Κεφάλαιο 9

Υπερβολική Γεωμετρία

Η Υπερβολική Γεωμετρία (κατά Klein) στις δύο διαστάσεις που οφείλεται στους Gauss, Bolyai, Lobatchevsky, ορίζεται εδώ ως το ζεύγος $(\mathcal{H}^2, \text{GM}(\mathcal{H}^2))$, όπου

$$\mathcal{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$$

και $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$ είναι η υποομάδα της $\text{GM}(2)$ που αφήνει αναλλοίωτο το $\mathcal{H}^2$. Η περιγραφή της Υπερβολικής Γεωμετρίας κατά τον τρόπον αυτόν αντιστοιχεί στο μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου το οποίο οφείλεται στον Poincaré.



H. Poincaré (1854-1912).

Υπάρχουν και άλλα μοντέλα, τα οποία θα εξετάσουμε στο τέλος του κεφαλαίου. Η Υπερβολική Γεωμετρία είναι μετρική γεωμετρία. Η υπερβολική απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι ακριβώς αυτή που παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση της $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$.



Έργο του Escher εμπνευσμένο από την Υπερβολική Γεωμετρία.

Σε σύγκριση με την Αξιοματική Θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, τονίζουμε ότι η Υπερβολική Γεωμετρία αλλάζει ως προς το Πέμπτο Ευκλείδειο Αίτημα: από σημείο εκτός δεδομένης ευθείας περνούν άπειρες παράλληλες με την ευθεία αυτή. Μένει βεβαίως να διευκρινιστεί τι ακριβώς σημαίνει ευθεία στην Υπερβολική Γεωμετρία. Ευθεία λοιπόν είναι μία γεωδαισιακή καμπύλη: ο συντομότερος δρόμος που ενώνει δύο σημεία της ευθείας ανήκει εξ ολοκλήρου στην ευθεία. Μπορεί όμως μία ευθεία να θεωρηθεί ισοδύναμα ως το σύνολο των σταθερών σημείων μίας σντιστροφής της $GM(\mathcal{H}^2)$. Θα εξετάσουμε όλα αυτά τα ζητήματα, καθώς και άλλα, σε ό,τι ακολουθεί.

9.1 Η ομάδα των υπερβολικών μετασχηματισμών

9.1.1 Επέκταση Poincaré της $GM(n)$

Η επέκταση Poincaré ενός μετασχηματισμού $f \in GM(n)$ σε ένα μετασχηματισμό $\tilde{f} \in GM(n+1)$ βασίζεται στην εμφύτευση του $\mathbb{R}^n$ εντός του $\mathbb{R}^{n+1}$ ως το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$, δηλαδή, μέσω της απεικόνισης

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

και προκύπτει από την επέκταση των στοιχειωδών μετασχηματισμών των οποίων αποτελεί τη σύνθεση, με τον εξής τρόπο:

- Η αντιστροφή σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ του $\mathbb{R}^n$ επεκτείνεται στην αντιστροφή στη σφαίρα $S((\mathbf{a}, 0), r)$ του $\mathbb{R}^{n+1}$.
- Η αντιστροφή σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του $\mathbb{R}^n$ επεκτείνεται στην αντιστροφή στο περεπίπεδο $\overline{W((\mathbf{A}, 0), b)}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$.

Κατά τον τρόπον αυτόν, έχουμε πάντοτε $\tilde{f}(\mathbf{x}, 0) = (f(\mathbf{x}), 0)$, δηλαδή η $\tilde{f}$ διατηρεί το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Επίσης, μέσω των τύπων των αντιστροφών σε σφαίρα και υπερεπίπεδο, διαπιστώνουμε ότι η $\tilde{f}$ διατηρεί τον άνω ημιχώρο

$$\mathcal{H}^{n+1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}.$$

Τίθεται το ερώτημα αν η επέκταση Poincaré $\tilde{f}$ ενός μετασχηματισμού $f \in \text{GM}(n)$ είναι μοναδική. Έστω ότι υπήρχε $g \in \text{GM}(n+1)$ τέτοιος ώστε

$$g(\mathbf{x}, 0) = (f(\mathbf{x}), 0).$$

Τότε, η $h = \tilde{f} \circ g^{-1}$ διατηρεί κατά σημείο το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Αφού η h διατηρεί τα $(\mathbf{0}_n, 0)$, $(\mathbf{e}_n, 0)$, ∞ , έχουμε

$$h(\mathbf{x}_n, x_{n+1}) = (\mathbf{x}_n, x_n + 1)A, \quad A \in \text{O}(n+1).$$

Θέτοντας στη σχέση

$$(\mathbf{x}_n, 0)A = (\mathbf{x}_n, 0)$$

διαδοχικά $\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, προκύπτει λόγω της ορθογωνιότητας του A ότι είναι ένας διαγώνιος πίνακας με $a_{ii} = 1$, για $i = 1, \dots, n$ και $a_{n+1, n+1} = \pm 1$. Συνεπώς, ο h είναι είτε ο ταυτοτικός, ή η ανάκλαση στο υπερεπίπεδο $x_{n+1} = 0$. Το τελευταίο όμως είναι αδύνατο εφ' όσον η h διατηρεί τον $\mathcal{H}^{n+1}$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η επέκταση Poincaré $\tilde{f}$ της f είναι μοναδική.

Ορισμός 9.1.1. Το σύνολο $\widetilde{\text{GM}}(n)$ των επεκτάσεων Poincaré των στοιχείων της $\text{GM}(n)$ καλείται επέκταση Poincaré της $\text{GM}(n+1)$.

Πρόταση 9.1.2. Η επέκταση Poincaré $\widetilde{\text{GM}}(n)$ της $\text{GM}(n)$ είναι υποομάδα της $\text{GM}(n+1)$ ισόμορφη με την $\text{GM}(n)$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την κλειστότητα ως προς την πράξη, οι υπόλοιπες λεπτομέρειες αφήνονται στην Άσκηση 8.1.3.1(θ')iiiA'. Έστω προς τούτο $f, g \in \text{GM}(n)$ και $\tilde{f}, \tilde{g}$ οι επεκτάσεις Poincaré των f, g , αντίστοιχα. Είναι

$$(\widetilde{f \circ g})(\mathbf{x}, 0) = ((f \circ g)(\mathbf{x}), 0) = (f(g(\mathbf{x})), 0)$$

και

$$(\tilde{f} \circ \tilde{g})(\mathbf{x}, 0) = \tilde{f}(\tilde{g}(\mathbf{x}, 0)) = \tilde{f}(g(\mathbf{x}), 0) = (f(g(\mathbf{x})), 0).$$

□

9.1.2 Επέκταση Poincaré της $\text{GM}(1)$

Θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 9.1.3. Έστω $f \in \text{GM}(1)$,

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Η επέκταση Poincaré $\tilde{f}$ του f δίνεται από την

$$\tilde{f}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{αν } ad - bc > 0, \quad (9.1)$$

ενώ δίνεται από την

$$\tilde{f}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, \quad \text{αν } ad - bc < 0. \quad (9.2)$$

Απόδειξη. Εντοπίζουμε πρώτα τις επεκτάσεις Poincaré των στοιχειωδών μετασχηματισμών της GM(1). Έχουμε ότι:

- Η επέκταση της μεταφοράς $x \mapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}$, είναι η $(x, y) \mapsto (x + a, y)$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto z + a$.
- Η επέκταση της αντιστροφής $x \mapsto -x$ ανάκλασης στο σημείο 0) είναι η ανάκλαση $(x, y) \mapsto (-x, y)$, δηλαδή, η ανάκλαση στην ευθεία $x = 0$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto -\bar{z}$.
- Η επέκταση της ομοιοθεσίας $x \mapsto \delta x$ είναι η ομοιοθεσία $(x, y) \mapsto (\delta x, \delta y)$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto \delta z$.
- Η επέκταση της αντιστροφής $x \mapsto 1/x$ είναι η αντιστροφή $(x, y) \mapsto (x, y)/\sqrt{x^2 + y^2}$. Σε μιγαδική μορφή είναι η $z \mapsto 1/\bar{z}$.

Όλες οι παραπάνω επεκτάσεις ανήκουν σε μία από τις μορφές (??), (??). Τώρα, ο f γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} (a/d)x + (b/d) & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{x+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

Έστω πρώτα ότι $ad - bc > 0$. Εάν $c = 0$, τότε επειδή $ad > 0$, ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της ομοιοθεσίας κατά a/d και της μεταφοράς κατά b/d . Εάν $c \neq 0$, τότε ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της μεταφοράς κατά d/c , της αντιστροφής στο 0, της ανάκλασης στο 0, της ομοιοθεσίας κατά $(ad - bc)/c^2$ και της μεταφοράς κατά a/c . Επειδή η σύνθεση επεκτάσεων Poincaré μετασχηματισμών είναι η επέκταση Poincaré της σύνθεσής τους (Πρόταση 8.1.2), παίρνουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} (a/d)z + (b/d) & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

Έστω τώρα ότι $ad - bc < 0$. Εάν $c = 0$, τότε επειδή $ad < 0$, ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της ομοιοθεσίας κατά $-a/d$, της ανάκλασης στο 0 και της μεταφοράς κατά b/d . Εάν $c \neq 0$, τότε ο f είναι η σύνθεση των επεκτάσεων της μεταφοράς κατά d/c , της αντιστροφής στο 0, της ομοιοθεσίας κατά $(bc - ad)/c^2$ και της μεταφοράς κατά a/c . Άρα, με το ίδιο επιχείρημα όπως προηγουμένως παίρνουμε

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} (a/d)\bar{z} + (b/d) & c = 0, \\ \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2} \cdot \frac{1}{\bar{z}+(d/c)} & c \neq 0. \end{cases}$$

□

Παράδειγμα 9.1.4. Έστω $f \in \text{GM}(1)$,

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}.$$

Επειδή $2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = -5 < 0$, η επέκταση Poincaré $\tilde{f}$ του f δίνεται από την

$$\tilde{f}(z) = \frac{2\bar{z} - 1}{\bar{z} - 3}.$$

Από την άλλη, για τον $g \in \text{GM}(1)$,

$$g(x) = \frac{x - 2}{x - 1},$$

επειδή $1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 1 = 1 > 0$, η επέκταση Poincaré $\tilde{g}$ του g δίνεται από την

$$\tilde{g}(z) = \frac{z - 2}{z - 1}.$$

Έστω τώρα το άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H}^2 = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \Im(z) = y > 0\}$. Από τον ορισμό της επέκτασης Poincaré έχουμε αμέσως το παρακάτω:

Πόρισμα 9.1.5. Κάθε στοιχείο της $\widetilde{\text{GM}}(1)$ απεικονίζει την ευθεία $y = 0$ στον εαυτό της και το άνω ημιεπίπεδο $\mathcal{H}^2$ στον εαυτό του.

Το επόμενο θεώρημα είναι ένα είδος αντιστρόφου του Θεωρήματος ??.

Θεώρημα 9.1.6. Κάθε στοιχείο της $\text{GM}(2)$ που διατηρεί το $\mathcal{H}^2$ είναι στοιχείο της $\widetilde{\text{GM}}(1)$.

Απόδειξη. Έστω πρώτα $f \in \text{M}(2)$,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

με $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$. Επειδή ο f διατηρεί την $\overline{\mathbb{R}}$ έχουμε:

- $f(0) = b/d \in \overline{\mathbb{R}}$,
- $f(\infty) = a/c \in \overline{\mathbb{R}}$,
- $f(1) = (a + b)/(c + d) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Εάν $c = 0$ ($d \neq 0$), τότε $f(\infty) = \infty$, $f(0) = b/d \in \mathbb{R}$ και $f(1) = (a/d) + (b/d) \in \mathbb{R}$. Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $a/d, b/d \in \mathbb{R}$. Άρα, θέτοντας $a/d = A$ και $b/d = B$ όπου $A, B \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(z) = Az + B$, που είναι η επέκταση Poincaré του $f(x) = Ax + B$. Παρατηρήστε ότι η $A = 0$ οδηγεί στο άτοπο $a = 0$. Έχουμε επιπλέον $\Im(f(i)) = A > 0$. Εάν $d = 0$, τότε $f(0) = \infty$, $f(\infty) = a/c \in \mathbb{R}$ και $f(1) = (a/c) + (b/c) \in \mathbb{R}$. Με όμοιο τρόπο όπως παραπάνω, θέτοντας $A = a/c$ και $B = b/c$, $A, B \in \mathbb{R}$, παίρνουμε ότι ο f είναι η επέκταση Poincaré της $f(x) = A + B/x$ που είναι στοιχείο της $\text{GM}(1)$ εφ' όσον $B \neq 0$. Επίσης, $\Im(f(i)) = -B > 0$. Εάν τέλος $cd \neq 0$, τότε $a/c = A \in \mathbb{R}$, $b/d = B \in \mathbb{R}$ και επίσης

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{cA + dB}{c + d} = C \in \mathbb{R} \implies c(A - C) + d(B - C) = 0.$$

Επειδή η σχέση $A + C = B$ είναι αδύνατη, εφ' όσον $ad - bc \neq 0$, προκύπτει ότι $c = Dd$ για κάποιο $D \in \mathbb{R}_*$. Συνεπώς,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{cAz + dB}{Ddz + d} = \frac{dDAz + dB}{Ddz + d} = \frac{ADz + B}{Dz + 1},$$

όπου και πάλι $AD - BD \neq 0$. Επειδή επιπλέον $\Im(f(i)) > 0$ έχουμε $AD - BD > 0$. Ομοίως αποδεικνύεται και η περίπτωση όπου $f = g \circ j$, $g \in \mathbf{M}(2)$ και $j(z) = \bar{z}$. $\square$

9.1.3 Η $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ ως η $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$

Με $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$ συμβολίζουμε την $\widetilde{\mathbf{GM}}(1)$ θεωρώντας τα στοιχεία της τελευταίας να δρουν στο $\mathcal{H}^2$. Αυτή είναι ομάδα ισόμορφη με την $\mathbf{PSL}(2, \mathbb{R})$ την οποία καλούμε ομάδα των μετασχηματισμών Möbius του άνω ημιεπιπέδου $\mathcal{H}^2$:

$$\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2) = \mathbf{PSL}(2, \mathbb{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\},$$

όπου I είναι ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας. Η υποομάδα $\mathbf{M}(\mathcal{H}^2)$ της $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$ που αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0,$$

είναι ισόμορφη με την $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$. Είναι λοιπόν

$$\mathbf{M}(\mathcal{H}^2) = \mathbf{PSL}^+(2, \mathbb{R}) = \mathbf{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Παρατηρούμε τέλος ότι τα στοιχεία της $\mathbf{GM}(\mathcal{H}^2)$ της μορφής (??) βρίσκονται σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία της μορφής (??):

$$\mathbf{M}(\mathcal{H}^2) \ni f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mapsto g(z) = \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}.$$

Κατά συνέπεια, στη μελέτη των Möbius μετασχηματισμών του $\mathcal{H}^2$ αρκεί να ασχολούμαστε με στοιχεία της $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$. Αν $f \in \mathbf{M}(\mathcal{H}^2)$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1,$$

διαιρώντας αν είναι απαραίτητο με την ρίζα του $ad - bc$. Ο πίνακας

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ονομάζεται *προσαρτημένος πίνακας* της $\mathbf{SL}(2, \mathbb{R})$ στον μετασχηματισμό f .

Παράδειγμα 9.1.7. Έστω οι μετασχηματισμοί της ευθείας

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{x - 2}{x + 1},$$

που αντιστοιχούν στα στοιχεία

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

της $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Είναι $\det(A) = -1 < 0$, άρα ο A είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό $f \in \mathrm{GM}(\mathcal{H}^2)$ με

$$f(z) = \frac{2\bar{z} - 1}{\bar{z} - 1} = \frac{(-2)(-\bar{z}) - 1}{(-1)(-\bar{z}) - 1}.$$

Αυτός αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό

$$z \mapsto \frac{-2z - 1}{-z - 1} = \frac{2z + 1}{z + 1}$$

της $\mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$. Ο πίνακας του στοιχείου αυτού έχει ορίζουσα 1, άρα ανήκει στην $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Από την άλλη, $\det(B) = 3 > 0$, άρα ο g επεκτείνεται στον μετασχηματισμό $g \in \mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$ με

$$g(z) = \frac{z - 2}{z + 1}.$$

Ο προσαρτημένος του πίνακας είναι ο

$$(1/\sqrt{3})B = (1/\sqrt{3}) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

9.1.4 Κατάταξη των στοιχείων της $\mathrm{M}(\mathcal{H}^2)$

Θα κατατάξουμε αρχικά τα στοιχεία της $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Το ίχνος $\mathrm{tr}(A) = a + d$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A) \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα $D = \mathrm{tr}^2(A) - 4$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $D > 0$: τότε, έχουμε δύο πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mathrm{tr}(A) \pm \sqrt{D}}{2}, \quad \text{και} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1.$$

Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$, έχουμε από τον τύπο του Vieta για το άθροισμα των ριζών τριωνύμου ότι $\lambda + 1/\lambda = \mathrm{tr}(A)$.

