ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινο ΕΞΑΜΗΝΟ 2019–20

ΜΕΜ233-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Η *σφαιρική γεωμετρία* δύο διαστάσεων κατά Klein είναι το ζεύγος $(S^2,\ \mathrm{O}(3))$. Όπως θα δούμε, σε αντίθεση με την αφφινική, αυτή ειναι μία μετρική γεωμετρία· οι ισομετρίες της μετρικής είναι ακριβώς τα στοιχεία της $\mathrm{O}(3)$.

1. Γενικα για την S^2

Η σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Η τομή ενός επιπέδου που περνά από την αρχή O και της σφαίρας S^2 είναι κύκλος της σφαίρας με κέντρο O. Πράγματι, έστω επίπεδο

$$P:\ ax+by+cz=0, \quad |a|+|b|+|c| \neq 0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $c \neq 0$. Τότε

$$z = -\frac{ax+by}{c}.$$

Αν $p=(x,y,z) \in P$, τότε το τετράγωνο της απόστασης του από το O είναι

$$d^2(p,O) = x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+\frac{(ax+by)^2}{c^2}.$$

Εάν $p \in P \cap S^2$ τότε έχουμε επιπλέον

$$x^2+y^2+\frac{(ax+by)^2}{c^2} = 1.$$

Άρα τα ο τόπος $P \cap S^2$ είναι κύκλος της σφαίρας με κέντρο το O. Τέτοιοι κύκλοι καλούνται *μέγιστοι κύκλοι.* Ο *ισημερινός* είναι ο μέγιστος κύκλος

$$x^2+y^2=1, \quad z=0.$$

Οι μέγιστοι κύκλοι που προκύπτουν απο τομές της S^2 με επίπεδα από την αρχή κάθετα στο $z=0$ κάλούνται *μεσημβρινοί.* Ένα επίπεδο από την αρχή κάθετο στο $z=0$ είναι της μορφής

$$ax+by=0.$$

Άσκηση. Βρείτε τις αναλυτικές εξισώσεις όλων των μεσημβρινών της σφαίρας ακολουθώντας την εξης διαδικασία: δείξτε πρώτα ότι

$$S^2 \cap \{y=0\} = L_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2=1,\ y=0\}.$$

Θεωρείστε μετά τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^3$ της μορφής

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \phi \in \mathbb{R}.$$

Οι A_ϕ περιστρέφουν κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ γύρω από τον άξονα των z. Οι μεσημβρινοί που ψάχνετε είναι οι $A_\phi(L_0)$.

Έστω τώρα επίπεδο που δεν περνά από την αρχή,

$$P: \ ax + by + cz = d, \quad |a| + |b| + |c| \neq 0, \ d \neq 0$$

και ας υποθέσουμε ότι $P \cap S^2 \neq \emptyset$ ($d \leq 1$) και επίσης ότι $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Χωρίς βλάβη, έστω ότι $c \neq 0$. Το P έχει προκύψει από τη μεταφορά T_0 του

$$P_0: \ ax + by + cz = 0$$

κατά τη διεύθυνση του $\mathbf{b} = (0, 0, d/c)$. Η κάθετη ευθεία του P_0 στην αρχή,

$$l(t) = (at, bt, ct), \quad t \in \mathbb{R},$$

τέμνει το P στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (ad, bd, cd)$. Αν τώρα $\mathbf{x} = (x, y, z) \in P \cap S^2$, τότε

$$\begin{aligned} d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) &= (x - ad)^2 + (y - bd)^2 + (z - cd)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\quad -2d(ax + by + cz) \\ &\quad +(a^2 + b^2 + c^2)d^2 \\ &= 1 - 2d^2 + d^2 = 1 - d^2. \end{aligned}$$

Διακρίνουμε δύο παριπτώσεις:

α) $d = \pm 1$. Τότε $P \cap S^2 = \{\mathbf{x}_0\}$ και το P είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της S^2 στο $\mathbf{x}_0$.

β) $|d| < 1$. Τότε η τομή $P \cap S^2$ είναι κύκλος επάνω στη σφαίρα, κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας $(1 - d^2)^{1/2}$.

Οι κύκλοι της μορφής β) καλούνται *ελάσσονες ή μικροί* κύκλοι της σφαίρας.

Ορισμός 1.1. *Έστω $A : S^2 \to S^2$ που ορίζεται ως εξής:*

$$S^2 \ni \mathbf{x} = (x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z) = -\mathbf{x} = A(\mathbf{x}).$$

Η A καλείται αντιποδική απεικόνιση και κάθε ζεύγος σημείων $\mathbf{x}, -\mathbf{x} \in S^2$ καλείται ζεύγος αντιποδικών σημείων.[1]

Πρόταση 1.2. *Η ευθεία που ενώνει ζεύγος αντιποδικών σημείων, περνά από την αρχή. Αντιστρόφως, κάθε ευθεία που περνά από την αρχή τέμνει την S^2 σε ζεύγος αντιποδικών σημείων.*

[1] Έχουμε δεί στην Προβολική Γεωμετρία ότι το προβολικό επίπεδο προκύπτει από την S^2 με την ταύτιση των αντιποδικών σημείων της.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}, -\mathbf{x}$ αντιποδικά σημεία της σφαίρας. Η ευθεία που τα ενώνει εχει παραμετρική εξίσωση

$$l(t) = t\mathbf{x} + (1-t)(-\mathbf{x}) = (2t-1)\mathbf{x},$$

η οποία περνά από την αρχή ($l(1/2) = O$). Έστω τώρα αντίστροφα ευθεία από το O:

$$l(t) = t\mathbf{b}, \quad \|\mathbf{b}\| = 1.$$

Οι εξισώσεις $\mathbf{x} = t\mathbf{b}$ και $\|\mathbf{x}\| = 1$ δίνουν $|t| = 1$, δηλαδή, $\mathbf{x} = \pm\mathbf{b}$. □

