

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Χειμερινό ΕΞΑΜΗΝΟ 2019–20

MEM233-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

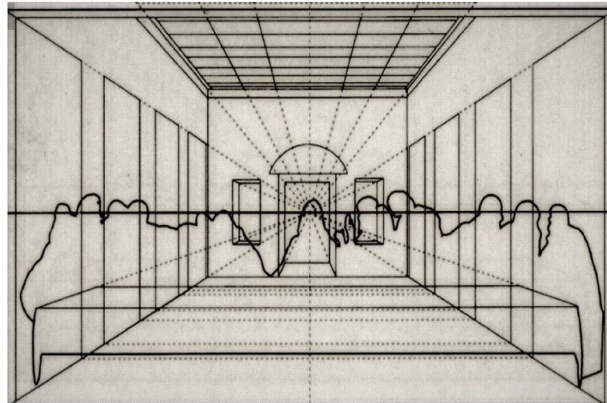
Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	2
2. Γενικά για τον Προβολικό Χώρο $\mathbb{R}P^n$	4
3. Η Προβολική Ευθεία και η γεωμετρία της	6
4. Το Προβολικό Επίπεδο και η γεωμετρία του	11
4.1. Γενικά για το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$	11
4.2. Ευθείες του $\mathbb{R}P^2$	12
4.3. Δυϊσμός	13
4.4. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας του $\mathbb{R}P^2$	14
4.5. Ιδιότητες των προβολικών μετασχηματισμών	15
4.6. Διπλοί λόγοι και δυϊσμός	18
4.7. Προβολική και προοπτική θέση	20
5. Κλασικά θεωρήματα της προβολικής γεωμετρίας	23
5.1. Θεώρημα Πάππου	23
5.2. Θεώρημα Desargues	24

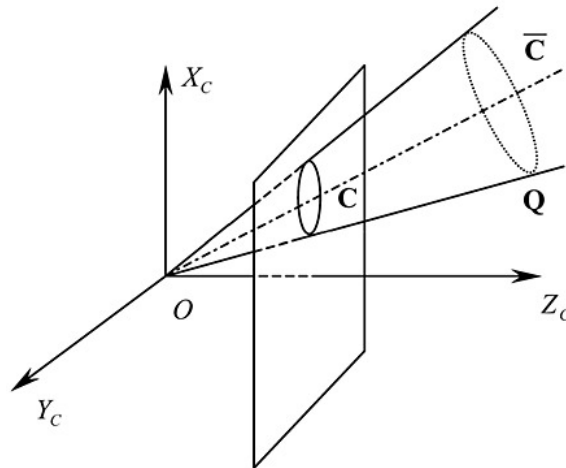
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ήδη από τον 15ο αι. μ.Χ. έγινε κατανοητό ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν επαρκούσε για να μοντελοποιήσει τους μετασχηματισμούς που είχαν σχέση με την προοπτική ενός σχήματος. Η προοπτική εμφανιζόταν κατά κόρον στη ζωγραφική και την αρχιτεκτονική, με τους ζωγράφους και αρχιτέκτονες να προσπαθούν με διάφορους τρόπους να τη χειριστούν. Η μέθοδος της προοπτικής ζωγραφικής αναπτύσσεται τότε, αρχικά στην Ιταλία από τους Brunelleschi και Alberti. Ένα ανοικτό ερώτημα της εποχής ήταν ποιες είναι οι κοινές ιδιότητες δύο προοπτικών του ιδίου σχήματος;

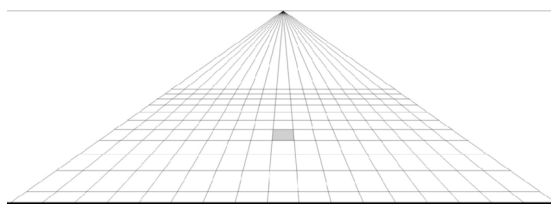


Προοπτικές ευθείες στον Μυστικό Δείπνο του Leonardo daVinci.