- $D = 0$: τότε, έχουμε μία πραγματική διπλή ιδιοτιμή

$$\lambda = \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} \implies \lambda^2 = 1.$$

- $D < 0$: τότε, έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm i\sqrt{-D}}{2}, \text{ και } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$$

Θέτοντας $\lambda = \lambda_1$, έχουμε $\lambda_2 = \bar{\lambda} = 1/\lambda$, οπότε $\lambda = e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Πρόταση 9.1.8. Κάθε $A \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ είναι συζυγής στην $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ με έναν από τους παρακάτω πίνακες:

a)

$$\pm \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

b)

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 \neq 1.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο την περίπτωση των δύο διαφορετικών πραγματικών ιδιοτιμών, οι υπόλοιπες περιπτώσεις αφήνονται στην Άσκηση 8.1.3.??, δείτε και τα παραδείγματα παρακάτω. Όταν λοιπόν $D > 0$, έχουμε $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1/\lambda$ και $\lambda + 1/\lambda = \operatorname{tr}(A)$, όπου $|\operatorname{tr}(A)| > 2$ και συνεπώς $\lambda^2 \neq 1$. Ο A είναι διαγωνίσιμος και έτσι υπάρχει $P \in \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ ώστε $A = PMP^{-1}$ με τον M να είναι ο πίνακας της μορφής c). $\square$

Έστω $f \in M(\mathcal{H}^2)$ και υποθέτουμε ότι

$$A_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

είναι ο προσαρτημένος πίνακας της $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ στον f .

- Όταν ο A_f είναι συζυγής στην $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ με έναν πίνακα της μορφής a) τότε ο f καλείται *ελλειπτικός* και είναι συζυγής στην $M(\mathcal{H}^2)$ με μετασχηματισμό της μορφής

$$z \mapsto \frac{\cos \theta z - \sin \theta}{\sin \theta z + \cos \theta}.$$

- Όταν ο A_f είναι συζυγής στην $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ με έναν πίνακα της μορφής b) τότε ο f καλείται *παραβολικός* και είναι συζυγής στην $M(\mathcal{H}^2)$ με τον μετασχηματισμό

$$z \mapsto z + 1.$$

- Όταν ο A_f είναι συζυγής στην $SL(2, \mathbb{R})$ με έναν πίνακα της μορφής c τότε ο f καλείται υπερβολικός και είναι συζυγής στην $M(\mathcal{H}^2)$ με τον μετασχηματισμό

$$z \mapsto \lambda^2 z.$$

Παράδειγμα 9.1.9. Έστω

$$f(z) = \frac{z-2}{z-1}$$

και

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\pm i$. Ο ιδιοχώρος $V(i)$ προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(A - iI) \cdot (\xi_1 \ \xi_2)^T = \mathbf{0}$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} (1-i)\xi_1 - 2\xi_2 &= 0, \\ \xi_1 - (1+i)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$V(i) = \left\{ \begin{pmatrix} (1+i)\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad V(-i) = \left\{ \begin{pmatrix} (1-i)\nu \\ \nu \end{pmatrix}, \nu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Παίρνοντας μ, ν με $2i\mu\nu = 1$ και τους πίνακες

$$P = \begin{pmatrix} (1+i)\mu & (1-i)\nu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

έχουμε ότι $A = PMP^{-1}$ και άρα ο A είναι συζυγής στην $SL(2, \mathbb{C})$ με τον M . Παρατηρήστε ότι ο M είναι ο προσαρτημένος πίνακας στην $SL(2, \mathbb{C})$ του μετασχηματισμού $z \mapsto -z$ που παριστάνει περιστροφή κατά π στο $\overline{\mathbb{C}}$. Για να δούμε πως έχει η κατάσταση στην $SL(2, \mathbb{R})$, εργαζόμαστε ως εξής: παίρνουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ιδιοδιανύσματος $(1+i \ 1)^T$ και θεωρούμε τον πίνακα της $SL(2, \mathbb{R})$ που έχει στήλες τα διανύσματα αυτά:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Αυτό είναι πάντοτε εφικτό και μπορούμε να το καταφέρουμε επιλέγοντας κατάλληλο $\mu \in \mathbb{C}$. Γράφουμε τώρα $i = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2) \cdot i = 0 + 1 \cdot i$ και θεωρούμε τον πίνακα

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι $A = QNQ^{-1}$, ο f είναι ελλειπτικός μετασχηματισμός και συζυγής με τον $z \mapsto -1/z$.

Παράδειγμα 9.1.10. Έστω

$$f(z) = \frac{2z - 5}{z - 2}$$

και

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

έχει μία διπλή ρίζα $\lambda = 1$. Αναζητούμε πίνακα

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

ώστε να ισχύει

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 1 - \alpha\gamma & \alpha^2 \\ -\gamma^2 & 1 + \alpha\gamma \end{pmatrix}.$$

Έχουμε λύσεις μόνο για την περίπτωση του αρνητικού προσήμου: $\alpha = \pm\sqrt{5}$, $\gamma = \pm 1$. Τα β, δ καθορίζονται από την $\beta\delta = \alpha\gamma - 1$. Ο f είναι παραβολικός, συζυγής με τον $z \mapsto z + 1$.

Παράδειγμα 9.1.11. Έστω

$$f(z) = \frac{2z + 1}{3z + 2}$$

και

$$A = A_f = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 1$$

έχει ρίζες $\lambda, 1/\lambda$, όπου $\lambda = 2 + \sqrt{3}$. Ο ιδιοχώρος $V(\lambda)$ προκύπτει από τη λύση του συστήματος $(A - \lambda I) \cdot (\xi_1 \ \xi_2)^T = \mathbf{0}$, δηλαδή,

$$\begin{aligned} -\sqrt{3}\xi_1 + \xi_2 &= 0, \\ 3\xi_1 - \sqrt{3}\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$V(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ \sqrt{3}\mu \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παρομοίως βρίσκουμε

$$V(1/\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} \nu \\ -\sqrt{3}\nu \end{pmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Παίρνοντας μ, ν που ικανοποιούν την $-2\sqrt{3}\mu\nu = 1$, έχουμε ότι για

$$P = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \sqrt{3}\mu & -\sqrt{3}\nu \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix},$$

είναι $A = PMP^{-1}$. Ο f είναι συζυγής στην $SL(2, \mathbb{R})$ με τον $z \mapsto \lambda^2 z = (5 + 4\sqrt{3})z$ και είναι υπερβολικός.

Ένα σημείο $z \in \overline{\mathcal{H}^2} = \mathcal{H}^2 \cup \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται *σταθερό σημείο του f* αν $f(z_0) = z_0$. Το ερώτημα του πλήθους των σταθερών σημείων του f απαντάται διαμέσου της Πρότασης 8.1.5. Η σχέση $f(z) = z$ οδηγεί:

- στην εξίσωση

$$(a - d)z + b = 0$$

αν $c = 0$ και

- στην τετραγωνική εξίσωση

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

αν $c \neq 0$.

Όταν $c = 0$, έχουμε πάντοτε ότι $f(\infty) = \infty$. Επειδή $ad = 1$, $D \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει όταν ο f είναι παραβολικός και άρα δεν σταθεροποιεί άλλο σημείο. Στην περίπτωση της ανισότητας, σταθεροποιεί επιπλέον και το $z = b/(d - a)$ και είναι υπερβολικός.

Όταν $c \neq 0$, η διακρίνουσα της τετραγωνικής εξίσωσης είναι ίση με

$$(d - a)^2 + 4bc = \text{tr}^2(A_f) - 4 = D.$$

Άρα, καταλήγουμε στην παρακάτω:

Πρόταση 9.1.12. Ο $f \in M(\mathcal{H}^2)$ έχει:

- ένα σταθερό σημείο στο $\overline{\mathcal{H}^2}$ αν είναι παραβολικός,
- ένα σταθερό σημείο στο $\mathcal{H}^2$ αν είναι ελλειπτικός,
- δύο σταθερά σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$ αν είναι υπερβολικός.

Παράδειγμα 9.1.13. Έστω

$$f(z) = \frac{2z}{z + 2}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του f είναι ο

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\text{tr}(A_f) = 2$ και συνεπώς ο f είναι παραβολικός. Το σταθερό του σημείο είναι το $z = 0$.

Παράδειγμα 9.1.14. Έστω

$$f(z) = \frac{-z-1}{2z+1}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του f είναι ο

$$A_f = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\text{tr}(A_f) = 0$ και συνεπώς ο f είναι ελλειπτικός. Το σταθερό του σημείο στο $\mathcal{H}^2$ προκύπτει από την εξίσωση

$$f(z) = z \iff 2z^2 + 2z + 1 = 0 \implies z = \frac{-1+i}{2}.$$

Παράδειγμα 9.1.15. Έστω

$$f(z) = \frac{z+2}{z+3}.$$

Ο προσαρτημένος πίνακας του f είναι ο

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Είναι $\text{tr}(A_f) = 3$ και συνεπώς ο f είναι υπερβολικός. Τα σταθερά του σημεία στο $\overline{\mathbb{R}}$ προκύπτουν από την εξίσωση

$$f(z) = z \iff z^2 + 2z - 2 = 0 \implies z = -1 \pm \sqrt{3}.$$

9.1.5 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Πρόταση 8.1.2.
2. Βρείτε τις επεκτάσεις Poincaré των παρακάτω στοιχείων της $\text{GM}(1)$:

$$x \mapsto \frac{2x-3}{4x+5}, \quad x \mapsto \frac{-x+2}{x+4}.$$

Διευκρινήστε ποιές απ' αυτές διατηρούν τον προσανατολισμό.

3. Έστω ο σταθεροποιητής $\text{Stab}(\infty) = \{f \in \text{GM}(1) \mid f(\infty) = \infty\}$.

(α') Δείξτε ότι ο $\text{Stab}(\infty)$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$x \mapsto ax + b, \quad a \neq 0.$$

Αυτή είναι ακριβώς η Αφινική ομάδα $A(1)$ που δρά στο $\mathbb{R}$.

- (β') Βρείτε την επέκταση Poincaré του $\text{Stab}(\infty)$ και δείξτε ότι η υποομάδα της που δρα στο $\mathcal{H}^2$ και που αποτελείται από στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό, είναι ακριβώς το σύνολο των στοιχείων

$$z \mapsto az + b, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Το σύνολο αυτό αποτελεί ομάδα ισόμορφη με την $A^+(1)$, δηλαδή την υποομάδα της $A(1)$ που περιέχει όλα τα στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό.

- (γ') Αποδείξτε ότι υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση

$$F : A^+(1) \rightarrow \mathcal{H}^2.$$

Μέσω της απεικόνισης αυτής, εφοδιάστε το $\mathcal{H}^2$ με δομή ομάδας. (Υπόδειξη: Η F ορίζεται από την

$$A^+(1) \ni (x \mapsto ax + b) \mapsto b + ia \in \mathcal{H}^2.$$

Αν τώρα $f(x) = ax + b$ και $f'(x) = a'x + b'$ είναι στοιχεία της $A^+(1)$, τότε επειδή

$$(f \circ f')(x) = aa'x + ab' + b,$$

ορίζουμε πράξη ομάδας $\star$ στο $\mathcal{H}^2$ την

$$\begin{aligned} z \star z' &= (u + iv) \star (u' + iv') \\ &= F(vx + u) \star F(v'x + u') := F(vv'x + vu' + u) \\ &= vu' + u + ivv'. \end{aligned}$$

Μπορείτε επίσης να παρατηρήσετε ότι η $A^+(1)$ είναι ισόμορφη με την υποομάδα της $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ που περιέχει στοιχεία της μορφής

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^{1/2} & b/a^{1/2} \\ 0 & 1/a^{1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1/2} & 0 \\ 0 & 1/a^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Έστω στοιχείο A της $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ τάξης 2. Δείξτε ότι τότε $A = \pm I$. Αν B είναι ο προσαρτημένος πίνακας της $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ κάποιου $f \in \text{GM}(\mathcal{H}^2)$ τάξης 2, τότε η τάξη του B είναι 4. (Υπόδειξη: Θεωρήστε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + 1 = 0.$$

Από το Θεώρημα Cayley-Hamilton είναι:

$$A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + I = 0.$$

Επειδή $A^2 = I$, παίρνουμε

$$\text{tr}(A) \cdot A = 2I \implies A = \frac{2}{\text{tr}(A)} I.$$

Επειδή $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, παίρνουμε $\text{tr}^2(A) = 4$.)

5. Συμπληρώστε την απόδειξη της Πρότασης 8.1.5.
6. Βρείτε τον προσαρτημένο πίνακα, το είδος και τα σταθερά σημεία των παρακάτω υπερβολικών μετασχηματισμών:

$$f(z) = \frac{-z}{z-4}, \quad g(z) = \frac{6z-5}{2z+1}, \quad h(z) = \frac{-z-5}{z+4}.$$

9.2 Υπερβολική Γεωμετρία

9.2.1 Υπερβολικές ευθείες

Στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία, οι ευθείες είναι τα σύνολα σταθερών σημείων ανακλάσεων (ως προς τις ευθείες αυτές). Κάθε ευθεία μπορεί με άλλα λόγια να οριστεί σαν το σύνολο λύσεων μια εξίσωσης της μορφής

$$R(z) = z - 2(b - \Re(e^{-i\theta}z))e^{i\theta} = z,$$

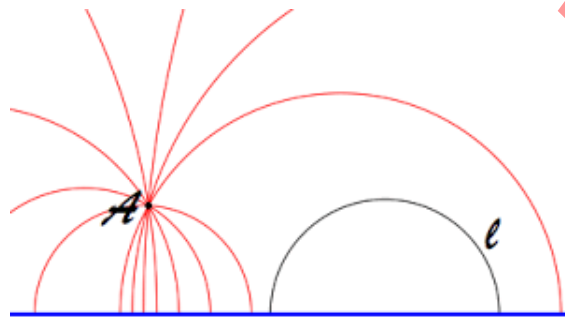
που δεν είναι τίποτε άλλο βέβαια παρά η ευθεία $\Re(e^{-i\theta}z) = b$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την ίδια συλλογιστική και στην περίπτωση του υπερβολικού επιπέδου. Έχουμε δει ότι οι επεκτάσεις Poincaré των αντιστροφών σε σφαίρα $S(\mathbf{a}, r)$ και σε υπερεπίπεδο $\overline{W(\mathbf{A}, b)}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι αντίστοιχα οι αντιστροφές σε σφαίρα $S((\mathbf{a}, 0), r)$ και σε υπερεπίπεδο $\overline{W((\mathbf{A}, 0), b)}$ του $\mathbb{R}^{n+1}$, αντίστοιχα. Όταν $n = 1$, μία σφαίρα κέντρου a και ακτίνας $r > 0$ αποτελείται απλώς από τα σημεία $a - r, a + r$. Η αντίστοιχη σφαίρα στο επίπεδο είναι ο κύκλος $S(a, 0), r$ και τα σημεία του που βρίσκονται στο $\mathcal{H}^2$ είναι το ανοικτό του άνω ημικύκλιο.

Από την άλλη, ένα υπερεπίπεδο στο $\mathbb{R}$ είναι απλώς ένα σημείο x_0 του $\mathbb{R}$ και στην επέκταση Poincaré έχουμε την ευθεία $x = x_0$ · τα σημεία της (x_0, y) που βρίσκονται στο $\mathcal{H}^2$ είναι βεβαίως αυτά με $y > 0$.

Έχουμε αμέσως την εξής:

Πρόταση 9.2.1. Έστω αντιστροφή της $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$. Τότε το σύνολο των σταθερών της σημείων στο $\mathcal{H}^2$ είναι είτε ημικύκλιο με κέντρο πάνω στο σύνορο $\mathbb{R}$ του $\mathcal{H}^2$, είτε ανοικτή ημιευθεία της μορφής $x = x_0$ για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 9.2.2. Ονομάζουμε υπερβολική ευθεία κάθε σύνολο της Πρότασης 8.2.1.



Υπερβολικές ευθείες.

Αν η υπερβολική ευθεία L έχει άκρα στο άπειρο τα z, z' , θα γράφουμε $L = (z, z')$. Η σειρά με την οποία γράφουμε τα άκρα δεν έχει ιδιαίτερη σημασία παρά μόνο εάν θέλουμε να προσδώσουμε έναν προσανατολισμό στην L . Σημειώνουμε και πάλι ότι τα z, z' είναι και τα δύο πραγματικά με $|z - z'| = 2r$, όπου r η ακτίνα του ημικυκλίου αποτελεί την ευθεία, ή, το ένα από τα δύο θα είναι το ∞ .

Πρόταση 9.2.3. Από δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία του $\mathcal{H}^2$ περνά μοναδική υπερβολική ευθεία.