Έστω επίπεδο P από την αρχή με εξίσωση $ax + by + cz = 0$. Υποθέτουμε ότι το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{N} = \mathbf{N}_P = (a, b, c)$ είναι μοναδιαίο. Ο μέγιστος κύκλος L που εντιστοιχεί στο P καλείται *πολική ευθεία* του $\mathbf{N}$. Από την άλλη, έστω L μέγιστος κύκλος καί P το επίπεδο στο οποίο κείται. Το σημείο N τότε καλείται *πόλος* του L. Για παράδειγμα, ο ισημερινός είναι πολική ευθεία του $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Από την άλλη ο νότιος πόλος $(0, 0, -1)$ είναι (και αυτός) πόλος του ισημερινού.

Πρόταση 1.3. *Αντιποδικά σημεία προσδιορίζουν την ίδια πολική ευθεία.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{N} = (a, b, c)$. Η πολική ευθεία του $\mathbf{N}$ προσδιορίζεται από το $P:\ ax+by+cz = 0$. Όμως το P προσδιορίζει και την πολική ευθεία του $-\mathbf{N} = (-a, -b, -c)$. □

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 1.4. *Εάν το $\mathbf{N}$ κείται επί μεγίστου κύκλου, τότε και το αντιποδικό του $-\mathbf{N}$ κείται επί του ιδίου μεγίστου κύκλου.*

Πρόταση 1.5. *Κάθε δύο διαφορετικοί μεταξύ τους μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε ζεύγος αντιποδικών σημείων.*[2]

Απόδειξη. Έστω L, L' διαφορετικοί μεταξύ τους μέγιστοι κύκλοι που κείνται επί των επιπέδων P, P' αντίστοιχα. Τα P και P' τέμνονται πάνω σε ευθεία από το O. Η ευθεία αυτή τέμνει την S^2 σε αντιποδικά σημεία (Πρόταση 1.2). □

Το κύριο αποτέλεσμα της παραγράφου είναι το ακόλουθο:

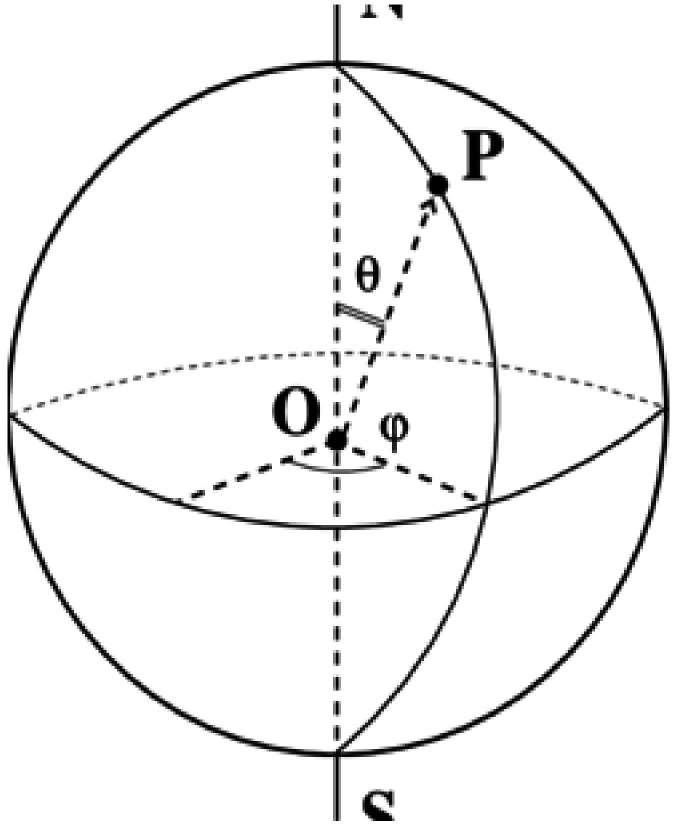
Θεώρημα 1.6. *Κάθε δύο διαφορετικά σημεία της S^2 κείνται επί μεγίστου κύκλου. Εάν τα σημεία είναι αντιποδικά, υπάρχουν απείρου πλήθους μέγιστοι κύκλοι που τα περιέχουν. Εάν όχι, περιέχονται σε μοναδικό μέγιστο κύκλο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι τα σημεία είναι αντιποδικά. Τότε, η ευθεία που τα ενώνει περνά από το O και υπάρχουν απείρου πλήθους επίπεδα από το O που περιέχουν την ευθεία αυτή.

Έστω τώρα ότι τα σημεία $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ δεν είναι αντιποδικά. Τότε υπάρχει μοναδικό επίπεδο που περιέχει τα O, $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$.[3] Η τομή του επιπέδου αυτού με την S^2 είναι μέγιστος κύκλος που περιέχει τα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$. □

[2]Όπως θα δούμε παρακάτω, οι μέγιστοι κύκλοι παίζουν τον ρόλο των ευθειών στη Σφαιρική Γεωμετρία, είναι δηλαδή οι συντομότεροι δρόμοι. Η Πρόταση 1.5 μας λέει ότι δύο σφαιρικές ευθείες όχι μόνο δεν είναι ποτέ παράλληλες, αλλά τέμνονται σε *δύο* σημεία.