Κατά τον 17ο αι. ο (αρχιτέκτονας και μηχανικός) Desargues περιέγραψε τις κωνικές ως προοπτικές παραμορφώσεις του κύκλου. Θεώρησε ένα σημείο στο άπειρο ως την τομή δύο παραλλήλων ευθειών.



Κατά τον 18ο αι. έχουμε την επαναστατική ιδέα των Descartes, Fermat να περιγράφουν τη Γεωμετρία με αναλυτικό τρόπο, σε αντίθεση με τον συνθετικό των Ελλήνων. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα μία πρωτοφανή έκρηξη νέων γεωμετρικών μεθόδων. Ανάμεσα σε πολλά άλλα, ο Desargues βασιζόμενος σε ιδέες του Pascal, επικεντρώθηκε στις απειροστές προσεγγίσεις μέσω καρτεσιανών συντεταγμένων. Ο Monge εισήγαγε την Περιγραφική Γεωμετρία και μελέτησε ειδικότερα τη διατήρηση των γωνιών και των μηκών από τις προβολές.



Μήκη και γωνίες δεν διατηρούνται εν γένει από τις προβολές

Κατά τον 19ο αι. ο Poncelet που ήταν αξιωματικός της στρατιάς του Ναπολέοντα,

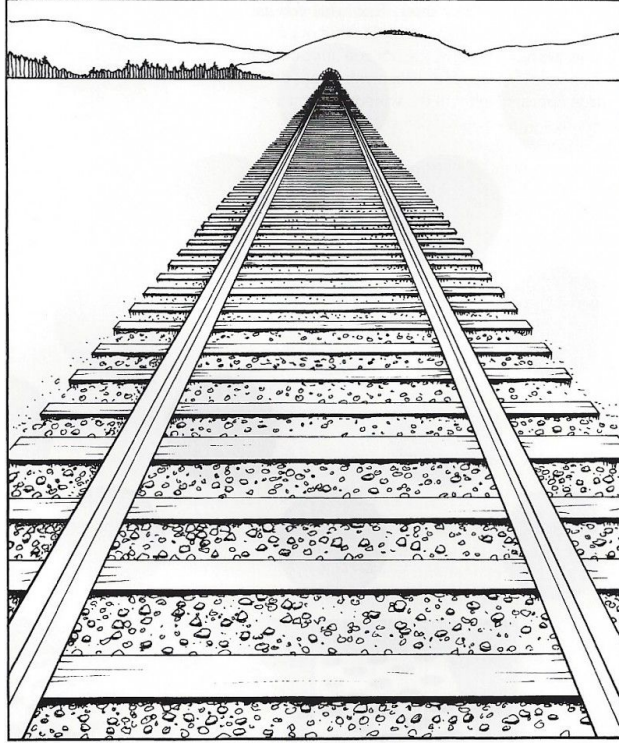


Jean-Victore Poncelet, 1788–1867.

έγραψε το 1822 όντας κλεισμένος σε ρωσικές φυλακές διατριβή για τις προβολικές ιδιότητες των σχημάτων και για το αναλλοίωτο των προβολών. Αυτή η διατριβή θεωρείται και ως η πρώτη σε αυτό που σήμερα καλούμε Προβολική Γεωμετρία: μία προβολική ιδιότητα είναι μία ιδιότητα που παραμένει αναλλοίωτη από τις προβολές.

Οι Chasles, Möbius μελέτησαν τους πιο γενικούς προβολικούς μετασχηματισμούς που απεικονίζουν σημεία σε σημεία και ευθείες σε ευθείες και διατηρούν τον διπλό λόγο. Κατά το μοντέλο του Klein για τις γεωμετρίες, έχουμε την εξής ιεράρχηση: η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι μέρος της Αφφινικής Γεωμετρίας η οποία με τη σειρά της περιέχεται στην Προβολική Γεωμετρία.