Απόδειξη. Έστω $z_1, z_2 \in \mathcal{H}^2$, $z_1 \neq z_2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\Re(z_1) = \Re(z_2) = x_0$, τότε η ζητούμενη ευθεία είναι η $x = x_0$.
2. Αν $\Re(z_1) \neq \Re(z_2)$, θεωρούμε το Ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα z_1 και z_2 :

$$(1-t)z_1 + tz_2 = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in [0, 1].$$

Το μέσον του τμήματος αυτού είναι το $z_m = (z_1 + z_2)/2$. Φέρνουμε την κάθετο στο z_m αυτή έχει παραμέτρηση

$$\ell(s) = z_m - is(z_2 - z_1), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Τέμνει δε τον πραγματικό άξονα όταν

$$\Im(\ell(s)) = \Im(z_m) - s\Re(z_2 - z_1) = 0 \implies s = \frac{\Im(z_m)}{\Re(z_2 - z_1)}.$$

Το σημείο τομής είναι λοιπόν το

$$a = \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{2\Re(z_2 - z_1)}. \quad (9.3)$$

Η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $r = |a - z_1| = |a - z_2| = |z_1 - z_2|/2$.

□

Πρόταση 9.2.4. Η $M(\mathcal{H}^2)$ δρα μεταβατικά στο σύνολο των υπερβολικών ευθειών: για κάθε δύο υπερβολικές ευθείες $L = (z_1, z_2)$, $L' = (w_1, w_2)$ και σημεία $z_0 \in L$ και $w_0 \in L'$, υπάρχει μοναδικός $g \in M(\mathcal{H}^2)$ ώστε $g(L) = L'$ με $g(z_i) = w_i$, $i = 0, 1, 2$.

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός g δίνεται από την ισότητα των μιγαδικών διπλών λόγων

$$[z_0, z_1; z_2, z] = [w_0, w_1; w_2, g(z)].$$

□

Παράδειγμα 9.2.5. Έστω η ευθεία $L = (2, 4)$ και το $3 + i \in L$. Ο μετασχηματισμός g που δίνεται από την ισότητα των μιγαδικών διπλών λόγων

$$[2, 4; 3 + i, z] = [\infty, 0; i, g(z)] \iff g(z) = \frac{z - 4}{z - 2},$$

ικανοποιεί: $g(2) = \infty$, $g(4) = 0$, $g(3 + i) = i$ και η $g(L)$ είναι η $(0, \infty)$. Παρατηρήστε πως η αλλαγή στον προσανατολισμό του φανταστικού άξονα θα δώσει άλλον μετασχηματισμό:

$$[2, 4; 3 + i, z] = [0, \infty; i, h(z)] \iff h(z) = \frac{-z + 2}{z - 4}.$$

Έχουμε τα εξής άμεσα πορίσματα της Πρότασης 8.2.4 που περιγράφουν τη δράση της $M(\mathcal{H}^2)$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ και στο $\mathcal{H}^2$:

Πόρισμα 9.2.6. Η $M(\mathcal{H}^2)$ δρα διπλά μεταβατικά στο $\overline{\mathbb{R}}$: για οποιαδήποτε δύο σημεία z_1, z_2 και w_1, w_2 υπάρχει $g \in M(\mathcal{H}^2)$ με $g(z_1) = w_1$ και $g(z_2) = w_2$.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε τις υπερβολικές ευθείες (z_1, z_2) και (w_1, w_2) και να εφαρμόσουμε την Πρόταση 8.2.4 επιλέγοντας τυχαία σημεία επάνω στις ευθείες αυτές. $\square$

Πόρισμα 9.2.7. Η $M(\mathcal{H}^2)$ δρα μεταβατικά στο $\mathcal{H}^2$: για οποιαδήποτε σημεία z_1, z_2 υπάρχει $g \in M(\mathcal{H}^2)$ με $g(z_1) = z_2$.

Απόδειξη. Έστω $L = (z_0, z_0^*)$ υπερβολική ευθεία που περιέχει το z_1 και $L' = (w_0, w_0^*)$ υπερβολική ευθεία που περιέχει το z_2 . Το ο αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως από την Πρόταση 8.2.4. $\square$

Πρόταση 9.2.8. Από σημείο $z_0 \in \mathcal{H}^2$ περνούν άπειρες υπερβολικές ευθείες.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Πόρισμα 8.2.7 μπορούμε να κανονικοποιήσουμε ώστε $z_0 = i$. Τότε η υπερβολική ευθεία $(0, \infty)$ και οι υπερβολικές ευθείες $L_a = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z - a| = \sqrt{a^2 + 1}\}$, $a \in \mathbb{R}$, περνούν όλες από το i . $\square$

Παράδειγμα 9.2.9. Έστω $z_1, z_2 \in \mathcal{H}^2$ και έστω $L = (z_0, z_0^*)$ η υπερβολική ευθεία που τα περιέχει. Υποθέτοντας ότι $z_0^* > z_0$,

$$L = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z - a| = r\}, \quad a = (z_0 + z_0^*)/2, \quad r = (z_0^* - z_0)/2$$

και συνεπώς $z_i = a + re^{i\theta_i}$, $i = 1, 2$, για κάποια $\theta_i \in (0, \pi)$. Έστω $L_0 = (0, \infty)$ και $i \in L_0$. Ο μετασχηματισμός $g \in M(\mathcal{H}^2)$ που δίνεται από την

$$[z_0, z_0^*; z_1, z] = [\infty, 0; i, g(z)] \iff g(z) = \frac{i(z_1 - z_0)}{z_1 - z_0^*} \cdot \frac{z - z_0^*}{z - z_0} = \tan(\theta_1/2) \cdot \frac{z - z_0^*}{z - z_0},$$

ικανοποιεί τις σχέσεις

$$g(z_1) = i, \quad g(z_2) = -\tan(\theta_1/2) \cdot \frac{z_2 - z_0^*}{z_2 - z_0} = i \tan(\theta_1/2) \tan(\theta_2/2).$$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για $z_1 = -1 + i$ $z_2 = 1 + i$. Η υπερβολική ευθεία που τα περιέχει είναι η $L = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Θεωρούμε τον g που δίνεται από την ισότητα

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}; -1 + i, z] = [\infty, 0; i, g(z)] \iff g(z) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 2} \cdot \frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}}.$$

Αυτός απεικονίζει το $z_1 = -1 + i$ στο i και το $z_2 = 1 + i$ στο $(-2i\sqrt{2})/(\sqrt{2} + 2)^2$.

Πρόταση 9.2.10. Δύο υπερβολικές ευθείες έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο στο $\mathcal{H}^2$.

Απόδειξη. Μία μη εκ του σχήματος απόδειξη είναι η εξής: έστω L, L' υπερβολικές ευθείες με σύο κοινά σημεία z_1, z_2 και έστω $z_0 \in L$ και $z'_0 \in L'$. Υπάρχει υπερβολικός μετασχηματισμός f με $f(z_i) = z_i, i = 1, 2$ και $f(z_0) = z'_0$. Όμως τότε ο f απεικονίζει την ευθεία από τα z_1, z_2 στον εαυτό της, συνεπώς το $z_0 \in L'$ και το $z'_0 \in L$ και άρα $L = L'$. $\square$

Παράδειγμα 9.2.11. Έστω οι υπερβολικές ευθείες $L_1 = (0, \infty)$ και $L_2 = (-1, b), b > 0$. Επειδή

$$L_2 = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z - a| = r\}, \quad a = (b-1)/2, \quad r = (b+1)/2,$$

προκύπτει η εξίσωση

$$|z|^2 + a^2 - 2a\Re(z) = r^2.$$

Θέτοντας $z = it, t > 0$, παίρνουμε

$$t^2 + a^2 = r^2 \implies t = \sqrt{r^2 - a^2} = b.$$

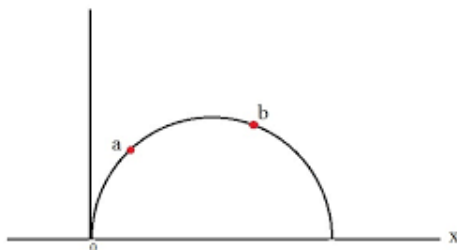
Συμπεραίνουμε πως για κάθε $b > 0$, Οι L_1 και L_2 τέμνονται στο ib .

Σχόλιο 9.2.12. Μπορούμε πάντοτε να κανονικοποιούμε δύο τεμνόμενες υπερβολικές ευθείες L_1 και L_2 ώστε $L_1 = (0, \infty)$ και $L_2 = (-1, b), b > 0$. Πράγματι, έστω L_1 και L_2 υπερβολικές ευθείες που τέμνονται στο $z_0 \in \mathcal{H}^2$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Οι L_i είναι ημικύκλια. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό g που απεικονίζει την L_1 στην $(0, \infty)$ και το z_0 στο i , έχουμε ότι η L_2 θα απεικονίζεται μέσω του μετασχηματισμού αυτού σε μία υπερβολική ευθεία της μορφής $(-a_1, a_2)$ με $a_i > 0, i = 1, 2$. Εφαρμόζοντας την D_{a_1} παίρνουμε τις $(0, \infty), (-1, a_1 a_2)$ που τέμνονται στο $a_1 i$.
2. Μία από τις L_i είναι κατακόρυφη ημιευθεία. Έστω ότι η L_1 είναι η $x = x_0$. Εφαρμόζοντας τη μετάθεση T_{-x_0} και μία ομοιοθεσία αν είναι απαραίτητο, προκύπτει και πάλι η προηγούμενη εικόνα.

9.2.2 Παραλληλία

Δύο υπερβολικές ευθείες λέγονται *παράλληλες* όταν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο στο $\mathcal{H}^2$. Ενδέχεται όμως να έχουν κάποιο κοινό σημείο επάνω στην επεκτεταμένη πραγματική ευθεία, λ.χ. οι $(-1, 1)$ και $(1, 2)$, ή, όπως λ.χ. όλες οι ευθείες της μορφής (x, ∞) να έχουν κοινό σημείο το ∞ . Στην περίπτωση που συμβαίνει αυτό, οι παράλληλες ευθείες λέγονται *ασυμπτωτικά παράλληλες*, ή *υπερπαράλληλες*.



Η επόμενη πρόταση είναι το Αξίωμα των Παραλλήλων της Υπερβολικής Γεωμετρίας.

Ασυμπτωτικά παράλληλες υπερβολικές ευθείες.

Πρόταση 9.2.13. Έστω ευθεία L και σημείο z_0 εκτός αυτής. Από το z_0 περνούν άπειρες παράλληλες με την L .

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $L = (0, \infty)$ και $z_0 \in \mathcal{H}^2$ με $\Re(z_0) = x_0 \neq 0$. Μία (ασυμπτωτικά) παράλληλη προς την L από το z είναι προφανώς η $x = x_0$. Ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $x_0 > 0$. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το 0 και z_0 και από το z_0 την κάθετη στο τμήμα αυτό. Αυτή τέμνει το σύνορο σε κάποιο $2a$, $a > 0$. Τότε, το ημικύκλιο κέντρου a και ίσης ακτίνας είναι η υπερβολική ευθεία $(0, 2a)$ που περνά από το z_0 και είναι παράλληλη στην υπερβολική ευθεία $(0, \infty)$. Από εκεί και στο εξής, κάθε ημικύκλιο κέντρου $a' > a$ και ακτίνας $|a' - z_0|$ είναι υπερβολική ευθεία που περνά από το z_0 , ασυμπτωτικά παράλληλη L .

Στη γενική περίπτωση, για z_0 και $L = (z_1, z_2)$ τυχαία, απεικονίζουμε μέσω ενός g της $M(\mathcal{H}^2)$ τα z_0, z_1, z_2 στα $z'_0, 0, \infty$, όπου z'_0 σημείο με $\Re(z'_0) \neq 0$. $\square$

9.2.3 Ασκήσεις

1. Βρείτε το σημείο τομής των $L = (1, 5)$ και $L' = (2, 6)$ με δύο τρόπους: α) γράφοντας αναλυτικά τις καρτεσιανές εξισώσεις των L, L' και λύνοντας το σύστημα και β) χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό που απεικονίζει την $(1, 5)$ και το σημείο της $2 + i\sqrt{3}$ στην $(0, \infty)$ και το σημείο της i , αντίστοιχα. (Απάντηση: Οι καρτεσιανές εξισώσεις:

$$L : |z - 3| = 2, \quad L' : |z - 4| = 2.$$

Ο μετασχηματισμός δίνεται από την ισότητα των διπλών λόγων

$$[1, 5; 2 + i\sqrt{3}, z] = [\infty, 0; i, g(z)].$$

Χωρίς να γράψετε τον ακριβή τύπο του g , βρείτε τα $g(2), g(6)$.)

2. Έστω η ευθεία $L = (-1, 1)$ και η ευθεία $L_b = (0, b)$, $b > 0$. Βρείτε συνθήκες για το b ώστε οι L και L' να είναι: α) τεμνόμενες και β) παράλληλες. Στο α) προσδιορίστε το σημείο τομής, ενώ στο β) προσδιορίστε το είδος της παραλληλίας.
3. Ονομάζουμε δύο τεμνόμενες υπερβολικές ευθείες *ορθογώνιες* (ή, αλλιώς, *κάθετες*) αν είναι ορθογώνιες με την Ευκλείδεια έννοια, δηλαδή, οι εφαπτόμενές τους στο σημείο τομής είναι ορθογώνιες (θα δούμε στην Ενότητα 8.4.1 το λόγο που η υπερβολική καθετότητα ταυτίζεται με την Ευκλείδεια). Αποδείξτε ότι από σημείο z_0 εκτός ευθείας L άγεται μοναδική κάθετος προς την L . (Υπόδειξη: Αν $L = (z, w)$ θεωρήστε τον μετασχηματισμό g που απεικονίζει την L στην $L_0 = (0, \infty)$ και το z_0 στο z'_0 με $\Re(z'_0) \neq 0$. Η $L'_0 = (-|z'_0|, |z'_0|)$ περνά από το z'_0 και είναι ορθογώνια στην L'_0 .)
4. Αποδείξτε ότι εάν $f \in M(\mathcal{H}^2)$ είναι υπερβολικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει υπερβολική ευθεία $\mathcal{A}_f$ που παραμένει αναλλοίωτη από τον f : $f(\mathcal{A}_f) = \mathcal{A}_f$. Η ευθεία $\mathcal{A}_f$ καλείται *άξονας* του υπερβολικού μετασχηματισμού f . (Υπόδειξη: Κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(z) = \delta z$, $\delta > 0$, $\delta \neq 1$. Τα σταθερά σημεία του f είναι τα $0, \infty$. Για κάθε $si \in (0, \infty)$ είναι $f(si) = \delta si \in (0, \infty)$.)

5. Έστω ο μετασχηματισμός

$$f(z) = \frac{4z - 1}{-3z + 1}.$$

Δείξτε ότι ο f είναι υπερβολικός και βρείτε τον άξονά του $\mathcal{A}_f$. (Απάντηση: Σταθερά σημεία: $(-1 \pm \sqrt{7/3})/2$. Άξονας:

$$\mathcal{A}_f = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid |z + 1/2| = \sqrt{7/3}/2\}.$$

9.3 Υπερβολική μετρική

9.3.1 Υπερβολικό μήκος καμπύλης

Έστω $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}^2$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$, $I = [a, b]$, μία συνεχώς παραγωγίσιμη καμπύλη. Η υπερβολική νόρμα της παραγώγου $\dot{\gamma}$ ορίζεται από τη σχέση

$$|\dot{\gamma}(t)|_h = \frac{|\dot{z}(t)|}{y(t)}.$$

Ονομάζουμε υπερβολικό μήκος της γ τον αριθμό

$$\ell_h(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_h dt.$$

Η επόμενη πρόταση αφήνεται να αποδειχθεί στην Άσκηση 8.3.5.1(θ')iiiA'.

Πρόταση 9.3.1. Το υπερβολικό μήκος μίας συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης γ του $\mathcal{H}^2$:

- δεν εξαρτάται από την παραμέτρηση της γ και
- παραμένει αναλλοίωτο από τη δράση της $\text{GM}(\mathcal{H}^2)$.

Παράδειγμα 9.3.2. Έστω η καμπύλη $\gamma(t) = t + ib$, $b > 0$, $t \in (-a, a)$, $a > 0$. Είναι $\dot{\gamma}(t) = 1$, $|\dot{\gamma}(t)|_h = 1/b$ και $\ell_h(\gamma) = 2a/b$.