[3]Τό κάθετο διάνυσμα του επιπέδου αυτού είναι ομόρροπο με το $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$.



Σχημα 1. Σφαιρικές συντεταγμένες

Ασκήσεις

(1) Γράψτε αναλυτικά 15 σημεία της S^2.
(2) Σχεδιάστε τους μέγιστους κύκλους με πόλους τα $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ και γράψτε τις εξισώσεις τους.
(3) Βρείτε τα σημεία τομής των μέγιστων κύκλων με πόλους:
 α) $(1,0,0)$ και $(0,-1,0)$,
 β) $(1/3, 1/3, \sqrt{7}/3)$ και $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.
(4) Βρείτε τον μέγιστο κύκλο που περιέχει τα ακόλουθα ζεύγη σημείων:
 α) $(0,0,-1)$ και $(0,1,0)$,
 β) $(1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})$ και $(2/3, 1/3, -2/3)$.
(5) Προσδιορίστε τις οικογένειες των μεγίστων κύκλων που περιέχουν τα παρακάτω αντιποδικά σημεία:
 α) $(1,0,0)$ και $(-1,0,0)$,
 β) $(0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ και $(0, -1/2, -\sqrt{3}/2)$.
(6) Εξετάστε αν τα παρακάτω σημεία ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο:
 α) $(0,0,-1)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$,
 β) $(1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$, $(2/3, 1/3. -2/3)$ και $(1,0,0)$.

2. Σφαιρικές συντεταγμένες

Στο Σχήμα 1 φαίνονται οι σφαιρικές συντεταγμένες ϕ και θ που καθορίζουν πλήρως τη θέση ενός σημείου $\mathbf{P}$ επάνω στη σφαίρα.

- Η γωνία ϕ είναι η προσανατολισμένη γωνία του μέγιστων κύκλου απο τα $(0,0,1)$ και $(1,0,0)$[4] και του μέγιστου κύκλου από το $\mathbf{P}$ και το $(0,0,1)$. Η ϕ παίρνει τιμές στο $[0,2\pi)$ και καλείται *γεωγραφικό μήκος* ή *αζιμούθιο.*
- Η γωνία θ είναι η προσανατολισμένη γωνία της ευθείας που ενώνει την αρχή O και το $(0,0,1)$ και της ευεθείας που ενώνει την αρχή O και το $\mathbf{P}$. Η θ καλείται *πολική γωνία* ή *γωνία του ζενίθ.* Η θ παίρνει τιμές στο $[0,\pi]$. Το *γεωγραφικό πλάτος* είναι η γωνία $\theta' = \pi/2 - \theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Εάν $\mathbf{P} = (x, y, z)$, τότε

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta\cos\phi \\ y &= \sin\theta\sin\phi \\ z &= \cos\theta. \end{aligned}$$

3. Σφαιρική απόσταση

Η μετρική στη σφαιρική γεωμετρία ορίζεται από τη σφαιρική απόσταση.

Ορισμός 3.1. *Η σφαιρική απόσταση μεταξύ δύο σημείων $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in S^2$ είναι η γωνία των αντίστοιχων διανυσμάτων θέσης τους:*

$$d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \angle(\vec{OP}, \vec{OQ}) = \arccos(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}).$$

Παρατηρήσετε ότι $\cos(d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q})) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$. Η d_s είναι όντως απόσταση με την έννοια της μετρικής:

Θεώρημα 3.2. *Έστω $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R} \in S^2$. Τότε:*

(1) $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \geq 0$. Επίσης $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$.
(2) $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$.
(3) (Τριγωνική ανισότητα.) $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{R}) \leq d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) + d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{R})$. Η ισότητα ισχύει τότε και μόνο τότε όταν τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ (με τη σειρά αυτή) ανήκουν στον ίσιο μέγιστο κύκλο.[5]

Απόδειξη. (1) Κατ' αρχάς, $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \arccos\angle(\vec{OP}, \vec{OQ}) \geq 0$ αφού $\arccos x \in [0, \pi]$. Επίσης, $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$ συνεπάγεται ότι τα $\vec{OP}, \vec{OQ}$ είναι ομόρροπα. Επειδή όμως είναι μοναδιαία, είναι και ίσα. Το αντίστροφο, είναι προφανές.
(2) Προκύπτει ως εξής:

$$d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \arccos\angle(\vec{OP}, \vec{OQ}) = \arccos\angle(\vec{OQ}, \vec{OP}) = d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{P}).$$

(3) Υπενθυμίζουμε τις παρακάτω ταυτότητες από τον διανυσματικό λογισμό:[6] έστω $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ διανύσματα του $\mathbb{R}^3$. Ισχύουν τα παρακάτω:

[4] Δηλαδή του μεσημβρινού Γκρήνουϊτς.
[5] Αυτό ουσιαστικά μας λέει ότι στη Σφαιρική Γεωμετρία οι μέγιστοι κύκλοι είναι το ανάλογο των ευθειών της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.
[6] Δείτε το βιβλίο των Marsden-Tromba.

- (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)
$$\|\vec{u}\cdot\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$
Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $\vec{u},\vec{v}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.
- $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$, όπου θ η γωνία των $\vec{u},\vec{v}$.
- $(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{z}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})(\vec{v}\cdot\vec{z}) - (\vec{u}\cdot\vec{z})(\vec{v}\cdot\vec{w})$.