Σε γενικές γραμμές μπορούμε να πούμε ότι η Προβολική Γεωμετρία στέκεται ενδιάμεσα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία που ενδιαφέρεται για μήκη, γωνίες και αποστάσεις, και στην Τοπολογία στην οποία το σχήμα δεν έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Η Προβολική Γεωμετρία ενδιαφέρεται για αναλλοίωτες ιδιότητες από τις προβολές: έτσι η ευθεία παραμένει ευθεία, αλλά αποστάσεις, μήκη και γωνίες αλλάζουν. Η παραλληλία επίσης αποκτά διαφορετικό νόημα, δύο ευθείες τέμνονται πάντοτε (φανταστείτε τις γραμμές ενός τραίνου-αυτές δείχνουν να τέμνονται στον ορίζοντα).



2. ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΧΩΡΟ $\mathbb{R}P^n$

Δίνουμε τώρα τον αυστηρό ορισμό τού προβολικού n -χώρου που είναι και ο υποκείμενος χώρος της Προβολικής Γεωμετρίας: Στο $\mathbb{R}_*^{n+1}$, $n \geq 1$, θεωρούμε τη σχέση $\sim$ ως εξής:

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x} \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}_*.$$

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Είναι:

- Ανακλαστική διότι $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$ εφόσον $\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$.
- Συμμετρική: αν $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τότε $\mathbf{x} = (1/\lambda)\mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' \sim \mathbf{x}$.
- Μεταβατική: Αν $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}_*$ και $\mathbf{x}' \sim \mathbf{x}'' \iff \mathbf{x}'' = \lambda' \mathbf{x}'$, $\lambda' \in \mathbb{R}_*$, τότε $\mathbf{x}'' = \lambda \lambda' \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \sim \mathbf{x}''$.

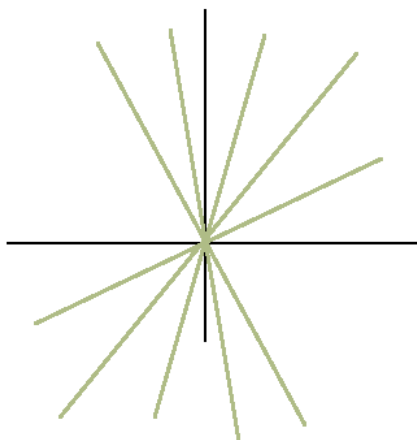
Ορίζουμε τώρα τον προβολικό n -χώρο ως το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας:

$$\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}_*^{n+1} / \sim = \{[\mathbf{x}], \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1}\}.$$

Στην πράξη, ο $\mathbb{R}P^n$ είναι το σύνολο των ευθειών που περνούν από την αρχή. Πράγματι, μία κλάση ισοδυναμίας ενός $\mathbf{x}$ είναι το σύνολο

$$[\mathbf{x}] = \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\},$$

που είναι ακριβώς τα σημεία της ευθείας που περνά από την αρχή, στην κατεύθυνση του $\mathbf{x}$.

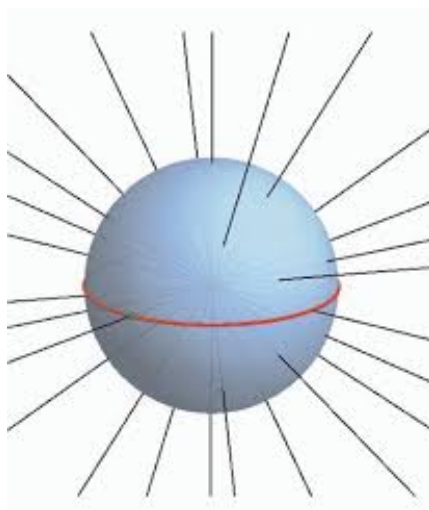


Ο προβολικός χώρος είναι το σύνολο των ευθειών από την αρχή.