Παράδειγμα 9.3.3. (Μήκη υπερβολικών ευθυγράμμων τμημάτων) α) Έστω το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z = i$ και $w = si$, $s \neq 1$, επάνω στην υπερβολική ευθεία $(0, \infty)$. Ας υποθέσουμε ότι $s > 1$. Παίρνουμε την παραμέτρηση του τμήματος:

$$\gamma(t) = (1 - t)i + tsi = (1 + t(s - 1))i, \quad t \in [0, 1].$$

Άρα, $\dot{\gamma}(t) = (s - 1)i$ και συνεπώς $|\dot{\gamma}(t)|_h = |(s - 1)|/(1 + t(s - 1))$. Οπότε, για $s > 1$,

$$\ell_h(\gamma) = \int_0^1 \frac{(s - 1)}{1 + t(s - 1)} dt = [\ln(1 + t(s - 1))]_{t=0}^1 = \ln s,$$

ενώ για $s < 1$,

$$\ell_h(\gamma) = \int_0^1 \frac{(1 - s)}{1 + t(s - 1)} dt = -[\ln(1 + t(s - 1))]_{t=0}^1 = -\ln s$$

Άρα, $\ell_h(\gamma) = |\ln s|$. Θέτουμε $\rho = \ell_h(\gamma)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \cosh^2(\rho/2) &= \frac{(e^{\rho/2} + e^{-\rho/2})^2}{4} = \frac{e^\rho + e^{-\rho} + 2}{4} \\ &= \frac{s + (1/s) + 2}{4} = \frac{(s+1)^2}{4s} \\ &= \frac{|z - \bar{w}|^2}{4\Im(z)\Im(w)}. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στον τύπο για το μήκος ρ του υπερβολικού ευθυγράμμου τμήματος με άκρα z, w που κείται στη $(0, \infty)$:

$$\cosh(\rho/2) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\Im(z))^{1/2}(\Im(w))^{1/2}}. \quad (9.4)$$

β) Έστω τώρα το υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $z = a + re^{i\theta_1}, w = a + re^{i\theta_2}, a \in \mathbb{R}, r > 0, \theta_1, \theta_2 \in (0, \pi), \theta_1 > \theta_2$. Παραμετρούμε το τμήμα ως προς τη γωνία θ :

$$\gamma(\theta) = a + re^{i\theta}, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_1].$$

Είναι $\dot{\gamma}(\theta) = ire^{i\theta}$ και $|\dot{\gamma}(\theta)|_h = r/(r \sin \theta) = 1/\sin \theta$. Άρα,

$$\ell_h(\gamma) = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{(1 + \tan^2(\theta/2))d\theta}{2 \tan(\theta/2)} = [\ln(\tan(\theta/2))]_{\theta=\theta_2}^{\theta_1} = \ln \left(\frac{\tan(\theta_1/2)}{\tan(\theta_2/2)} \right).$$

Παρόμοια με το α), δείχνεται ότι και στην περίπτωση αυτή ισχύει ο τύπος (??). Ο τύπος αυτός αποτελεί μία από τις εκφράσεις της υπερβολικής απόστασης δύο οποιωνδήποτε σημείων, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει το εξής πόρισμα του οποίου η απόδειξη αφήνεται στην Άσκηση 8.3.5.??:

Πόρισμα 9.3.4. Οι υπερβολικές ευθείες έχουν άπειρο υπερβολικό μήκος.

9.3.2 Υπερβολική απόσταση

Η υπερβολική απόσταση $d_h(z, w)$ δύο σημείων $z, w \in \mathcal{H}^2$ ορίζεται ως εξής: έστω το σύνολο $C(z, w)$ των συνεχώς παραγωγίσμων καμπυλών γ του $\mathcal{H}^2$ με άκρα τα z και w . Τότε,

$$d_h(z, w) = \inf_{\gamma \in C(z, w)} \{\ell_h(\gamma)\}.$$

Πρόταση 9.3.5. Η d_h όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μετρική.

Απόδειξη. Άσκηση 8.3.5.??.

□

Θα δείξουμε τώρα ότι ο μετρικός χώρος $(\mathcal{H}^2, d_h)$ είναι γεωδαισιακός. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε δύο σημεία του $\mathcal{H}^2$ υπάρχει καμπύλη με το ελάχιστο υπερβολικό μήκος που τα ενώνει. Μία τέτοια καμπύλη λέγεται γεωδαισιακή.

Πρόταση 9.3.6. Οι γεωδαισιακές του $(\mathcal{H}^2, d_h)$ είναι οι υπερβολικές ευθείες.

Απόδειξη. Έστω δύο σημεία $z, w \in \mathcal{H}^2$. κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z = i, w = si, s > 0$. Έστω μία οποιαδήποτε συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}^2$, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ με $\gamma(0) = i$ και $\gamma(1) = si$. Τότε,

$$\ell_h(\gamma) = \int_0^1 \frac{|\dot{x}(t) + i\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{|\dot{y}(t)|}{y(t)} dt \geq \left| \int_0^1 \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} dt \right| = |[\ln(y(t))]_{t=0}^1| = |\ln s|.$$

Το τελευταίο όμως είναι ακριβώς το μήκος του υπερβολικού ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα i, si . Παίρνοντας το $\inf$ επάνω σε όλες τις $\gamma \in C(i, si)$ προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Η επόμενη πρόταση προκύπτει απευθείας από τον τύπο (??) μέσω απλών πράξεων (δείτε την Άσκηση 8.3.5.??).

Πρόταση 9.3.7. Η υπερβολική απόσταση $\rho = d_h(z, w)$ δύο σημείων z, w του $\mathcal{H}^2$ δίνεται από τους παρακάτω ισοδύναμους τύπους:

$$\cosh(\rho/2) = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\Im(z))^{1/2}(\Im(w))^{1/2}}, \quad (9.5)$$

$$\sinh(\rho/2) = \frac{|z - w|}{2(\Im(z))^{1/2}(\Im(w))^{1/2}}, \quad (9.6)$$

$$\cosh(\rho) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\Im(z)\Im(w)}, \quad (9.7)$$

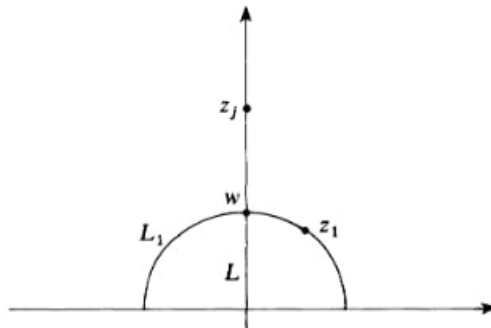
$$\rho = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (9.8)$$

Η πρόταση που κλείνει την ενότητα αυτή ουσιαστικά ορίζει την έννοια του μεταξύ:

Πρόταση 9.3.8. Έστω $z, w \in \mathcal{H}^2$ διαφορετικά σημεία. Τότε

$$d_h(z, w) = d_h(z, \zeta) + d_h(\zeta, w),$$

αν και μόνο αν το ζ ανήκει στο γεωδαισιακό τμήμα με άκρα z, w .

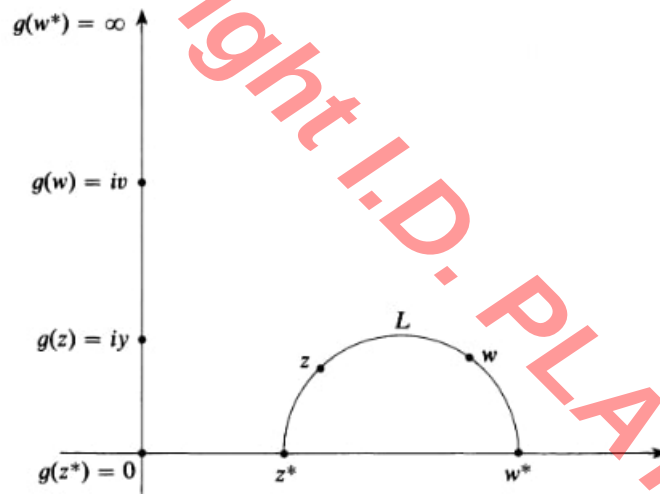


Πρόταση ??

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα z, w είναι τα i, si για κάποιο $s > 0$. Αν το ζ ανήκει στο γεωδαισιακό τμήμα των i, si τότε $\zeta = ti, 1 \leq t \leq s$ και η ισότητα της πρότασης ισχύει. Αντιστρόφως, πάλι για z, w όπως προηγουμένως, έστω ότι έχουμε ισότητα στην πρόταση και ας υποθέσουμε ότι το ζ δεν κείται στην $(0, \infty)$. Τότε όμως, η καμπύλη που αποτελείται από τα υπερβολικά ευθύγραμμα τμήματα α) s_1 με αρχή το i και τέλος το ζ και β) s_2 με αρχή το z και τέλος το si , έχει μήκος αυστηρά μεγαλύτερο από το μήκος του τμήματος που ενώνει τα i και si . Καταλήγουμε σε άτοπο. $\square$

9.3.3 Ισομετρίες

Έχουμε ήδη δει ότι η $GM(\mathcal{H}^2)$ είναι υποομάδα της ομάδας ισομετριών του $(\mathcal{H}^2, d_h)$. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε διαμέσου ενός τύπου που περιέχει μιγαδικούς διπλούς λόγους ότι είναι ακριβώς η ομάδα ισομετριών. Υπενθυμίζουμε ότι ο μιγαδικός διπλός λόγος είναι αναλλοίωτος μόνο από μετασχηματισμούς Möbius.



Πρόταση ??.

Έστω $z, w \in \mathcal{H}^2$ οποιαδήποτε σημεία και L η υπερβολική ευθεία που τα περιέχει. Υποθέτουμε ότι η L έχει άκρα z^*, w^* και ότι τα τέσσερα σημεία εμφανίζονται με τη σειρά z^*, z, w, w^* , επάνω στην L .

Πρόταση 9.3.9. Η υπερβολική απόσταση $d_h(z, w)$ δίνεται από τον τύπο:

$$d_h(z, w) = \ln([w^*, z^*; z, w]). \quad (9.9)$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι επειδή τα z^*, z, w, w^* κείνται επάνω σε υπερβολική ευθεία, ο διπλός λόγος είναι πραγματικός. Εφαρμόζουμε το στοιχείο εκείνο g της $M(\mathcal{H}^2)$ που απεικονίζει τα w^*, z^*, z, w , στα $\infty, 0, i, si$ για κάποιο $s > 1$. Τότε

$$\begin{aligned} d_h(z, w) &= d_h(g(z), g(w)) = \ln s \\ &= \ln([\infty, 0; i, si]) \\ &= \ln([w^*, z^*; z, w]). \end{aligned}$$



9.3.4 Υπερβολικοί δίσκοι

Ο ανοικτός υπερβολικός δίσκος κέντρου $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$D_h(z_0, r) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid d_h(z, z_0) < r\}.$$

Ο κλειστός υπερβολικός δίσκος κέντρου $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$D_h(z_0, r) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid d_h(z, z_0) \leq r\},$$

και ο υπερβολικός κύκλος κέντρου $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και ακτίνας $r > 0$ είναι το σύνολο

$$S_h(z_0, r) = \{z \in \mathcal{H}^2 \mid d_h(z, z_0) = r\}.$$

Θα δείξουμε ότι κάθε υπερβολικός κύκλος είναι Ευκλείδειος κύκλος του οποίου θα προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα. Έστω $S_h(z_0, r)$. τότε η σχέση $d_h(z, z_0) = r$ και οι τύποι (??), (??) δίνουν

$$k = \tanh(r/2) = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|}.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι η σχέση αυτή είναι εξίσωση Απολλώνιου κύκλου (δείτε την Άσκηση 7.4.6.1(θ')iiiA') και μένει να προσδιοριστεί το κέντρο και η ακτίνα του. Υψώνοντας στο τετράγωνο και απαλείφοντας τον παρονομαστή, παίρνουμε

$$|z|^2 - 2\Re\left(z \cdot \frac{\bar{z}_0 - k^2 z_0}{1 - k^2}\right) + |z_0|^2 = |z|^2 - 2\Re(z \cdot (\Re(z_0) - i\Im(z_0) \cosh r)) + |z_0|^2 = 0.$$

Συμπληρώνοντας το τετράγωνο βρίσκουμε

$$|z - (\Re(z_0) + i\Im(z_0) \cosh r)|^2 = \sinh^2(r) \Im^2(z_0).$$

Καταλήγουμε λοιπόν την εξής:

Πρόταση 9.3.10. Ο υπερβολικός κύκλος $S_h(z_0, r)$ είναι ο Ευκλείδειος κύκλος κέντρου $\Re(z_0) + i\Im(z_0) \cosh r$ και ακτίνας $\sinh r \Im(z_0)$.

Αποδεικνύεται ότι η υπερβολική περίμετρος του $S_h(a, r)$ ισούται με $2\pi \sinh r$ (δείτε την Άσκηση 8.3.5.??), ενώ βεβαώς, η Ευκλείδεια περίμετρός του είναι $2\pi \Im(z_0) \sinh r$.

9.3.5 Υπερβολικό εμβαδόν

Έστω χωρίο $\Omega \subset \mathcal{H}^2$. Το υπερβολικό εμβαδόν $\text{Area}_h(\Omega)$ του Ω ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\text{Area}_h(\Omega) = \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2}.$$

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται στην Άσκηση 8.3.5.??.

Πρόταση 9.3.11. Το υπερβολικό εμβαδόν παραμένει αναλλοίωτο από τις υπερβολικές ισομετρίες.

Το υπερβολικό εμβαδόν υπερβολικού δίσκου $D_h(z_0, r)$, δίνεται από την εξής:

Πρόταση 9.3.12. Το υπερβολικό εμβαδόν $\text{Area}_h(D_h(z_0, r))$ υπερβολικού δίσκου $D_h(z_0, r)$ είναι ίσο με $4\pi \sinh^2(r/2)$.

Απόδειξη. Άσκηση 8.3.5.??.

□

9.3.6 Ασκήσεις

1. Αποδείξτε την Πρόταση ?? (Υπόδειξη: Αν $f \in M(\mathcal{H}^2)$, έστω τότε

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1.$$

Επειδή

$$f'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2},$$

έχουμε από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(f \circ \gamma)(t) = f'(z(t))\dot{z}(t) \implies |(f \circ \gamma)(t)| = \frac{|\dot{z}(t)|}{|cz + d|^2}.$$

Επίσης,

$$\Im((f \circ \gamma)(t)) = \frac{\Im(z(t))}{|cz + d|^2}.$$

Άρα,

$$\ell_h(f \circ \gamma) = \int_a^b |(f \circ \gamma)(t)|_h dt = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_h dt = \ell_h(\gamma).$$

Ομοίως και για f που αντιστρέφει τον προσανατολισμό.)

2. Αποδείξτε το Πόρισμα 8.3.1. (Υπόδειξη: Επειδή το υπερβολικό μήκος παραμένει αναλλοίωτο από τους υπερβολικούς μετασχηματισμούς, αρκεί να δείξετε το αποτέλεσμα για την ευθεία $(0, \infty)$. Προς τούτο, πάρτε $(1/s)i, si$, σημεία της ευθείας $s > 1$. Το υπερβολικό μήκος του υπερβολικού ευθυγράμμου τμήματος γ_s που τα ενώνει είναι ίσο με $2 \ln s$. Αφήνοντας το $s \rightarrow +\infty$ παίρνετε το αποτέλεσμα.)
3. Αποδείξτε την Πρόταση 8.3.2.
4. Αποδείξτε την ισοδυναμία των τύπων της Πρότασης ??.
5. Δείξτε ότι αν $d_h(z, w) = \rho$, για κάποια $z, w \in \mathcal{H}^2$, τότε

$$\rho = \tanh \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|.$$

6. Θεωρήστε το σύνολο $\Delta = \{z = x + iy \in \mathcal{H}^2 \mid x = y\}$. Αν $w \in \mathcal{H}^2$ τότε βρείτε το

$$d = \text{dist}(w, \Delta) = \inf\{d_h(z, w) \mid z \in \Delta\}.$$

(Υπόδειξη: Αν $w = u + iv$, $u > 0$, τότε $d = 0$ (γιατί;). Αν $u \leq 0$, τότε από την προηγούμενη άσκηση είναι

$$(\tanh^{-1} \rho)^2 = \frac{(x-u)^2 + (x-v)^2}{(x-u)^2 + (x+v)^2} = f(x), \quad x > 0.$$

Δείξτε τώρα ότι η f έχει ολικό ελάχιστο.)