Θέτουμε τώρα
$$a = d_s(\mathbf{P},\mathbf{R}), \quad b = d_s(\mathbf{P},\mathbf{Q}), \quad c = d_s(\mathbf{Q},\mathbf{R}).$$
Έχουμε ότι
$$\begin{aligned}\cos a &= \vec{OP}\cdot\vec{OR}, \quad \sin a = \|\vec{OP}\times\vec{OR}\|,\\ \cos b &= \vec{OP}\cdot\vec{OQ}, \quad \sin b = \|\vec{OP}\times\vec{OQ}\|,\\ \cos c &= \vec{OQ}\cdot\vec{OR}, \quad \sin c = \|\vec{OQ}\times\vec{OR}\|.\end{aligned}$$
Η γωνία μεταξύ των επιπέδων από το O που περιέχουν τα $\mathbf{Q},\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q},\mathbf{R}$ είναι η γωνία ψ των διανυσμάτων $\vec{OQ}\times\vec{OP}$ και $\vec{OQ}\times\vec{OR}$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz
$$1 \geq |\cos\psi| = \frac{|(\vec{OQ}\times\vec{OP})\cdot(\vec{OQ}\times\vec{OR})|}{\|\vec{OQ}\times\vec{OP}\|\|\vec{OQ}\times\vec{OR}\|} = \frac{|(\vec{OQ}\times\vec{OP})\cdot(\vec{OQ}\times\vec{OR})|}{\sin b\sin c}.$$
Από την άλλη,
$$\begin{aligned}(\vec{OQ}\times\vec{OP})\cdot(\vec{OQ}\times\vec{OR}) &= \vec{OP}\cdot\vec{OR} - (\vec{OQ}\cdot\vec{OR})(\vec{OQ}\cdot\vec{OP})\\ &= \cos a - \cos b\cos c.\end{aligned}$$
Παίρνουμε λοιπόν[7]
$$-\sin b\sin c \leq \cos a - \cos b\cos c \leq \sin b\sin c.$$
Από την αριστερή ανισότητα προκύπτει
$$\cos a \geq \cos(b+c) \iff a \leq b+c,$$
το οποίο αποδεικνύει την τριγωνική ανισότητα. Εάν τέλος ισχύει η ισότητα, αυτό είναι ισοδύναμο με την ισότητα της ανισότητας Cauchy-Schwarz παραπάνω για $\psi = \pi$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η γωνία μεταξύ των επιπέδων από το O που περιέχουν τα $\mathbf{Q},\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q},\mathbf{R}$ είναι π, άρα τα επίπεδα ταυτίζονται και το $\mathbf{Q}$ είναι ανάμεσα στα $\mathbf{P}$, $\mathbf{R}$· αυτό είναι και το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.3. *Η ομάδα* $\mathrm{O}(3)$ *είναι υποομάδα της* $\mathrm{Isom}(S^2, d_s)$

Απόδειξη. Η $\mathrm{O}(3)$ διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα. □

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 3.4. *Τα* $\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ *ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο αν και μόνο αν και μόνο αν το μεικτό γινόμενο* $(\vec{OP},\vec{OQ},\vec{OR}) = 0$.

[7] Θα ξαναδούμε τον τύπο
$$\cos a = \cos\psi\sin b\sin c + \cos b\cos c,$$
στην ενότητα της σφαιρικής τριγωνομετρίας.

Ορισμός 3.5. *Έστω σημείο* $\mathbf{P} \in S^2$ *και* $r \in [0, \pi]$. *Έστω επίσης* d_s *η σφαιρική απόσταση. Το σύνολο*

$$C = \{\mathbf{Q} \in S^2 \mid d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = r\},$$

ονομάζεται σφαιρικός κύκλος κέντρου $\mathbf{P}$ *και ακτίνας* r.

Η παρακάτω πρόταση μας λέει ότι οι σφαιρικοί κύκλοι είναι οι ευκλείδειοι κύκλοι της S^2. Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Πρόταση 3.6. *Ο σφαιρικός κύκλος κέντρου* $\mathbf{P} = (a, b, c)$ *και ακτίνας* r *δίνεται από την τομή της* S^2 *με το επίπεδο* $P:\ ax + by + cz = \cos r$. *Άρα, κάθε σφαιρικός κύκλος είναι είτε έλασσων κύκλος αν* $r \neq \pi/2$ *είτε μέγιστος κύκλος αν* $r = \pi/2$.

Ασκήσεις

(1) Βρείτε τη σφαιρική απόσταση των παρακάτω ζευγών σημείων:
 α) $(1, 0, 0)$ και $(-1, 0, 0)$,
 β) $(0, 0, -1)$ και $(0, 1, 0)$,
 γ) $(1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$ και $(2/3, 1/3, -2/3)$,
 δ) $(0, 1/2, \sqrt{3}/2)$ και $(0, -1/2, -\sqrt{3}/2)$.

(2) Δείξτε ότι οποιαδήποτε δύο αντιποδικά σημεία απέχουν σταθερή σφαιρική απόσταση π.

(3) Ποια από τα παρακάτω σημεία ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο;
 α) $(0, 0, -1)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$,
 β) $(1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$, $(2/3, 1/3, -2/3)$ και $(1, 0, 0)$.