Αν $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_*^{n+1}$, $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$, θα γράφουμε $[\mathbf{x}] = [x_0 : \dots : x_n]$ και θα καλούμε την τελευταία αγκύλη ομογενείς συντεταγμένες του $[\mathbf{x}]$. Λόγου χάρη, το σημείο $[1 : 0 : 2]$ του $\mathbb{R}P^2$ είναι τα σημεία

$$x = \lambda, \quad y = 0, \quad z = 2\lambda,$$

δηλαδή η ευθεία με καρτεσιανές εξισώσεις $y = 0$, $z = 2x$ του $\mathbb{R}^3$, εξαιρουμένου του σημείου $(0, 0, 0)$.



Προβολικός χώρος και σφαίρα.

Ένας άλλος τρόπος για να θεωρήσουμε τον προβολικό n -χώρο, είναι μέσω της ταυτοποίησης αντιποδικών σημείων της σφαίρας S^n . Πράγματι, κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^{n+1}$ που περνά από την αρχή καθορίζεται πλήρως από δύο αντιποδικά σημεία της S^n και αντιστρόφως. Με άλλα λόγια, εάν στην S^n ορίσουμε τη σχέση

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{y} \iff \mathbf{x} = \pm \mathbf{y},$$

τότε εύκολα βλέπουμε ότι είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι

$$\mathbb{R}P^n = S^n / \sim.$$

Στις σημειώσεις αυτές θα περιοριστούμε σε αναλυτική περιγραφή του προβολικού επιπέδου $\mathbb{R}P^2$ και της γεωμετρίας του. Είναι σωστό όμως να πούμε μερικά πράγματα πρώτα για την προβολική ευθεία.

3. Η ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΗΣ

Όταν $n = 1$, το σύνολο $\mathbb{R}P^1$ είναι η *προβολική ευθεία* που όπως είδαμε παραπάνω μπορεί να θεωρείται και ως το σύνολο όλων των ευθειών του επιπέδου $\mathbb{R}^2$ που περνούν από την αρχή $(0, 0)$. Ένα σημείο $[x_0 : x_1]$ της προβολικής ευθείας θα έχει σίγουρα κάποιο από τα x_0, x_1 διαφορετικό του μηδενός. Συνεπώς, η προβολική ευθεία είναι η ένωση των υποσυνόλων

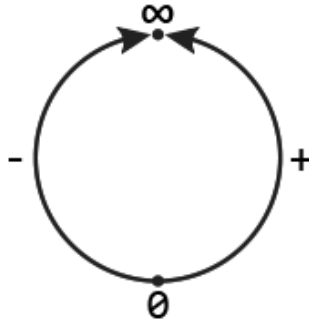
$$H_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_0 \neq 0\} \quad \text{και} \quad H_1 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{R}P^1 \mid x_1 \neq 0\}.$$

Προσέξτε ότι η τομή $H_0 \cap H_1 \neq \emptyset$. Παρατηρούμε όμως ότι μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{R}P^1 = H_0 \cup \{[0 : 1]\}, \quad \text{είτε} \quad \mathbb{R}P^1 = H_1 \cup \{[1 : 0]\},$$

δηλαδή, η προβολική ευθεία μπορεί να γραφεί ως η (ξένη) ένωση της ευκλείδειας ευθείας (εν προκειμένω, της H_0 ή της H_1 , αντίστοιχα) και ενός σημείου στο άπειρο (του $[0 : 1]$, ή του $[1 : 0]$, αντίστοιχα).

Προκύπτει απευθείας ότι η προβολική ευθεία $\mathbb{R}P^1$ βρίσκεται σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τον ίδιο τον κύκλο S^1 και όχι απλώς με τον $S^1 / \sim$. Κι αυτό διότι S^1 μέσω της στερεογραφικής προβολής μπορεί να ταυτιστεί με την πραγματική ευθεία στην οποία έχουμε προσθέσει ένα σημείο στο άπειρο.



Προβολική ευθεία και κύκλος.