7. Υπολογίστε το υπερβολικό μήκος του υπερβολικού κύκλου $S_h(z_0, r)$. (Υπόδειξη: Έστω $\ell = \ell(S_h(z_0, r))$ υπερβολικό μήκος του $S_h(z_0, r)$: θεωρούμε την παραμέτρηση του υπερβολικού κύκλου

$$\gamma(\theta) = \Re(z_0) + i\Im(z_0) \cosh r + \sinh r \Im(z_0) e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Είναι $\dot{\gamma}(\theta) = i \sinh r \Im(z_0) e^{i\theta}$ και

$$|\dot{\gamma}(\theta)|_h = \frac{\sinh r}{\cosh r + \sinh r \sin \theta}.$$

Άρα,

$$\ell = \int_0^{2\pi} \frac{\sinh r \, d\theta}{\cosh r + \sinh r \sin \theta}.$$

Θέτουμε $\zeta = e^{i\theta}$, οπότε $d\zeta = ie^{i\theta} d\theta = i\zeta d\theta$ και $\sin \theta = (\zeta - \bar{\zeta})/(2i) = (\zeta - (1/\zeta))/(2i)$. Το ολοκλήρωμα τότε γράφεται σε μιγαδική μορφή μετά από τις πράξεις, ως

$$\ell = 2 \oint_{|\zeta|=1} \frac{d\zeta}{\zeta^2 + 2i \coth r \zeta - 1}.$$

Ο παρονομαστής έχει ρίζες $i(1 \pm \cosh r)/\sinh r$, δηλαδή τις

$$\zeta_1 = -i \coth(r/2), \quad \zeta_2 = -i \tanh(r/2),$$

εκ των οποίων, επειδή είναι αντιθετοαντίστροφες, μόνο η μία βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου. Επειδή δε $\cosh x > \sinh x$ για κάθε $x > 0$, η ρίζα αυτή είναι η ζ_2 . Τότε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο ισούται με

$$\text{Res}(\zeta_2) = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_2} \frac{2(\zeta - \zeta_2)}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} = \frac{2}{\zeta_2 - \zeta_1} = -i \sinh r.$$

Από το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων προκύπτει τότε

$$\ell = \ell(S_h(z_0, r)) = 2\pi i \text{Res}(\zeta_2) = 2\pi \sinh r.$$

8. Αποδείξτε την Πρόταση ?? (Υπόδειξη: Γράψτε το στοιχείο υπερβολικού εμβαδού ως

$$\frac{dx dy}{y^2} = \frac{dz d\bar{z}}{2i \Im^2(z)}.$$

Υπάρχει εξήγηση για τον λόγο που αυτό είναι δυνατόν, αλλά είναι πέραν από τον σκοπό των σημειώσεων αυτών. Γράφουμε για $\Omega \subset \mathcal{H}^2$ και $g \in \text{GM}(\mathcal{H}^2)$,

$$\text{Area}(g(\Omega)) = \frac{1}{2i} \iint_{g(\Omega)} \frac{dz d\bar{z}}{\Im^2(z)}.$$

Με το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής, έχουμε για $g \in \text{M}(\mathcal{H}^2)$ ότι

$$\text{Area}(g(\Omega)) = \frac{1}{2i} \iint_{\Omega} |\det(g(\zeta))| \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\Im^2(g(\zeta))}.$$

Αν $g(\zeta) = (a\zeta + b)(c\zeta + d)$, $ad - bc = 1$, τότε

$$\det(g(\zeta)) = |g'(\zeta)|^2 = \frac{1}{|cz + d|^4}$$

και επίσης $\Im(g(\zeta)) = \Im(\zeta)/|cz + d|^2$. Επομένως,

$$\text{Area}(g(\Omega)) = \frac{1}{2i} \iint_{\omega} \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{\Im^2(\zeta)} = \text{Area}_h(\Omega).$$

Ομοίως και στην περίπτωση που $g(\zeta) = (a(-\bar{\zeta}) + b)/(c(-\bar{\zeta}) + d)$, $ad - bc = 1$.)

9. Αποδείξτε την Πρόταση ?? (Υπόδειξη: Από την Πρόταση ?? έχουμε ότι το ζητούμενο υπερβολικό εμβαδόν είναι ίσο με το υπερβολικό εμβαδόν του υπερβολικού δίσκου $D = D(i, R)$, όπου $\sinh R = \tanh r$ (γιατί;). Ο δίσκος αυτός αποτελείται από τα σημεία

$$z(\rho, \theta) = i + \sinh \rho e^{i\theta}, \quad (\rho, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi].$$

Οπότε, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Area}_h(D) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\cosh \rho \sinh \rho}{(1 + \sinh \rho \sin \theta)^2} dr d\theta \\ &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \frac{\cosh \rho \sinh \rho}{(1 + \sinh \rho \cos \theta)^2} d\theta \right) d\rho \end{aligned}$$

Υπολογίστε τώρα το εσωτερικό ολοκλήρωμα με τη μέθοδο της Άσκησης 8.3.5.??.)

9.4 Υπερβολική Τριγωνομετρία

9.4.1 Γωνίες και τρίγωνα

Έστω καμπύλες C_i , $i = 1, 2$ του $\mathcal{H}^2$ που τέμνονται στο z_0 . Αν $\gamma_i : [a, b] \rightarrow \mathcal{H}^2$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες παραμετρήσεις τους, $\gamma_i = \gamma_i(t)$, $t \in [a, b]$, $i = 1, 2$, τότε υπάρχει $t_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0 \in \mathcal{H}^2$. Το υπερβολικό βαθμωτό γινόμενο των εφαπτομένων διανυσμάτων $\dot{\gamma}_1(t_0)$ και $\dot{\gamma}_2(t_0)$ στο z_0 ορίζεται από τη σχέση

$$(\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0))_h = \frac{\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)}{\Im^2(z_0)},$$

όπου στον αριθμητή του δεξιού κλάσματος είναι το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο. Παρατηρούμε ότι

$$|(\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0))_h| = \frac{|\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0)|}{\Im^2(z_0)} \leq \frac{|\dot{\gamma}_1(t_0)| |\dot{\gamma}_2(t_0)|}{\Im^2(z_0)} = |\dot{\gamma}_1(t_0)|_h \cdot |\dot{\gamma}_2(t_0)|_h,$$

με την ανισότητα να προκύπτει από την Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski. Ονομάζουμε τώρα γωνία των C_1 και C_2 στο z_0 τον αριθμό

$$\angle(C_1, C_2)_{z_0} = \arccos \left(\frac{(\dot{\gamma}_1(t_0) \cdot \dot{\gamma}_2(t_0))_h}{|\dot{\gamma}_1(t_0)|_h \cdot |\dot{\gamma}_2(t_0)|_h} \right) \in [0, \pi]. \quad (9.10)$$

Η γωνία $\angle(C_1, C_2)_{z_0}$ δεν εξαρτάται από τις παραμετρήσεις των C_i , $i = 1, 2$. Αυτό αποδεικνύεται και αναλυτικά, προκύπτει όμως και άμεσα από την παρατήρηση ότι ορισμένη κατά τον τρόπον αυτόν η γωνία συμπίπτει με τη γωνία που ορίζεται στην Ευκλείδεια περίπτωση.

Στην Ευκλείδεια περίπτωση, ο αριθμός που ορίζεται ως η γωνία μεταξύ δύο ευθειών (δηλαδή, μεταξύ γεωδαισιακών του Ευκλείδειου χώρου) βρίσκεται σε μία 1–1 και επί αντιστοιχία με το κυρτό χωρίο που ορίζουν δύο εκ των προτέρων καθορισμένες ημιευθείες που εκκινούν από το σημείο τομής των ευθειών. Υπενθυμίζουμε ότι ένα χωρίο του Ευκλείδειου χώρου είναι κυρτό, αν για κάθε δύο σημεία του χωρίου ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει κείται εξ ολοκλήρου εντός του χωρίου. Με την ίδια συλλογιστική, ένα χωρίο του $\mathcal{H}^2$ ονομάζεται υπερβολικά κυρτό, αν κάθε δύο σημεία του χωρίου μπορούν να ενωθούν με υπερβολικό ευθύγραμμο τμήμα που κείται εξ ολοκλήρου εντός του χωρίου. Απλά παραδείγματα υπερβολικών κυρτών χωρίων είναι βεβαίως το ίδιο το $\mathcal{H}^2$, καθώς και κάθε γεωδαισιακή του. Υπερβολικά κυρτό όμως είναι και κάθε υπερβολικό ημιεπίπεδο. Τούτο ορίζεται ως μία από τις συνιστώσες του συμπληρώματος μίας γεωδαισιακής L . Οι συνιστώσες αυτές είναι δύο, όπως προκύπτει από το Θεώρημα του Jordan και είναι και οι δύο υπερβολικά κυρτές. Μία απλή απόδειξη του γεγονότος αυτού βασίζεται στη χρήση του μοντέλου Beltrami-Klein και την παραθέτουμε στην Πρόταση ??.

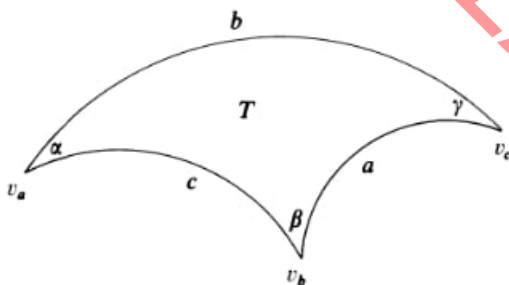
Έστω $z_0 \in \mathcal{H}^2$ και L_1, L_2 δύο υπερβολικές ημιευθείες που περνούν από το z_0 . Ας υποθέσουμε πρώτα ότι οι L_1, L_2 δεν κείνται επί της ίδιας υπερβολικής ευθείας. Αν L_1^* είναι η γεωδαισιακή που περιέχει την L_1 , τότε το σύνολο $L_2 \setminus \{z_0\}$ έχει κενή τομή με την L_1^* . Άρα, η ανοικτή υπερβολική ημιευθεία κείται εξ ολοκλήρου σε ένα από τα ανοικτά ημιεπίπεδα που είναι συμπληρωματικά της L_1^* . Αν P_2 είναι το ημιεπίπεδο στο οποίο κείται η $L_2 \setminus \{z_0\}$, τότε έστω P_1 το ανοικτό ημιεπίπεδο που προκύπτει με παρόμοιο τρόπο για την ανοικτή ημιευθεία $L_1 \setminus \{z_0\}$. Το εσωτερικό της γωνίας των ημιευθειών L_1 και L_2 με κορυφή το z_0 ορίζεται

ως το σύνολο $P_1 \cap P_2$. Το εσωτερικό της γωνίας αποτελεί την μία από τις συνιστώσες του συμπληρώματος του συνόλου $L_1 \cup L_2$ · καλούμε την άλλη συνιστώσα *εξωτερικό της γωνίας*.

Εάν οι L_1, L_2 κείνται στην ίδια γεωδαισιακή, τότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: α) Η ένωση $L_1 \cup L_2$ είναι υπερβολική ευθεία. Τότε, δεν υπάρχει καμμία κανονική επιλογή εσωτερικού και εξωτερικού της γωνίας και η γωνία καλείται *ευθεία*. β) Είναι $L_1 = L_2 = L$ και η γωνία καλείται *μηδενική*. Στην περίπτωση αυτή, ορίζουμε το εσωτερικό της μηδενικής γωνίας να είναι το κενό και το εξωτερικό της να είναι το συμπλήρωμα της L .

Δοθείσης γωνίας που ορίζουν οι διαφορετικές υπερβολικές ημιευθείες L_1, L_2 με κορυφή το z_0 , το εσωτερικό της γωνίας είναι υπερβολικά κυρτό σύνολο όντας τομή υπερβολικά κυρτών συνόλων. Το εξωτερικό δεν μπορεί να είναι υπερβολικά κυρτό, καθώς κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως κάθε γεωδαισιακό τμήμα που ενώνει σημεία της $L_1 \setminus \{z_0\}$ και της $L_2 \setminus \{z_0\}$ θα ανήκε ταυτόχρονα και στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της γωνίας. Στο εσωτερικό τώρα κάθε γωνίας που δεν είναι ευθεία ή μηδενική, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\theta \in (0, \pi)$ που ορίστηκε στην (8.2)· στο δε εξωτερικό της αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $2\pi - \theta$. Εάν η γωνία είναι μηδενική, $\theta = 0$. Εάν η γωνία είναι ευθεία, αντιστοιχίζουμε το π και στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της γωνίας.

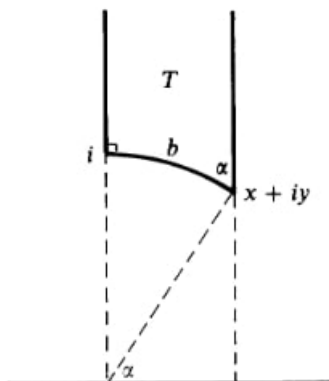
Έστω A, B, C τρία διαφορετικά μη συνευθειακά σημεία του $\mathcal{H}^2$ (δηλαδή, δεν ανήκουν και τα τρία στην ίδια υπερβολική ευθεία). Θα συμβολίζουμε με a, b, c τα υπερβολικά μήκη των γεωδαισιακών τμημάτων $[B, C], [A, C]$ και $[A, B]$, αντίστοιχα, ενώ θα συμβολίζουμε με α, β, γ τις γωνίες με κορυφές τα $A = v_a, B = v_b, C = v_c$, αντίστοιχα. Το *υπερβολικό τρίγωνο* $\triangle(ABC)$ ορίζεται ως η ένωση των γεωδαισιακών τμημάτων $[B, C], [A, C]$ και $[A, B]$, τα οποία λέγονται *πλευρές* του τριγώνου. Το *εσωτερικό* του τριγώνου είναι η τομή των κυρτών χωρίων που ορίζουν οι γωνίες του τριγώνου.



Υπερβολικό τρίγωνο.

9.4.2 Γωνία Παραλληλισμού

Έστω τρίγωνο με γωνίες $\alpha, \pi/2, 0$ $\alpha \neq 0$. Η γωνία α καλείται *γωνία παραλληλισμού*.



Πρόταση 8.4.1: Η α είναι η Γωνία Παραλληλισμού.

Πρόταση 9.4.1. Για T όπως παραπάνω,

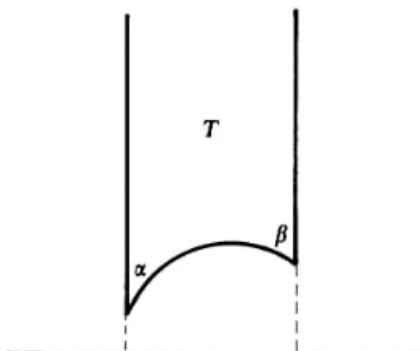
$$\cosh b \sin \alpha = 1. \quad (9.11)$$

Απόδειξη. Κανονικοποιούμε ώστε $v_c = i, v_b = \infty, v_a = z = x + iy, |z| = 1$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο της απόστασης (??) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cosh b = \cosh(d_h(i, z)) &= 1 + \frac{|z - i|^2}{2\Im(z)} \\ &= 1 + \frac{2 - 2y}{2y} \\ &= 1/y = 1/\sin \alpha, \end{aligned}$$

με την τελευταία σχέση να προκύπτει από το Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης. $\square$

9.4.3 Τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο



Πρόταση ?? : Νόμος Συνημιτόνων για τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο.

Η περίπτωση των τριγώνων της Ενότητας 8.4.2 αποτελεί ειδική περίπτωση των (ορθογωνίων) τριγώνων με κορυφή στο άπειρο, δηλαδή, τριγώνων με γωνίες $\alpha, \beta, 0$. Τότε, οι πλευρές a, b είναι απείρου μήκους.

Πρόταση 9.4.2. (Νόμος Συνημιτόνων για τρίγωνα με κορυφή στο άπειρο) Για τρίγωνα $T(\alpha, \beta, 0)$ έχουμε

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + 1}{\sin \alpha \sin \beta}. \quad (9.12)$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_c = \infty$, $v_a = e^{i\theta}$, $v_b = e^{i\phi}$, με $0 < \theta < \phi < \pi$. Εδώ, $\alpha = \theta$, $\beta = \pi - \phi$. Η ζητούμενη σχέση προκύπτει ξανά από τον τύπο της απόστασης (??). $\square$

9.4.4 Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα

Το Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα αναφέρεται σε τρίγωνα $T(\alpha, \beta, \pi/2)$.

Πρόταση 9.4.3. Σε υπερβολικό ορθογώνιο τρίγωνο $T(\alpha, \beta, \pi/2)$ είναι:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b. \quad (9.13)$$

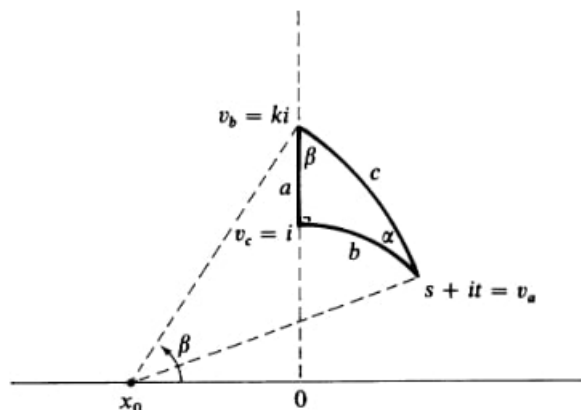
Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_a = z = s + it$, $|z| = 1$, $v_b = ki$, $s > 1$, και $v_c = i$. Τότε, εφαρμόζοντας και πάλι τον τύπο (??) παίρνουμε διαδοχικά

$$\cosh c = (1 + k^2)/(2kt),$$

$$\cosh b = 1/t,$$

$$\cosh a = (1 + k^2)(2k).$$

$\square$



Πρόταση ?? : Υπερβολικό Πυθαγόρειο Θεώρημα.