(4) Να βρεθεί το εμβαδόν της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ του $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$ και του σφαιρικού κύκλου κέντρου $\mathbf{N}$ και ακτίνας r.[8]

4. Γωνιες και μεσοκαθετοι

Ορισμός 4.1. *Η γωνία δύο μεγίστων κύκλων* $L_{\mathbf{N}_1}$ *και* $L_{\mathbf{N}_2}$ *είναι η γωνία των καθέτων διανυσμάτων* $\mathbf{N}_1$ *και* $\mathbf{N}_2$ *που τους ορίζουν:*[9]

$$\angle L_{\mathbf{N}_1}, L_{\mathbf{N}_2} = \arccos(\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2).$$

Δύο μέγιστοι κύκλοι καλούνται ορθογώνιοι εάν $\angle L_{\mathbf{N}_1}, L_{\mathbf{N}_2} = \pi/2$.

Μία ειδική περίπτωση γωνίας εμφανίζεται όταν οι μέγιστοι κύκλοι τεμνονται σε αντιποδικά σημεία. Τότε οι μέγιστοι κύκλοι χωρίζουν τη σφαίρα σε τέσσερα μέρη που είναι ανά δύο ίσα. Τα μέρη αυτά ονομάζονται *μηνίσκοι*.[10] Είναι όλα ίσα μεταξύ τους αν η γωνία είναι $\pi/2$.

Πρόταση 4.2. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

---

[8] Ζητούμε το σφαιρικό εμβαδόν που αποκόπτει από την S^2 το επίπεδο $z = \cos r$. Στο xz επίπεδο πάρτε το τμήμα του κύκου $x = f(z) = \sqrt{1 - z^2}$, $z \in [\cos r, 1]$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι το εμβαδόν που προκύπτει από την περιστροφή του γραφήματος της f γύρω από τον z-αξονα:

$$E = 2\pi \int_{\cos r}^{1} f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2} dz = 4\pi \sin^2(r/2).$$

Παρατηρήστε ότι για $r \to \pi$, παίρνουμε το εμβαδόν της σφαίρας.

[9] Η, με άλλα λόγια η γωνία των επιπέδων που τους περιέχουν.

[10] Από το αρχ. μήνη=σελήνη.

(1) Υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος ορθογώνιος σε δύο δοθέντες διαφορετικούς μέγιστους κύκλους.
(2) Έστω μέγιστος κύκλος και σημείο εκτός αυτού. Αν το σημείο δεν είναι πόλος του μεγίστου κύκλου, τότε υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος που περνά από το σημείο και είναι ορθογώνιος στον δοθέντα μέγιστο κύκλο.

Απόδειξη. 1) Έστω $L_{\mathbf{N}_1}, L_{\mathbf{N}_2}$ διαφορετικοί μέγιστοι κύκλοι, τότε το $\mathbf{N}_1$ δεν είναι παράλληλο με το $\mathbf{N}_2$. Το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2}{\|\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2\|}$$

είναι κάθετο σε αμφότερα τα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$. Άρα ο μέγιστος κύκλος $L_{\mathbf{N}}$ είναι ορθογώνιος σε αμφότερους τους $L_{\mathbf{N}_1}, L_{\mathbf{N}_2}$. Είναι δε μοναδικός, διότι το μοναδικό άλλο κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στα $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ είναι το $-\mathbf{N}$ και $L_{-\mathbf{N}} = L_{\mathbf{N}}$.

2) Έστω $\mathbf{P} \in S^2$ και $L_{\mathbf{N}}$ μέγιστος κύκλος εκτός αυτού. Εφ' όσον το $\mathbf{P}$ δεν είναι πόλος του $L_{\mathbf{N}}$, το $\vec{OP}$ δεν είναι παράλληλο με το $\vec{ON}$. Παίρνουμε το μοναδιαίο

$$\mathbf{N}' = \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{N}}{\|\mathbf{P} \times \mathbf{N}\|}.$$

Επειδή $\vec{ON'} \perp \vec{OP}$, παίρνουμε $\mathbf{P} \in L_{\mathbf{N}'}$. Η μοναδικότητα προκύπτει όπως στο 1). ☐

Ορισμός 4.3. *Έστω $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in S^2$, $\mathbf{P} \neq \mathbf{Q}$. Το σύνολο*

$$B(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \{\mathbf{R} \in S^2 \mid d_s(\mathbf{P}, \mathbf{R}) = d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{R})\},$$

των ισαπεχόντων σημείων από τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, καλείται μεσοκάθετος των $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

Η παρακάτω πρόταση δικαιολογεί την ονομασία του συνόλου $B(\mathbf{P}, \mathbf{R})$.

Πρόταση 4.4. *Έστω η μεσοκάθετος $B(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ όπως παραπάνω. Τότε:*
(1) Το $B(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ είναι μέγιστος κύκλος.
(2) Το $B(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ διχοτομεί τό τμήμα του μέγιστου κύκλου από τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$.

Απόδειξη. 1) Έστω $\mathbf{N} \in S^2$ με διάνυσμα θέσης

$$\vec{ON} = \frac{\vec{OP} - \vec{OQ}}{\|\vec{OP} - \vec{OQ}\|}.$$

Έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
&d_s(\mathbf{P}, \mathbf{R}) = d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) \iff \\
&\arccos(\vec{OP} \cdot \vec{OR}) = \arccos(\vec{OQ} \cdot \vec{OR}) \iff \\
&\vec{OP} \cdot \vec{OR} = \vec{OQ} \cdot \vec{OR} \iff \\
&\vec{OR} \cdot (\vec{OP} - \vec{OQ}) = 0 \iff \\
&\vec{OR} \cdot \vec{ON} = 0 \iff \\
&\cos(\angle \vec{OR}, \vec{ON}) = 0 \iff \\
&d_s(\mathbf{R}, \mathbf{N}) = \pi/2.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση σφαιρικού κύκλου κέντρου $\mathbf{N}$ και ακτίνας $\pi/2$, δηλαδή, μεγίστου κύκλου.