Μπορούμε να πηγαίνουμε από την προβολική στην ευκλείδεια ευθεία με την *απεικόνιση προβολής* $\mathbb{P} : \mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δίνεται στο σύνολο H_0 από την $\mathbb{P}([x_0 : x_1]) = x_1/x_0$, ενώ στο σύνολο H_1 δίνεται από την $\mathbb{P}([x_0 : x_1]) = x_0/x_1$. Αντιστρόφως, μπορούμε να πηγαίνουμε από την ευκλείδεια ευθεία στην προβολική από την απεικόνιση τυπικής ανύψωσης $x \mapsto [x : 1]$.

Μένει να δούμε ποια είναι η γεωμετρία της $\mathbb{R}P^1$. Θυμηθείτε ότι η αφινική ομάδα δύο διαστάσεων $A(2) = \text{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε τώρα ότι η $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ δρα στην $\mathbb{R}P^1$ ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) \quad \text{και} \quad [\mathbf{x}] = [x : y] \in \mathbb{R}P^1$$

τότε

$$(A, \mathbf{x}) \mapsto [\mathbf{x}A],$$

και το $[\mathbf{x}A] \in \mathbb{R}P^1$ ακριβώς επειδή $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$ (γράψτε τις λεπτομέρειες της απόδειξης!). Η γεωμετρία της προβολικής ευθείας (κατά Klein) είναι το ζεύγος $(\mathbb{R}P^1, P(1) = \text{GL}(2, \mathbb{R}))$. Όπως και στην αφφινική γεωμετρία, έχουμε την εξής θεμελιώδη πρόταση για τη γεωμετρία της προβολικής ευθείας:

Πρόταση 3.1. Έστω $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}]$ και $[\mathbf{A}'], [\mathbf{B}'], [\mathbf{C}']$ τριάδες διαφορετικών ανά δύο σημείων της $\mathbb{R}P^1$. Τότε υπάρχει μοναδικό $M \in P(1)$ με

$$M([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad M([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad M([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'].$$

Απόδειξη. Έστω τα σημεία $[1 : 0], [0 : 1]$ και $[1 : 1]$. Έστω επίσης ότι

$$[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1], \quad [\mathbf{B}] = [b_0 : b_1], \quad [\mathbf{C}] = [c_0 : c_1].$$

Για $\lambda, \mu \neq 0$, πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda a_1 \\ \mu b_0 & \mu b_1 \end{pmatrix} \in P(1)$$

εφόσον $[\mathbf{A}] \neq [\mathbf{B}]$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$N([1 : 0]) = [\mathbf{A}], \quad N([0 : 1]) = [\mathbf{B}], \quad N([1 : 1]) = [\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}].$$

Τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ σχηματίζουν μία βάση του $\mathbb{R}^2$. Έτσι, υπάρχουν μοναδικά λ, μ ώστε $\mathbf{C} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}$ και τότε $N([1 : 1]) = [\mathbf{C}]$. Με την ίδια διαδικασία, βρίσκουμε $N' \in P(1)$ με

$$N'([1 : 0]) = [\mathbf{A}'], \quad N'([0 : 1]) = [\mathbf{B}'], \quad N'([1 : 1]) = [\mathbf{C}'].$$

Ο μετασχηματισμός $M = N'N^{-1}$ είναι ο ζητούμενος. Είναι δε μοναδικός, διότι εάν υπήρχε M' με

$$M'([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad M'([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad M'([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'],$$

τότε ο $N^{-1}(M')^{-1}MN$ θα σταθεροποιούσε τα τρία σημεία $[1 : 0], [0 : 1]$ και $[1 : 1]$, οπότε αναγκαστικά θα ήταν ίσος με τον ταυτοτικό πίνακα I . Αυτό όμως συνεπάγεται ότι $M = M'$, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα. Θα βρούμε τον $M \in P(1)$ που απεικονίζει τα $[1 : 0], [0 : 1], [1 : 1]$ στα $[1 : 2], [-1 : 1]$ και $[2 : 1]$, αντίστοιχα. Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 2\lambda \\ -\mu & \mu \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$[1 : 1]M = [\lambda - \mu : 2\lambda + \mu].$$