9.4.5 Νόμοι Ημιτόνων και Συνημιτόνων

Για ένα γενικό υπερβολικό τρίγωνο $T(\alpha, \beta, \gamma)$ με πλευρές a, b, c ισχύουν οι παρακάτω νόμοι:

Νόμος των Ημιτόνων:

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}.$$

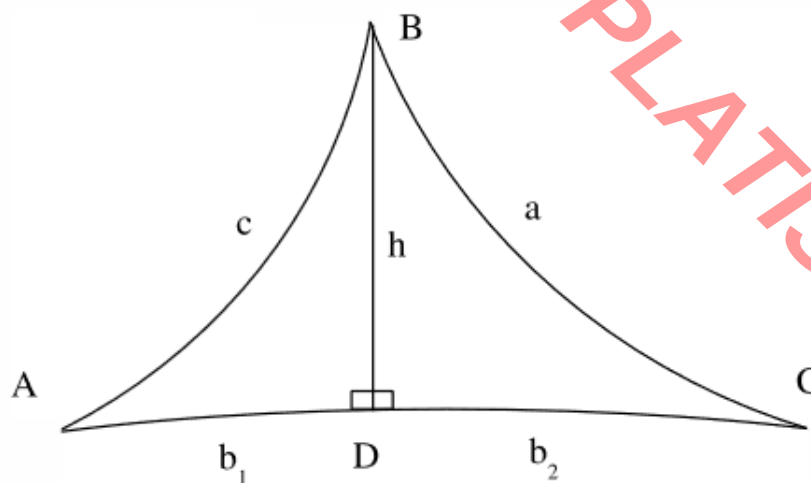
Πρώτος Νόμος των Συνημιτόνων:

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos \gamma.$$

Δεύτερος Νόμος των Συνημιτόνων:

$$\cosh c = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Σημειώνουμε ότι οι Νόμοι των Συνημιτόνων έχουν ανάλογες συμμετρικές εκφράσεις ως προς γωνίες και πλευρές. Επίσης, ο Νόμος των Ημιτόνων και ο Δεύτερος Νόμος των Συνημιτόνων προκύπτουν από τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων (δείτε τις Ασκήσεις ???.? και ???.?). Τέλος, όπως και στη Σφαιρική Γεωμετρία έτσι και εδώ έχουμε από τον Δεύτερο Νόμο των Συνημιτόνων ότι τα όμοια τρίγωνα είναι και ίσα. Δηλαδή, για κάθε δύο τρίγωνα που έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, υπάρχει ισομετρία που απεικονίζει το ένα στο άλλο.



Απόδειξη του Πρώτου Νόμου των Συνημιτόνων.

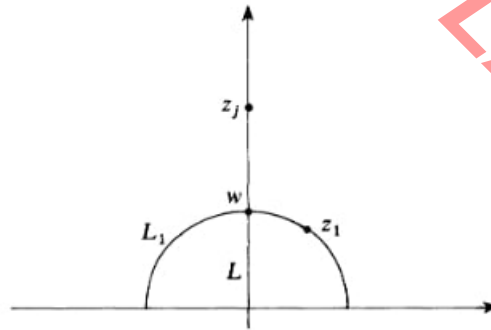
Απόδειξη του Πρώτου Νόμου των Συνημιτόνων. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια του Υπερβολικού Πυθαγορείου Θεωρήματος (Πρόταση ?? και τα πορίσματα αυτού που βρίσκονται στις Ασκήσεις ???.? και ???.?). Με αναφορά λοιπόν σε αυτά, αλλά και στο παραπάνω

σχήμα, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \cosh c &= \cosh b_1 \cosh h \\
 &= \cosh(b - b_2) \cosh h \\
 &= (\cosh b \cosh b_2 - \sinh b \sinh b_2) \cosh h \\
 &= \cosh b (\cosh b_2 \cosh h) - \sinh b \sinh b_2 \cosh h \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh b_2 \cdot \frac{\cosh a}{\cosh b_2} \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh a \cdot \frac{\cosh a}{\sinh a} \cdot \frac{\sinh b_2}{\cosh b_2} \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh a \cdot \frac{\tanh b_2}{\tanh a} \\
 &= \cosh b \cosh a - \sinh b \sinh a \cos \gamma.
 \end{aligned}$$

□

Ας σημειώσουμε ότι στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε δύο υποθέσεις: α) πως άγεται κάθετος από κορυφή τριγώνου στην απέναντι πλευρά και β) τουλάχιστον μία τέτοια κάθετος ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου. Όσον αφορά στο α), από σημείο εκτός υπερβολικής ευθείας μπορούμε πάντοτε να φέρουμε κάθετο προς την ευθεία. Για να το δούμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε την ευθεία $L = (0, \infty)$ και σημείο z_0 με $\Re(z_0) \neq 0$. Τότε η ευθεία $|z| = |z_0|$ είναι κάθετη στην L . Για το β), μπορούμε να δείξουμε ότι η κάθετος προς τη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται πάντοτε στο εσωτερικό του τριγώνου. Πράγματι, κανονικοποιούμε πάλι ώστε η μεγαλύτερη πλευρά, έστω η c να βρίσκεται επάνω στην $L = (0, \infty)$: $v_a = i$ και $v_b = e^c i$. Η κάθετος από την $v_c = z_1$ τέμνει την L στο $w = i|z_1|$.



Τώρα,

$$\begin{aligned}
 d_h(z_1, i) &\geq d_h(i|z_1|, i) = d_h(w, i), \\
 d_h(z_1, e^c i) &\geq d_h(i|z_1|, e^c i) = d_h(w, e^c i).
 \end{aligned}$$

Επειδή η c είναι η μεγαλύτερη πλευρά,

$$c = d_h(i, e^c i) \geq \max\{d_h(z_1, i), d_h(z_1, e^c i)\} \geq \max\{d_h(w, i), d_h(w, e^c i)\}.$$

Τα σημεία $i, w, e^c i$ είναι συνευθειακά και κάποιο πρέπει να κείται μεταξύ των άλλων δύο. Αυτό που ζητούμε, προκύπτει τώρα από την Πρόταση ??.

9.4.6 Εμβαδόν υπερβολικού τριγώνου

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε το εξής σημαντικό:

Θεώρημα 9.4.4. Το άθροισμα των γωνιών υπερβολικού τριγώνου είναι αριθμός μεγαλύτερος του π .

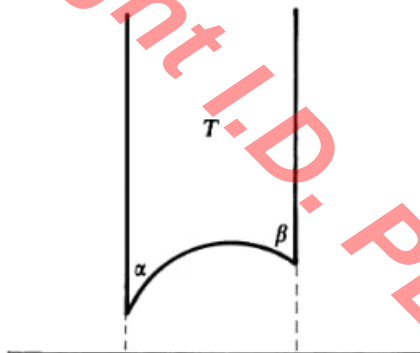
Το Θεώρημα 8.4.2 προκύπτει ως άμεσο πόρισμα της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 9.4.5. Το υπερβολικό εμβαδόν τριγώνου $T(\alpha, \beta, \gamma)$ είναι ίσο με

$$\text{Area}_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\gamma = 0$ και κανονικοποιούμε ώστε οι κορυφές v_a και v_b να κείνται στο μοναδιαίο ημικύκλιο: $v_b = e^{i\theta}$, $v_a = e^{i\phi}$, $0 < \phi < \theta < \pi$. Τότε το εσωτερικό του τριγώνου περιγράφεται ως εξής:

$$T(\alpha, \beta, 0) = \{x + iy \in \mathcal{H}^2 \mid \cos(\pi - \alpha) < x < \cos \beta, \sqrt{1 - x^2} < y < +\infty\}.$$



Συνεπώς, εφαρμόζεται το Θεώρημα του Fubini και υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \text{Area}_h(T(\alpha, \beta, 0)) &= \iint_{T(\alpha, \beta, 0)} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \left(\int_{\sqrt{1 - x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} \right) dx \\ &= \int_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=\sqrt{1 - x^2}}^{+\infty} dx \\ &= \int_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -[\arccos(x)]_{\cos(\pi - \alpha)}^{\cos \beta} \\ &= \pi - (\alpha + \beta). \end{aligned}$$

Εάν τώρα $T(\alpha, \beta, \gamma)$ είναι τρίγωνο με μηδενικές γωνίες, τότε προεκτείνουμε την πλευρά από τις v_a και v_c μέχρι να τμήσει το άπειρο σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε, επειδή

$$\text{Area}_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \text{Area}_h(T(0, \beta', \gamma)) - \text{Area}_h(T(\pi - \alpha, \beta'', 0)),$$

όπου $\beta' - \beta'' = \beta$, έχουμε

$$\text{Area}_h(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - (\beta' + \gamma) - \pi + (\pi - \alpha + \beta'') = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

□

9.4.7 Ασκήσεις

- Αποδείξτε τα παρακάτω αποτελέσματα που αφορούν στην υπερβολική κυρτότητα:
 - Εάν το $\Omega \subset \mathcal{H}^2$ είναι υπερβολικά κυρτό χωρίο, τότε είναι και το $g(\Omega)$ για κάθε υπερβολική ισομετρία g .
 - Εάν το $\Omega \subset \mathcal{H}^2$ είναι υπερβολικά κυρτό χωρίο, τότε το εσωτερικό του $\text{Int}(\Omega)$ και η κλειστότητά του $\bar{\Omega}$ είναι υπερβολικά κυρτά.
 - Εάν $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ είναι μία αύξουσα ακολουθία υπερβολικά κυρτών συνόλων, τότε η ένωσή τους είναι υπερβολικά κυρτό σύνολο.
 - Η τομή οιοδήποτε πλήθους υπερβολικά κυρτών συνόλων είναι υπερβολικά κυρτό σύνολο.
- Αποδείξτε ότι ο τύπος (8.3) της Γωνίας Παραλληλισμού είναι ισοδύναμος με κάθε έναν από τους παρακάτω:
 - $\sinh b \tan \alpha = 1$.
 - $\tanh b \sec \alpha = 1$.
- Αποδείξτε ότι για τρίγωνο $T(\alpha, \beta, 0)$ έχουμε

$$\sinh c = \frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

- Από την απόδειξη της Πρότασης ?? συμπεράνετε ότι $\tanh b = s$. Δείξτε κατόπιν ότι

$$\tanh b = \sinh a \tan \beta.$$

(Υπόδειξη: Αν η γεωδαισιακή που περνά από τα $x + iy$ και i έχει κέντρο x_0 , τότε

$$|x_0 - z|^2 = (x_0 - x)^2 + y^2 = 1 - 2x_0x = s^2 = |x_0 - si|^2.$$

Άρα, αν έχουμε υποθέσει $x > 0$, τότε $x_0 < 0$. Το Ευκλείδειο τρίγωνο με κορυφές $x_0, 0, si$ έχει γωνία β στο x_0 (γιατί;). Τότε, $\tan \beta = 2xs/(s^2 - 1)$.)

- Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι ισχύουν επίσης τα εξής:

$$(\alpha') \sinh b = \sinh c \sin \beta;$$

$$(\beta') \tanh a = \tanh c \cos \beta.$$

Δείξτε επίσης ότι

$$(\alpha') \cosh a \sin \beta = \cos \alpha.$$

$$(\beta') \cosh c = \cot \alpha \cot \beta.$$

6. Αποδείξτε τον Νόμο των Ημιτόνων. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον Πρώτο Νόμο των Συνημιτόνων, γράφουμε

$$\left(\frac{\sinh c}{\sin \gamma} \right)^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\cosh a \cosh b - \cosh c}{\sinh a \sinh b} \right)^2}.$$

Ο Νόμος των Ημιτόνων θα ισχύει αν το δεξιό σκέλος είναι συμμετρικό ως προς a, b, c , δηλαδή, αν η έκφραση

$$\sinh^2 a \sinh^2 b - (\cosh a \cosh b - \cosh c)^2$$

είναι συμμετρική. Αυτό αποδεικνύεται με τη βοήθεια της σχέσης $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.)

7. Αποδείξτε τον Δεύτερο Νόμο των Συνημιτόνων. (Υπόδειξη: Γράφουμε για συντομία

$$A = \cosh a, \quad B = \cosh b, \quad C = \cosh c.$$

Ο Πρώτος Νόμος των Συνημιτόνων δίνει

$$\cos \gamma = \frac{AB - C}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνουμε

$$\sin^2 \gamma = \frac{1 + 2ABC - (A^2 + B^2 + C^2)}{(A^2 - 1)(B^2 - 1)}.$$

Ο αριθμητής D είναι θετικός και συμμετρικός ως προς τα A, B, C . Βεβαιώστε τώρα ότι

$$\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \frac{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)}{(A^2 - 1)^{1/2}(B^2 - 1)^{1/2}(C^2 - 1)} = C,$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.)

8. Αποδείξτε ότι η γωνία ισοπλεύρου υπερβολικού τριγώνου είναι μικρότερη του $\pi/3$. Επίσης, δείξτε ότι

$$2 \cosh(a/2) \sin(\alpha/2) = 1.$$

9.5 Διάφορα μοντέλα Υπερβολικής Γεωμετρίας

Στην ενότητα αυτή πραγματευόμαστε τα μοντέλα του δίσκου του Poincaré και των Beltrami-Klein.



E. Beltrami (1835–1900).

Τα μοντέλα αυτά έχουν άμεση σύνδεση με το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου, όπως θα δούμε στις Ενότητες 8.5.1 και ???. Υπάρχει όμως μία θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στα μοντέλα του Poincaré και στο μοντέλο των Beltrami-Klein: τα πρώτα είναι σύμμορφα μοντέλα, οι γωνίες δηλαδή διατηρούνται και έτσι οι υπερβολικοί δίσκοι είναι Ευκλείδειοι δίσκοι. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στο μοντέλο Beltrami-Klein: υπάρχει παραμόρφωση των γωνιών και οι υπερβολικοί δίσκοι είναι Ευκλείδειοι μόνον όταν έχουν κέντρο την αρχή. Από την άλλη, το μοντέλο αυτό έχει Ευκλείδεια ευθύγραμμα τμήματα ως υπερβολικές γεωδαισιακές, κάτι που αποτελεί με κάποιο τρόπο πλεονέκτημα έναντι των άλλων δύο μοντέλων.



F. Klein (1849–1925).

Για να εισάγουμε το μοντέλο Beltrami-Klein ακολουθούμε μία μέθοδο που αναδεικνύει τη σχέση της Προβολικής με την Υπερβολική Γεωμετρία. Σημειώνουμε ότι η μέθοδος αυτή μπορεί να ακολουθηθεί για να δώσει όλα τα μοντέλα της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Θεωρήσαμε όμως την κλασική πραγμάτευση του μοντέλου του άνω ημιεπιπέδου (και εν συνεχεία, του δίσκου) παιδαγωγικά ορθότερη. Οι ενδιαφερόμενοι αναγνώστες και αναγνώστριες μπορούν να δουν την Άσκηση ??? για μία παρόμοια πραγμάτευση των μοντέλων του Poincaré.

9.5.1 Μοντέλο του δίσκου Poincaré

Η μετάβαση από το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου $\mathcal{H}^2$ στο μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ του $\mathbb{C}$ γίνεται με τον μετασχηματισμό Cayley $\mathcal{C} : \mathcal{H}^2 \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ που δεν είναι παρά ο μετασχηματι-

σμός της ομάδας $M(2)$ που δίνεται από την

$$C(z) = \frac{z - i}{z + i}, \quad (9.14)$$

περιορισμένος στο $\mathcal{H}^2$. Παρατηρούμε ότι

$$C(0) = -1, \quad C(\infty) = 1, \quad C(1) = -i$$

και συνεπώς $C(\partial\mathcal{H}^2) = S^1 = \partial(B_{\mathbb{C}}^1)$. Από την άλλη, για $z \in \mathcal{H}^2$ είναι

$$w = \frac{z - i}{z + i} \iff z = -i \cdot \frac{(w + 1)}{w - 1},$$

και τότε, από τη σχέση $\Im(z) > 0$ προκύπτει $|w| < 1$. Μέσω του μετασχηματισμού Cayley, όλα τα στοιχεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας του $\mathcal{H}^2$ μεταφέρονται στον δίσκο $B_{\mathbb{C}}^1$. Παρακάτω, δίνουμε ορισμένα παραδείγματα αυτού.