2) Εάν υπάρχει $\mathbf{M}$ επί του τόξου του μεγίστου κύκλου από τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ ώστε $d_s(\mathbf{P}, \mathbf{M}) = d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$, τότε $\mathbf{M} \in B(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$. Μένει λοιπόν να δείξουμε την ύπαρξη του $\mathbf{M}$. Θέτουμε

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{\|\vec{OP} + \vec{OQ}\|} = \frac{\vec{OP} + \vec{OQ}}{2\cos(d(\mathbf{P}, \mathbf{Q})/2)}.$$

Τότε τα $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{M}$ ανήκουν στον ίσιο μέγιστο κύκλο (γιατί;) και επίσης

$$\cos(d_s(\mathbf{P}, \mathbf{M})) = \vec{OP} \cdot \vec{OM} = \cos(d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q})/2) = \vec{OQ} \cdot \vec{OM} = \cos(d_s(\mathbf{Q}, \mathbf{M})).$$

□

Ασκήσεις

(1) Στην Πρόταση 4.2 2), τί συμβαίνει όταν το σημείο είναι πόλος του μεγίστου κύκλου;

(2) Βρείτε τη γωνία μεταξύ των μέγιστων κύκλων που καθορίζονται από τα διανύσματα
- α) $(1, 0, 0)$ και $(0, 0, 1)$,
- β) $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$,
- γ) $(1/3, 2/3, 2/3)$ και $(-3/5, 4/5, 0)$.

(3) Βρείτε τη μεσοκάθετο $B(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ όταν:
- α) $\mathbf{P} = (1/2, -1/2, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{Q} = (2/3, 1/3, -2/3)$,
- β) $\mathbf{P} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$, $\mathbf{Q} = (0, -\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

5. Σφαιρικη τριγωνομετρια

Έστω $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ τρία σημεία της S^2· θα υποθέσουμε ότι δεν ανήκουν στον ίδιο μέγιστο κύκλο. Συμβολίζουμε με:

- A, B, C τα (μικρότερα) τμήματα των μεγίστων κύκλων που συνδέουν τα $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ και $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}$ και $\mathbf{B}$ αντίστοιχα·
- a, b, c τις γωνίες των B και C, C και A, A και B αντίστοιχα, στα σημεία $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$.

Ορισμός 5.1. *Ονομάζουμε σφαιρικό τρίγωνο $\triangle\mathbf{ABC}$ το τμήμα της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των A, B, C. Οι A, B, C καλούνται πλευρές του τριγώνου, οι a, b, c καλούνται γωνίες του τριγώνου, ενώ τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ καλούνται κορυφές του τριγώνου.*

Το πρώτο πράγμα που παρατηρούμε στα σφαιρικά τρίγωνα είναι ότι ο γνωστός τύπος του αθροίσματος των γωνιών ευκλειδείου τριγώνου $a + b + c = \pi$ δεν ισχύει. Για παράδειγμα το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

έχι άθροισμα γωνιών 3 ορθές γωνίες. Έστω $E = a + b + c - \pi$· τότε στην Ευκλείδεια Γεμετρία $E = 0$ ενώ στη σφαιρική γεωμετρία είναι πάντοτε $E > 0$. Τούτο οφείλεται στο παρακάτω Θεώρημα του Girard:[11]

Θεώρημα 5.2. *(**Girard**∼ 1620) Ο αριθμός E ισούται με το εμβαδόν του σφαιρικού τριγώνου.*

[11] Το θεώρημα είχε αποδειχθεί νωρίτερα από τον Harriot, ο οποίος όμως δεν το είχε δημοσιεύσει. Μια απόδειξη του θεωρήματος βρίσκεται στο βιβλίο του Pressley, Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία, ΠΕΚ 2013, Θεώρημα 6.4.7, σελ. 135.

Παρατηρήστε ότι αφού $a, b, c \in (0, \pi)$, $E < 2\pi$.

Θεώρημα 5.3. *(**Πρώτος νόμος συνημιτόνων**)*

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C + \cos B \cos C.^{12}$$

Απόδειξη. Δείτε την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας για την d_s. □

Πόρισμα 5.4. *(**Πυθαγόρειο Θεώρημα**) Εάν η γωνία a είναι ορθή, τότε*

$$\cos A = \cos B \cos C.$$

Θεώρημα 5.5. *(**Νόμος ημιτόνων**)*

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τον πρώτο νόμο των συνημιτόνων:

$$\cos a = \frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\sin^2 a &= 1 - \cos^2 a \\
&= \frac{\sin^2 B \sin^2 C - \cos^2 A - \cos^2 B \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C} \\
&= \frac{(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C) - \cos^2 A - \cos^2 B \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C} \\
&= \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 B \sin^2 C}.
\end{aligned}$$

Διαιρώντας με $\sin^2 A$ και αντιστρέφοντας παίρνουμε

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C}.$$

Η παράσταση στο δεξιό σκέλος είναι αναλλοίωτη από κάθε ματάταξη των ζευγών (a, A), (b, B) και (c, C). □

Η απόδειξη του παρακάτω πορίσματος αφήνεται χωρίς απόδειξη.[13]

Πόρισμα 5.6.