Πρόταση 9.5.1. *Το υπερβολικό μήκος $\ell_h(\gamma)$ συνεχώς παραγωγίσιμης καμπύλης $\gamma : [a, b] \rightarrow B_{\mathbb{C}}^1$ του $B_{\mathbb{C}}^1$, $\gamma(t) = z(t)$, δίνεται από τη σχέση*

$$\ell_h(\gamma) = 2 \int_a^b \frac{|\dot{z}(t)| dt}{1 - |z(t)|^2}. \quad (9.15)$$

Απόδειξη. Έστω η καμπύλη $c = C^{-1} \circ \gamma$ του $\mathcal{H}^2$. Το υπερβολικό μήκος $\ell_h(\gamma)$ της γ είναι τότε ίσο με το $\ell_h(c)$. Θέτοντας $f = C^{-1}$ έχουμε:

$$c(t) = -i \cdot \frac{z(t) + 1}{z(t) - 1}, \quad \Im(c(t)) = \frac{1 - |z(t)|^2}{|z(t) - 1|^2},$$

και

$$\dot{c}(t) = \frac{2i \dot{z}(t)}{(z(t) - 1)^2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η υπερβολική νόρμα της $\dot{\gamma}$ είναι:

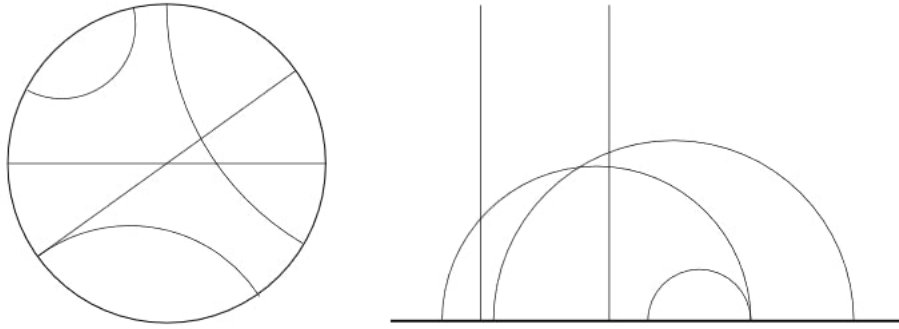
$$|\dot{\gamma}(t)|_h = \frac{2|\dot{z}(t)|}{1 - |z(t)|^2},$$

και συνεπάγεται από εδώ ο τύπος (8.5). □

Η υπερβολική απόσταση ρ_h στο μοντέλο του δίσκου ορίζεται από την

$$\rho_h(z, w) = d_h(C^{-1}(z), C^{-1}(w)). \quad (9.16)$$

Πρόταση 9.5.2. *Οι υπερβολικές ευθείες (άρα, και γεωδαισιακές) στο μοντέλο του δίσκου $(B_{\mathbb{C}}^1, \rho_h)$ είναι είτε ανοικτές διάμετροι του $B_{\mathbb{C}}^1$, είτε τμήματα κύκλων εντός του $B_{\mathbb{C}}^1$, ορθογώνια με το σύνολο S^1 του $B_{\mathbb{C}}^1$.*



Γεωδαισιακές στα μοντέλα Poincaré

Απόδειξη. Εξ ορισμού, οι γεωδαισιακές του $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1, \rho_h)$ είναι οι $\mathcal{C}$ -εικόνες των γεωδαισιακών του $(\mathcal{H}^2, d_h)$. Έστω κατ' αρχάς υπερβολική ευθεία L του $\mathcal{H}^2$ της μορφής (a, ∞) , $a \in \mathbb{R}$. Η εικόνα της $\mathcal{C}(L)$ είναι τμήμα γενικευμένου κύκλου με άκρα 1 και $\frac{a-i}{a+i}$ επάνω στον S^1 . Αν $a = 0$, τότε η $\mathcal{C}(L)$ είναι η ανοικτή διάμετρος $(-1, 1)$ που είναι ορθογώνια στον S^1 . Αν $a \neq 0$, τότε βρίσκουμε την εξίσωση του $\mathcal{C}(L)$:

$$w = u + iv = \mathcal{C}(a + iy) \iff a + iy = \mathcal{C}^{-1}(w) = -i \cdot \frac{w + 1}{w - 1}.$$

Η σχέση $a = \Re(\mathcal{C}^{-1}(w))$ δίνει

$$a = \Re\left(\frac{w + 1}{w - 1}\right) = -\frac{2v}{|w - 1|^2}.$$

Εάν χωρίς βλάβη υποθέσουμε το $a > 0$, τότε $v < 0$ και μετά από τις πράξεις προκύπτει το τμήμα κύκλου

$$\mathcal{C}(L) : (u - 1)^2 + \left(v + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}, \quad |w| < 1, \quad v < 0.$$

Το κάθετο διάνυσμα του κύκλου αυτού είναι το

$$(u - 1, v + 1/a).$$

Η τομή του $\mathcal{C}(L)$ με τον S^1 αποτελείται από τα σημεία 1 και $e^{i\theta}$, για $\theta \in (\pi, 2\pi)$, που ικανοποιεί τη σχέση

$$(\cos \theta - 1)^2 + \left(\sin \theta + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2} \iff \cos(\theta/2) + a \sin(\theta/2) = 0.$$

Θέτοντας $a = \tan(\pi b/2)$, $b \in (0, 1/2)$, παίρνουμε

$$\cos\left(\frac{\theta - \pi b}{2}\right) = 0 \iff \theta = (b + 1)\pi.$$

Στα σημεία τομής 1 και $e^{i\theta} = e^{i(b+1)\pi}$ του $\mathcal{C}(L)$ με τον S^1 , τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα του $\mathcal{C}(L)$ είναι τα

$$(0, 1/a), \quad (\cos \theta - 1, \sin \theta + 1/a),$$

ενώ τα αντίστοιχα κάθετα διανύσματα του S^1 είναι τα

$$(1, 0), \quad (\cos \theta, \sin \theta).$$

Το ζητούμενο έπεται αμέσως. Η περίπτωση όπου $a < 0$ είναι παρόμοια, ενώ η περίπτωση όπου L είναι ημικύκλιο κέντρου a και ακτίνας r αφήνεται στην Άσκηση ???. $\square$

Πρόταση 9.5.3. Ισχύουν οι παρακάτω ισοδύναμοι τύποι για την υπερβολική απόσταση $\rho_h = \rho_h(z, w)$ δύο σημείων $z, w \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$:

$$\begin{aligned} \cosh^2(\rho_h/2) &= \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}, \\ \tanh(\rho_h/2) &= \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|, \\ \rho_h &= \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Η απόδειξη της (??) βασίζεται στον ορισμό της ρ_h από την Εξίσωση ??· οι υπόλοιπες σχέσεις προκύπτουν από αλγεβρικές πράξεις. Δείτε την Άσκηση ???.

Πρόταση 9.5.4. Η ομάδα των υπερβολικών ισομετριών του (B^2, ρ_h) αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$z \rightarrow \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}, \quad z \rightarrow \frac{a\bar{z} + \bar{c}}{c\bar{z} + \bar{a}}, \quad |a|^2 - |c|^2 = 1.$$

Τα στοιχεία της μορφής στο αριστερό σκέλος αποτελούν την ομάδα $M(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1)$ των σύμμορφων ισομετριών που συμβολίζεται και με $SU(1, 1)$. Η γενική ομάδα των ισομετριών $GM(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1)$ αποτελείται είτε από τα στοιχεία της $SU(1, 1)$, είτε από στοιχεία της $SU(1, 1)$ ακολουθούμενα από την $z \mapsto \bar{z}$. Η απόδειξη της Πρότασης ?? αφήνεται στην Άσκηση ???.

Κλείνουμε την ενότητα αυτή με τον τύπο που δίνει το υπερβολικό εμβαδόν χωρίου $\Omega \subset \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$:

$$\text{Area}_h(\Omega) = 4 \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Υπογραμμίζουμε ότι οι τύποι που δίνουν το υπερβολικό μήκος της περιφέρειας και το υπερβολικό εμβαδόν υπερβολικού δίσκου $D(z_0, r)$, $z_0 \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, $r > 0$, είναι οι ίδιοι με τους αντίστοιχους στο υπερβολικό επίπεδο. Και αυτό, διότι ο μετασχηματισμός Cayley (8.4) είναι ισομετρία των μοντέλων $(\mathcal{H}^2, d_h)$ και $(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1, \rho_h)$, και συνεπώς και ισεμβαδική απεικόνιση.

9.5.2 Μοντέλο Beltrami-Klein

Το μοντέλο Beltrami-Klein έρχεται από την Προβολική Γεωμετρία του επιπέδου. Έστω $\mathbb{R}^{2,1}$ ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται ως εξής: αν $\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2)$ και $\mathbf{Y} = (Y_0, Y_1, Y_2)$, τότε

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = -X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2. \quad (9.18)$$

Το γινόμενο αυτό έχει πίνακα

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.19)$$

ο οποίος έχει μία διπλή θετική ιδιοτιμή και μία αρνητική ιδιοτιμή. Επομένως, ορίζει αυτό που ονομάζεται $(2, 1)$ -γινόμενο: το γινόμενο ενός διανύσματος $\mathbf{X}$ με τον εαυτό του μπορεί να είναι θετικό, αλλά και αρνητικό ή μηδέν. Θεωρούμε λοιπόν τα σύνολα των *θετικών*, *μηδενικών* και *αρνητικών* διανυσμάτων, αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} V_+ &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0\}, \\ V_0 &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2,1} \setminus \{\mathbf{0}\} \mid \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0\}, \\ V_- &= \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

Σχόλιο 9.5.5. Ο χώρος $\mathbb{R}^{2,1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ μπορεί να ειπωθεί και ως ο χώρος των ομογενών συντεταγμένων του Προβολικού Επιπέδου $\mathbb{R}P^2$, δηλαδή η ένωση των συνόλων H_0, H_1, H_2 όπως στην (6.3). Με άλλα λόγια, ο $\mathbb{R}^{2,1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ είναι το Προβολικό Επίπεδο εφοδιασμένο με το παραπάνω $(2, 1)$ -γινόμενο.

Θεωρούμε την τομή του $\mathbb{R}^{2,1}$ που ορίζεται από την $X_0 = 1$ και την προβολή $\mathbb{P} : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^2$ που δίνεται για σημεία του $\mathbb{R}^{2,1}$ με $X_0 \neq 0$ από την

$$\mathbf{X} = (X_0, X_1, X_2) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{X_1}{X_0} & \frac{X_2}{X_0} \end{pmatrix} = \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

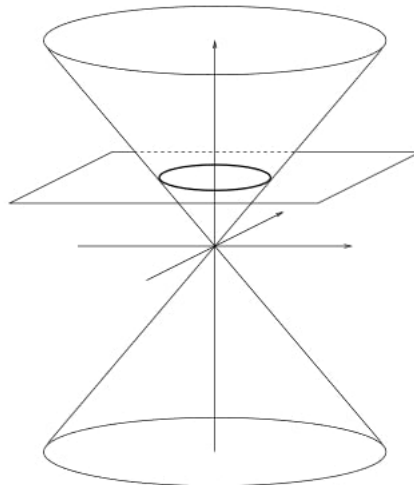
Ορίζουμε τον Beltrami-Klein δίσκο $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ να είναι η εικόνα $\mathbb{P}(V_-)$, δηλαδή,

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$$

Το σύνορο του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ είναι τότε η εικόνα $\mathbb{P}(V_0)$, δηλαδή,

$$S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Σημειώνουμε εδώ πως αν $(x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ τότε η τυπική του ανύψωση στο $\mathbb{R}^{2,1}$ είναι το διάνυσμα $(1, x_1, x_2)$.



Ο κώνος φωτός: το μοντέλο Beltrami-Klein είναι η τομή του επιπέδου $X_0 = 1$ με τον κώνο.

Προφανώς, τοπολογικά τα $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ είναι τα ίδια σύνολα. Έχει σημασία όμως που τονίζουμε την *πραγματική* υφή του μοναδιαίου δίσκου όταν μιλάμε για το μοντέλο Beltrami-Klein: το μοντέλο του μοναδιαίου δίσκου του Poincaré μπορεί να προκύψει με μία παρόμοια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε εδώ, αλλά στη θέση του $\mathbb{R}^{2,1}$ και του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ έχουμε τότε τον χώρο $\mathbb{C}^{1,1}$ και την μιγαδική προβολική ευθεία $\mathbb{C}P^1$ (δείτε την Άσκηση ??). Τα σύνολα αυτά διαφέρουν μεταξύ άλλων και στο ότι η μιγαδική προβολική ευθεία έχει μία εγγενή μιγαδική δομή, όντας σε 1–1 και επί αντιστοιχία με τη σφαίρα του Riemann, κάτι που δεν ισχύει για το πραγματικό προβολικό επίπεδο· αυτό θεωρείται χωρίς καμμία μιγαδική δομή. Αυτός είναι και ο λόγος που γράφουμε $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ αντί απλώς $\mathcal{B}^2$, ούτως ώστε να διακρίνουμε το μιγαδικό μοντέλο του δίσκου Poincaré από το πραγματικό μοντέλο Beltrami-Klein.

Πρόταση 9.5.6. Η ομάδα ισομετριών του $(2, 1)$ -γινόμενου (??) είναι η ομάδα πινάκων

$$\mathbf{O}(2, 1) = \{A \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R}) \mid AJA^T = J\}, \quad (9.20)$$

όπου J είναι ο πίνακας του γινόμενου (??). Αν $A \in \mathbf{O}(2, 1)$, τότε

$$A^{-1} = JA^T J,$$

και συνεπώς $\det^2(A) = 1$.

Απόδειξη. Αν $A \in \mathbf{GL}(3, \mathbb{R})$ είναι ισομετρία, τότε για κάθε $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{2,1}$ είναι

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}J\mathbf{Y}^T = \langle \mathbf{X}A, \mathbf{Y}A \rangle = \mathbf{X}AJA^T\mathbf{Y}^T.$$

Επειδή τώρα $J^2 = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος 3×3 πίνακας, έχουμε

$$AJA^T = J \iff A(JA^T J) = I \implies A^{-1} = JA^T J.$$

Τέλος, $\det(A^{-1}) = \det(J) \det(A) \det(J) = \det(A)$, επομένως $\det^2(A) = 1$. □

Η ομάδα $\mathbf{O}(2, 1)$ καλείται *ορθογώνια $(2, 1)$ -ομάδα* και είναι εύκολο να δούμε χρησιμοποιώντας τη σχέση $AJA^T = J$ ότι οι γραμμές του κάθε στοιχείου της είναι διανύσματα ανάσוף ορθογώνια ως προς το γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Πράγματι, αν

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix},$$

τότε η $AJA^T = J$ δίνει

$$\begin{aligned} -a^2 + b^2 + c^2 &= -1, & -ad + be + cf &= 0, & -ag + bh + cj &= 0, \\ -d^2 + e^2 + f^2 &= 1, & -dg + eh + fj &= 0, \\ -g^2 + h^2 + j^2 &= 1. \end{aligned}$$

Επίσης, η σχέση $A^{-1} = JA^T J$ σημαίνει

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & -d & -g \\ -b & e & h \\ -c & f & j \end{pmatrix}.$$

Από την $A^{-1}A = I$ παίρνουμε τις επιπλέον σχέσεις

$$\begin{aligned} a^2 - d^2 - g^2 &= 1, & ab - de - gh &= 0, & ac - df - gj &= 0, \\ -b^2 + e^2 + h^2 &= 1, & -bc + ef + hj &= 0, \\ -c^2 + f^2 + j^2 &= 1. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε στο ότι και οι στήλες του A είναι ανά δύο ορθογώνιες μεταξύ τους και ότι επίσης:

- η πρώτη γραμμή και η πρώτη στήλη του A είναι αρνητικά μοναδιαία διανύσματα;
- η δεύτερη και η τρίτη γραμμή (αντ. η δεύτερη και η τρίτη στήλη) του A είναι θετικά μοναδιαία διανύσματα.

Η ομάδα $O(2, 1)$ αποτελείται από στοιχεία A με $\det(A) = 1$ ή $\det(A) = -1$. Στην πρώτη περίπτωση, έχουμε το σύνολο $SO(2, 1)$ που είναι υποομάδα της $O(2, 1)$. Στην ομάδα $O(2, 1)$ ορίζουμε μία σχέση $\sim$ ως εξής:

$$A \sim B \text{ αν } A = \lambda B \text{ για κάποιο } \lambda \neq 0.$$

Παρατηρήστε ότι επειδή $\det(A) = \pm 1$ για κάθε $A \in O(2, 1)$, το παραπάνω λ μπορεί να πάρει τις τιμές ± 1 . Είναι απλό να δείξουμε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Η *προβολική ορθογώνια $(2, 1)$ -ομάδα* είναι η

$$PO(2, 1) = O(2, 1) / \sim.$$

Επειδή η δράση της $O(2, 1)$ διατηρεί τους χώρους V_+ , V_0 και V_- , έπεται ότι η δράση της $PO(2, 1)$ στο $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ το αφήνει ομοίως αναλλοίωτο. Η Υπερβολική Γεωμετρία (κατά Klein) είναι το ζεύγος $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2, PO(2, 1))$. Η ομάδα $PSO(2, 1)$ αποτελείται από τα στοιχεία που διατηρούν τον προσανατολισμό-δηλαδή, την ομάδα $PSO^+(2, 1)$ που είναι ισόμορφη με την $SO(2, 1)$, και από στοιχεία που δεν διατηρούν τον προσανατολισμό: αυτά, είναι συνθέσεις στοιχείων της $PSO^+(2, 1)$ με την συζυγή απεικόνιση, δηλαδή, την προβολοποίηση της

$$(x_0, x_1, x_2) \mapsto (-x_0, x_1, x_2).$$

Αναφέρουμε τέλος ότι

$$PO(2, 1) = SO(2, 1) / \{I, -I\},$$

όπως προκύπτει από την εμφύτευση της $SO(2, 1)$ στην $PO(2, 1)$ και το Πρώτο Θεώρημα Ισομορφίας Ομάδων.