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{6V},$$

όπου V είναι ο όγκος του τετραέδρου με κορυφές τα O, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ και $\mathbf{C}$.

---

[12] Αναγραμματίζοντας, παίρνουμε και τους τύπους

$$\cos B = \cos b \sin A \sin C + \cos A \cos C,$$
$$\cos C = \cos c \sin A \sin B + \cos A \cos B.$$

[13] Ένας τρόπος για να αποδειχθεί το πόρισμα, είναι να κανονικοποιήσουμε ώστε $\mathbf{A} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{B} = (\cos C, \sin C, 0)$ και $\mathbf{C} = (\cos B, \sin B \cos a, \sin B \sin a)$. Αυτό μπορεί να γίνει πάντοτε, χρησιμποιώντας κατάλληλη σφαιρική ισομετρία, δείτε παρακάτω. Κατόπιν, εφαρμόζετε τον τύπο για τον όγκο του τετραέδρου που μάθατε στον Απειροστικό Λογισμό.

Θεώρημα 5.7. *(Δεύτερος νόμος συνημιτόνων)*

$$\cos A = \frac{\cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$ [14]

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από την ύπαρξη *δυϊκού τριγώνου* για κάθε σφαιρικό τρίγωνο: Εάν $T = \triangle\mathbf{ABC}$ σφαιρικό τρίγωνο με πλευρές A, B, C και γωνίες a, b, c, τότε υπάρχει $T^* = \triangle\mathbf{A}^*\mathbf{B}^*\mathbf{C}^*$ τρίγωνο με πλευρές

$$A* = \pi - a, \quad B^* = \pi - b, C^* = \pi - c$$

και γωνίες

$$a^* = \pi - A, \quad b^* = \pi - B, \quad c^* = \pi - C.$$

Η κατασκευή του δυϊκού τριγώνου γίνεται ως εξής:

- Επί των μεγίστων κύκλων που περιέχουν την πλευρα A παίρνουμε τμήματα $\mathbf{ABD}$ και $\mathbf{ACD'}$ μήκους $\pi/2$. Ο μέγιστος κύκλος απο τα $\mathbf{D}, \mathbf{D'}$ είναι ισημερινός με πόλο $\mathbf{A}$.
- Επί των μεγίστων κύκλων που περιέχουν το $\mathbf{B}$ παίρνουμε τμήματα $\mathbf{BCE}$ και $\mathbf{BAE'}$ μήκους $\pi/2$. Ο μέγιστος κύκλος απο τα $\mathbf{E}, \mathbf{E'}$ είναι ισημερινός με πόλο $\mathbf{B}$.
- Επί των μεγίστων κύκλων που περιέχουν το $\mathbf{C}$ παίρνουμε τμήματα $\mathbf{CAF}$ και $\mathbf{CBF'}$ μήκους $\pi/2$. Ο μέγιστος κύκλος απο τα $\mathbf{F}, \mathbf{F'}$ είναι ισημερινός με πόλο $\mathbf{C}$.

Ολοκληρώστε τώρα την απόδειξη του δεύτερου νόμου των συνημιτόνων θεωρώντας το *μικρό* σφαιρικό τρίγωνο που προκύπτει από τις τομές των μεγίστων κύκλων που περιέχουν τα $\mathbf{D}, \mathbf{D'}$, $\mathbf{E}, \mathbf{E'}$ και $\mathbf{F}, \mathbf{F'}$ και εφαρμόζοντας σε αυτό τον πρώτο νόμο των συνημιτόνων. □

Πόρισμα 5.8. *Στην σφαιρική τριγωνομετρία, τα όμοια τρίγωνα είναι ίσα, και αντιστρόφως.*

Ασκήσεις

(1) Υπολογίστε το εμβαδόν σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι $\pi/2$.

(2) Αποδείξτε το παρακάτω σπουδαίο Θεώρημα του Αρχιμήδη περί των εμβαδών σφαίρας και κυλίνδρου: *Το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας που αποκόπτουν τα επίπεδα $z = a$ και $z = b$, $-1 \leq a < b \leq 1$, ισούται με το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κυλίνδρου που κείται μεταξύ των δύο αυτών επιπέδων.*

(3) Έστω ισόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο πλευράς A και εσωτερικής γωνίας a. Αποδείξτε ότι

$$\cos(A/2) \sin(a/2) = 1/2.$$

Συμπεράνετε ότι σε σφαιρικό ισόπλευρο τρίγωνο $a > \pi/3$.

(4) Υπολογίστε την περίμετρο σφαιρικού τριγώνου του οποίου όλες οι γωνίες είναι ορθές.

[14] Αναγραμματίζοντας, παίρνουμε και τους τύπους

$$\cos B = \frac{\cos b + \cos a \cos c}{\sin a \sin c},$$
$$\cos C = \frac{\cos c + \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

6. Σφαιρικές ισομετρίες-η ομάδα $\mathrm{Isom}(S^2, d_s)$

Μία *σφαιρική ισομετρία* είναι μία (1–1 και επί) απεικόνιση $f : S^2 \to S^2$ για την οποία ισχύει

$$d_s(f(\mathbf{P}), f(\mathbf{Q})) = d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad \text{για κάθε } \mathbf{P}, \mathbf{Q} \in S^2.$$

Η απόδειξη της παρακάτω πρότασης είναι άμεση:

Πρόταση 6.1. *Κάθε σφαιρική ισομετρία διατηρεί την Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των των σημείων της S^2. Το σύνολο των σφαιρικών ισομετριών αποτελεί ομάδα με πράξη τη σύνθεση.*

Πρόταση 6.2. *Κάθε σφαιρική ισομετρία απεικονίζει μέγιστους κύκλους σε μέγιστους κύκλους.*

Απόδειξη. Κάθε μέγιστος κύκλος L είναι σφαιρικός κύκλος κέντρου $\mathbf{P}$ με ακτίνα $\pi/2$:

$$L = \{\mathbf{Q} \in S^2 \mid d_s(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \pi/2\}.$$

Η απόδειξη έπεται αμέσως. □

Έχουμε ήδη δεί ότι η $\mathrm{O}(3)$ είναι υποομάδα της $\mathrm{Isom}(S^2, d_s)$. Υπενθυμίζουμε ξανά ορισμένα χαρακτηριστικά της ομάδας αυτής.