Η υπερβολική απόσταση σ_h στο μοντέλο Beltrami-Klein ορίζεται τώρα ως εξής: για οποιαδήποτε $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ σημεία του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ ορίζουμε την $\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ από τη σχέση

$$\cosh^2(\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle}, \quad (9.21)$$

όπου $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ είναι ανυψώσεις των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, αντίστοιχα. Ο ορισμός της σ_h από την (8.6) είναι αναλλοίωτος από τη δράση της $\text{PO}(2, 1)$ και δεν εξαρτάται από τις ανυψώσεις των $\mathbf{x}, \mathbf{y}$: πράγματι, αν $\mathbf{X}', \mathbf{Y}'$ είναι άλλες ανυψώσεις τους, αντίστοιχα, τότε υπάρχουν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_*$ με $\mathbf{X}' = \lambda \mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}' = \mu \mathbf{Y}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{X}', \mathbf{Y}' \rangle^2}{\langle \mathbf{X}', \mathbf{X}' \rangle \langle \mathbf{Y}', \mathbf{Y}' \rangle} &= \frac{\langle \lambda \mathbf{X}, \mu \mathbf{Y} \rangle^2}{\langle \lambda \mathbf{X}, \lambda \mathbf{X} \rangle \langle \mu \mathbf{Y}, \mu \mathbf{Y} \rangle} \\ &= \frac{\lambda^2 \mu^2 \langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\lambda^2 \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \cdot \mu^2 \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2}{\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle}. \end{aligned}$$

Για $\mathbf{X} = (1, x_1, x_2)$ και $\mathbf{Y} = (1, y_1, y_2)$ παίρνουμε τον τύπο

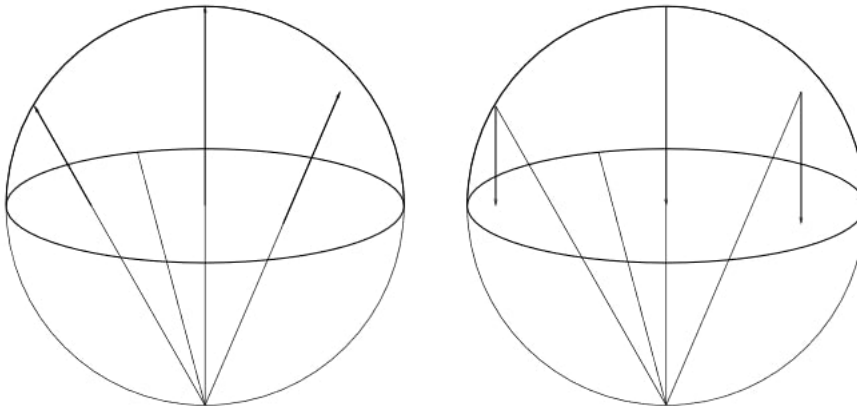
$$\cosh^2(\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 1)^2}{(\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1)} = \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2}{(x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)}. \quad (9.22)$$

Μπορεί να δειχθεί απευθείας ότι η σ_h είναι καλώς ορισμένη μετρική. Κατ' αρχάς, για το καλώς ορισμένο, πρέπει πρώτα να δειχθεί ότι αν $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V_-$, τότε

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2 \geq \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle, \quad (9.23)$$

με την ισότητα να ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ αντιπροσωπεύουν το ίδιο σημείο στο προβολικό επίπεδο (και άρα, είναι ανυψώσεις του ίδιου σημείου του $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$). Η ανισότητα ?? λέγεται και *Αντίστροφη Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski* για προφανείς λόγους. Για την απόδειξή της, δείτε την Άσκηση ???. Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η $\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ είναι θετική και μηδενίζεται μόνον όταν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Αμέσως φαίνεται επίσης και η συμμετρικότητα: $\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma_h(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε την Τριγωνική Ανισότητα· δείτε την Άσκηση ???. Προτιμούμε όμως εδώ να αναδείξουμε τη σχέση του μοντέλου Beltrami-Klein με το μοντέλο του δίσκου και κατά συνέπεια και με το μοντέλο του άνω ημιεπιπέδου. Προς τούτο, θεωρούμε την απεικόνιση $\mathcal{C} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \mapsto \frac{x_1 + ix_2}{1 + \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2}}. \quad (9.24)$$



Η απεικόνιση $\mathfrak{C}$.

Είναι απλό να δειχθεί η παρακάτω πρόταση, δείτε και την Άσκηση ??.??.

Πρόταση 9.5.7. Η απεικόνιση $\mathfrak{C}$ που δίνεται από την (??) είναι 1-1 και επί και η αντίστροφη της $\mathfrak{C}^{-1}$ δίνεται από την

$$z = x + iy \mapsto \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2} \right). \quad (9.25)$$

Η $\mathfrak{C}^{-1}$ είναι σύνθεση της στερεογραφικής προβολής από τον δίσκο στην S^2 :

$$z = x + iy \mapsto \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right)$$

και της κάθετης προβολής από την S^2 στον δίσκο:

$$\left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2}, \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2} \right) \mapsto \left(\frac{2x}{1 + |z|^2}, \frac{2y}{1 + |z|^2} \right).$$

Τέλος, η $\mathfrak{C}$ αφήνει αναλλοίωτο το σύνολο S^1 κατά σημείο.

Αποδεικνύουμε τώρα την εξής βασική πρόταση:

Πρόταση 9.5.8. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$. Τότε

$$\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho_h(\mathfrak{C}(\mathbf{x}), \mathfrak{C}(\mathbf{y})),$$

όπου ρ_h είναι η υπερβολική μετρική στον δίσκο $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$.

Απόδειξη. Δείχνουμε ισοδύναμα ότι για κάθε $z, w \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$,

$$\rho_h(z, w) = \sigma_h(\mathfrak{C}^{-1}(z), \mathfrak{C}^{-1}(w)).$$

Αν $z = x + iy$ και $w = u + iv$, θέτουμε

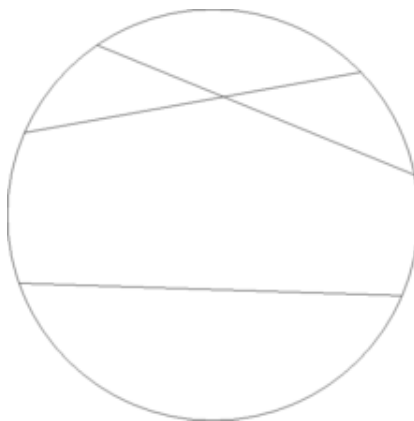
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2x}{1 + |z|^2}, & x_2 &= \frac{2y}{1 + |z|^2}, \\ y_1 &= \frac{2u}{1 + |w|^2}, & y_2 &= \frac{2v}{1 + |w|^2}. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} \cosh^2(\sigma_h(\mathfrak{C}^{-1}(z), \mathfrak{C}^{-1}(w))) &= \frac{(x_1 y_1 + x_2 y_2 - 1)^2}{(x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1)} \\ &= \frac{(4\Re(z\bar{w}) - (1 + |z|^2)(1 + |w|^2))^2}{(1 - |z|^2)^2(1 - |w|^2)^2} \\ &= \left(\frac{2|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)} - 1 \right)^2 \\ &= (2 \cosh^2(\rho_h(z, w)/2) - 1)^2 \\ &= \cosh^2(\rho_h(z, w)). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 9.5.9. Οι υπερβολικές ευθείες (γεωδαισιακές του $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2, \sigma_h)$) είναι Ευκλείδειες ευθείες.



Γεωδαισιακές στο μοντέλο Beltrami-Klein.

Απόδειξη. Αυτό μπορεί κανείς να το δει είτε αλγεβρικά μέσω της απεικόνισης $\mathcal{C}$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\mathcal{C}$ αφήνει αναλλοίωτο τον μοναδιαίο κύκλο κατά σημείο, είτε με τρόπο παρόμοιο με αυτόν της Άσκησης ???. Όμως, πολύ πιο σύντομα και με γεωμετρικό τρόπο το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται μέσω της εξής απλής παρατήρησης: έστω L γεωδαισιακή του $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και ας θεωρήσουμε πρώτα την περίπτωση που η L είναι Ευκλείδεια διάμετρος. Αυτή τότε ανυψώνεται σε ημιμεσημβρινό της S^2 ο οποίος μέσω της αντίστροφης στερεογραφικής προβολής S^{-1} απεικονίζεται και πάλι στην L . Αν τέλος η L είναι τμήμα κύκλου ορθογώνιο στον S^1 , τότε αυτός ανυψώνεται στο τμήμα του σφαιρικού κύκλου της S^2 που περνά από τα άκρα της L και είναι ορθογώνιος στον S^1 στα σημεία αυτά. Όμως οι εικόνες τέτοιων κύκλων μέσω της S^{-1} είναι και πάλι Ευκλείδειες ευθείες. $\square$

Πρόταση 9.5.10. Κάθε υπερβολικό ημιεπίπεδο είναι υπερβολικά κυρτό.

Απόδειξη. Εργαζόμενοι στο μοντέλο Beltrami-Klein, ένα υπερβολικό ημιεπίπεδο είναι μία από τις συνιστώσες του συμπληρώματος μίας γεωδαισιακής, που στην περίπτωση αυτή είναι μία ανοικτή χορδή του S^1 (δηλαδή, ένας κυκλικός τομέας). Για κάθε δύο σημεία ενός τέτοιου συνόλου (που είναι κυρτό με την Ευκλείδεια έννοια) υπάρχει Ευκλείδειο ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει και που περιέχεται εξ ολοκλήρου στο σύνολο. Το τμήμα όμως αυτό είναι και γεωδαισιακό για την υπερβολική μετρική και η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

9.5.3 Ασκήσεις

1. Ολοκληρώστε την απόδειξη της Πρότασης ??.
2. Αποδείξτε την Πρόταση ??.
3. Αποδείξτε την Πρόταση ??. (Υπόδειξη: Κάθε ισομετρία g του υπερβολικού δίσκου είναι της μορφής $g = \mathcal{C} \circ f \circ \mathcal{C}^{-1}$, όπου f ισομετρία του υπερβολικού επιπέδου και $\mathcal{C}$ είναι ο μετασχηματισμός Cayley (8.4). Από δω και στο εξής η απόδειξη είναι θέμα πράξεων.)

4. Δείξτε ότι το γινόμενο (??) έχει όλες τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου πλην της $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$.
5. Δείξτε την αντίστροφη Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Buniakowski (??). (Υπόδειξη: Επειδή η ανισότητα δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V_-$ είναι ανυψώσεις των $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$, αντίστοιχα. Έτσι,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle^2 &= (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - 1)^2, \\ \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle &= (\|\mathbf{x}\|^2 - 1)(\|\mathbf{y}\|^2 - 1),\end{aligned}$$

όπου $\cdot$ είναι το Ευκλείδειο βαθμωτό γινόμενο και $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Η ανισότητα (??) γράφεται ισοδύναμα ως

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2.$$

Αν κάποιο από τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ είναι το $(0, 0)$, η ανισότητα ισχύει. Έστω ότι κανένα από τα δύο δεν είναι το $(0, 0)$ και έστω $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Τότε, επειδή

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta,$$

γράφουμε ισοδύναμα

$$\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \theta \geq \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \theta.$$

Διαιρώντας με $\|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$ παίρνουμε την ισοδύναμη έκφραση

$$\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq \frac{2 \cos \theta}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} + \sin^2 \theta.$$

Η συνάρτηση

$$f(\theta) = \frac{2 \cos \theta}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} + \sin^2 \theta, \quad \theta \in [0, \pi],$$

είναι γνησίως φθίνουσα, άρα $f(\theta) \leq f(0) = 2/(\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|)$. Από την άλλη,

$$\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{1}{\|\mathbf{y}\|} \right)^2 \geq 0 \implies \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} + \frac{1}{\|\mathbf{y}\|^2} \geq \frac{2}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|},$$

και η ανισότητα αποδείχθηκε. Παρατηρούμε ότι έχουμε ισότητα όταν $\theta = 0$, ισοδύναμα όταν $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ και κατά συνέπεια $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.)

6. Αποδείξτε ότι η $\text{PO}(2, 1)$ δρα μεταβατικά στο $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$. (Υπόδειξη: αρκεί να δείξετε ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2$ υπάρχει $A \in \text{SO}(2, 1)$ με $\mathbf{X}A = [1 : 0 : 0]$, όπου μπορείτε να θεωρήσετε ότι $\mathbf{X} = [1 : x_1 : x_2]$.)
7. Αποδείξτε απευθείας την ισχύ της Τριγωνικής Ανισότητας για την σ_h . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την Άσκηση ??, πάρτε τα σημεία $\mathbf{0} = (0, 0)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ και αποδείξτε ότι

$$\sigma_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \sigma_h(\mathbf{0}, \mathbf{x}) + \sigma_h(\mathbf{0}, \mathbf{y}).$$

8. Αποδείξτε την Πρόταση ??.

9. Εργαζόμενοι όπως στην Άσκηση ??,?? και χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $\mathcal{C}$ που δίνεται από την (??), βρείτε τη μορφή των υπερβολικών ισομετριών του $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^2, \sigma_h)$.

10. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο που ακολουθήσαμε για το μοντέλο Beltrami-Klein για να ορίσετε ανεξάρτητα από τη Γεωμετρία της Αντιστροφής τα μοντέλα Poincaré του άνω ημιεπιπέδου και του δίσκου ως εξής:

(α') Συμβολίζουμε με $\mathbb{C}^{1,1}$ τον μιγαδικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^2$ εφοδιασμένο με ένα από τα παρακάτω $(1, 1)$ -Ερμιτιανά γινόμενα $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ με πίνακες

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα. Αναλυτικά, αν $\mathbf{Z} = (Z_0, Z_1)$ και $\mathbf{W} = (W_0, W_1)$, τότε

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_1 = \mathbf{Z} J_1 \mathbf{W}^* = -Z_0 \overline{W_0} + Z_1 \overline{W_1},$$

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_2 = \mathbf{Z} J_2 \mathbf{W}^* = -i Z_0 \overline{W_1} + i Z_1 \overline{W_0},$$

όπου $\mathbf{W}^* = (\overline{W_0}, \overline{W_1})^T$. Διαπιστώστε ότι όλες οι ιδιότητες του Ερμιτιανού γινομένου ισχύουν, πλην της θετικότητας. Διαπιστώστε ότι και οι δύο πίνακες J_1, J_2 έχουν μία θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή.

(β') Και για τα δύο γινόμενα, ορίστε τα σύνολα των θετικών, μηδενικών και αρνητικών διανυσμάτων, αντίστοιχα. Παίρνοντας την προβολή $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{1,1} \rightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την $\mathbb{P}(Z_0, Z_1) = Z_1/Z_0 = z \in \mathbb{C}$, δείξτε ότι η προβολή του συνόλου των αρνητικών διανυσμάτων ως προς το πρώτο γινόμενο Στην τομή $Z_0 = 1$ είναι ο $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$, ενώ ως προς το δεύτερο είναι το $\mathcal{H}^2$. Δείξτε επίσης ότι τα αντίστοιχα σύνολα είναι οι προβολές των αντίστοιχων συνόλων των μηδενικών διανυσμάτων.

(γ') Βρείτε τις ομάδες ισομετριών των $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ και από αυτές ορίστε τις $\text{PSU}(1, 1)$ και $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ αντίστοιχα, ως τις ομάδες μετασχηματισμών των $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και $\mathcal{H}^2$.

(δ') Ορίστε την υπερβολική απόσταση ρ_i $i = 1, 2$ από τη σχέση

$$\cosh^2(\rho_i(z, w)/2) = \frac{|\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_i|^2}{\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle_i \langle \mathbf{W}, \mathbf{W} \rangle_i}, \quad i = 1, 2$$

και δείξτε ότι είναι καλώς οριμένη, ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής και παραμένει αναλλοίωτη από τη δράση των $\text{PSU}(1, 1)$ και $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, αντίστοιχα.

(ε') Βρείτε τον μετασχηματισμό που μας επιτρέπει να περνάμε από το ένα μοντέλο στο άλλο.

(ς') Εντοπίστε τις γεωδαισιακές και των δύο μοντέλων ως εξής: στο μοντέλο του δίσκου λ.χ., πάρτε $z, w \in S^1 = \partial \mathcal{B}_{\mathbb{C}}^1$ και ανυψώστε τους $\mathbf{Z}$ και $\mathbf{W}$, αντίστοιχα, στο σύνολο των μηδενικών διανυσμάτων. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{W} \rangle_1 = -1$. Το ανοικτό τμήμα με άκρα τα $\mathbf{Z}, \mathbf{W}$ είναι το

$$\gamma(t) = e^{t/2} \mathbf{Z} + e^{-t/2} \mathbf{W}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε τώρα πως κάθε σημείο του τμήματος αυτού είναι αρνητικό διάνυσμα και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τύπο της απόστασης, δείξτε επίσης ότι

$$\rho_1(\gamma(t), \gamma(s)) = |t - s|, \quad \text{για κάθε } t, s \in \mathbb{R}.$$

@copyright I.D. PLATIS

Βιβλιογραφία

- [1] M.A. Armstrong: *Ομάδες και συμμετρία*. Επιμέλεια: Ν. Μαρμαρίδης. Μετάφραση: Δ. Νταής. Leader Books, 2002.
- [2] A.F. Beardon: *The Geometry of Discrete groups*. Springer-Verlag, 1983.
- [3] H.S.M. Coxeter & S.L. Greitzer: *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America, 1967.
- [4] R. Fenn: *Geometry*. Springer-Verlag, 2000.
- [5] R. Hartshorne: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer-Verlag, 2000.
- [6] F. Klein: *Geometry*. Translated from the Third German Edition by: E.R. Hendrick & C.A. Noble. Dover Publ. Inc., 1939.
- [7] B.E. Meserve: *Fundamental concepts of Geometry*. Dover Publ. Inc., 1959.
- [8] Ν. Σακελλαρίου: *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*. Έκδοτική Μπλαζουδάκη, 1927.