Η $\mathrm{O}(3)$ δεν έχει τόσο απλή περιγραφή όπως η $\mathrm{O}(2)$ και επίσης, δεν είναι αβελιανή. Ένα στοιχείο

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3)$$

έχει τις εξής ιδιότητες:

- Τα διανύσματα στήλες καθώς και τα διανύσματα γραμμές είναι ορθομοναδιαία. Αυτό προκύπτει αμέσως από τις σχέσεις
$$AA^T = A^T A = I_3.$$
- Από την παραπάνω σχέση και τις ιδιότητες των οριζουσών, προκύπτει επίσης ότι $\det(A) = \pm 1$.
- Τα ιδιοδιανύσματα ενός $A \in \mathrm{O}(3)$ έχουν μέτρο 1. Οπότε, αυτά μπορεί να είναι είτε τα $1, \lambda, \overline{\lambda}$, είτε τα $-1, \lambda, \overline{\lambda}$, όπου $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $|\lambda| = 1$.
- Η υποομάδα της $\mathrm{O}(3)$ της οποίας τα στοιχεία έχουν ορίζουσα 1 είναι η ειδική ορθογώνια ομάδα $\mathrm{SO}(3)$. Τα στοιχεία της $\mathrm{O}(3)$ με ορίζουσα -1 δεν συνιστούν ομάδα, τέτοια στοιχεία είναι *ανακλάσεις*.

Η $\mathrm{SO}(3)$ είναι η ομάδα των περιστροφών της S^2. Κάθε στοιχείο της μπορεί να γραφεί ως $A = PDP^T$ όπου $P \in \mathrm{O}(3)$ και D είναι της μορφής

$$D = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Το D παριστάνει περιστροφή γύρω από τον z-άξονα. Παρατηρήστε ότι το D αφήνει σταθερά τα σημεία $(0,0,1)$ και $(0,0,-1)$ και κανένα άλλο σημείο της σφαίρας δεν παραμένει αναλλοίωτο από τον D. Έπεται, ότι κάθε $A \in \mathrm{SO}(3)$ έχει δύο σταθερά σημεία στην S^2.

Θεώρημα 6.3. *Το σύνολο των ισομετριών* $\mathrm{Isom}(S^2, d_s)$ *αποτελείται από απεικονίσεις που προκύπτουν από περιορισμούς της δράσης της* $\mathrm{O}(3)$ *στην* S^2.

Απόδειξη. Λόγω του πορίσματος 3.3, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σφαιρική ισομετρία είναι στοιχείο της $\mathrm{O}(3)$.

Έστω $f : S^2 \to S^2$ μία σφαιρική ισομετρία. Τότε απεικονίζει μέγιστους κύκλους σε μέγιστους κύκλους από την Πρόταση 6.2. Επίσης, αν $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{R}$ βρίσκονται επάνω σε μέγιστο κύκλο (με αυτή τη σειρά), τότε τα $f(\mathbf{P})$, $f(\mathbf{Q})$ και $f(\mathbf{R})$ βρίσκονται επάνω στην εικόνα του μέγιστου κύκλου, με αυτή τη σειρά. Επεκτείνουμε την $f : S^2 \to S^2$ σε απεικόνιση $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ως εξής:

$$\tilde{f}(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}), \quad t \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in S^2.$$

Η $\tilde{f}$ είναι γραμμική απεικόνιση: Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, με $\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1$, $\mathbf{y} = t_2\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in S^2$. Αν τα τελευταία δεν είναι αντιποδικά, υπάρχει μοναδικός μέγιστος κύκλος L που περνά από αυτά. Τότε

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = t_1\mathbf{x}_1 + t_2\mathbf{x}_2 = t\mathbf{x},$$

για κάποιο $t \geq 0$ και $\mathbf{x} \in S^2$. Συνεπώς

$$\tilde{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \tilde{f}(t\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x})$$

και επίσης,

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) + \tilde{f}(\mathbf{y}) = t_1 f(\mathbf{x}_1) + t_2 f(\mathbf{x}_2)$$

και τα δεξιά σκέλη είναι ίσα διότι $f(L)$ είναι μέγιστος κύκλος που διατηρεί τόσο τον αφφινικό όσο και τον γωνιακό διαχωρισμό των σημείων. Αν τα $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ είναι αντιποδικά, τότε έχουμε αμέσως το αποτέλεσμα.

Τέλος, αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε

$$\tilde{f}(\lambda\mathbf{x}) = \tilde{f}(\lambda t\mathbf{x}_1) = \lambda t f(\mathbf{x}_1) = \lambda\tilde{f}(\mathbf{x}).$$

Άρα η $\tilde{f}$ είναι γραμμική ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ δηλαδή στοιχείο της $\mathrm{O}(3)$. □