Το σύστημα

$$\lambda - \mu = 2, \quad 2\lambda + \mu = 1$$

έχει λύσεις $\lambda = 1, \mu = -1$. Άρα,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Κλείνουμε την ενότητα αυτή εισάγοντας τον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων. Έστω $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ τέσσερα σημεία της $\mathbb{R}P^1$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα. Έστω χωρίς βλάβη ότι $[A] \neq [B]$. Τότε,

$$(1) \quad C = pA + qB, \quad D = rA + sB.$$

Ο διπλός λόγος ορίζεται ως

$$(A, B; C, D) = \frac{qr}{ps}.$$

Ο διπλός λόγος ήταν γνωστός στον Ευκλείδη και η θεμελιώδης του ιδιότητα (Πρόταση 3.2 παρακάτω) αποδείχθηκε από τον Πάππο.¹ Ο ορισμός του διπλού λόγου είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των αντιπροσώπων: πράγματι, αν A', B', C', D' είναι κάποιοι άλλοι αντιπρόσωποι των $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, τότε υπάρχουν a, b, c, d όλα διαφορετικά του μηδενός τέτοια ώστε $A' = aA$, $B' = bB$, $C' = cC$ και $D' = dD$. Τότε,

$$\begin{aligned} C' &= cC = cpA + cqB = (cp/a)A' + (cq/b)B', \\ D' &= dD = drA + dsB = (dr/a)A' + (ds/b)B', \end{aligned}$$

συνεπώς

$$(A', B'; C', D') = \frac{(cq/b)(dr/a)}{(cp/a)(ds/b)} = \frac{qr}{ps} = (A, B; C, D).$$

Πρόταση 3.2. *Ο διπλός λόγος είναι προβολική αναλλοίωτος: παραμένει αναλλοίωτος από τη δράση της $P(1)$.*

Απόδειξη. Έστω όπως παραπάνω $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ τέσσερα σημεία της $\mathbb{R}P^1$ τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα και έστω χωρίς βλάβη ότι $[A] \neq [B]$ ώστε να ισχύει η (1). Αν $M \in P(1)$, τότε

$$CM = p(AM) + q(BM), \quad DM = r(AM) + s(BM).$$

Είναι τώρα $[AM] \neq [BM]$. Κι αυτό διότι, στην περίπτωση που ίσχυε το αντίθετο θα υπήρχε $\lambda \in \mathbb{R}_*$ με $BM = \lambda(AM)$. Επειδή όμως ο M είναι αντιστρέψιμος, τούτο θα συνεπαγόταν ότι $B = \lambda A$ και άρα $[A] = [B]$, πράγμα που αντικρούει την υπόθεση. Άρα,

$$(AM, BM; CM, DM) = \frac{qr}{ps} = (A, B; C, D).$$

□

Πρόταση 3.3. *Υπάρχει $M \in P(1)$ που απεικονίζει τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$ στα τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[D']$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν*

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

¹Παρατηρήσετε ότι ο διπλός λόγος τεσσάρων διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο σημείων δεν μπορεί να είναι 0 ή 1. Γιατί;

Απόδειξη. Αν υπάρχει $M \in P(1)$ με

$$M([A]) = [A'], \quad M([B]) = [B'], \quad M([C]) = [C'], \quad M([D]) = [D'],$$

τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από την Πρόταση 3.2. Έστω τώρα ότι

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$[A] = [A'] = [1 : 0], \quad [B] = [B'] = [0 : 1], \quad [C] = [C'] = [1 : 1].$$

Τότε, αν $[D] = [d_1 : d_2]$ και $[D'] = [d'_1 : d'_2]$, είναι

$$(A, B; C, D) = d_1/d_2, \quad (A', B'; C', D') = d'_1/d'_2.$$

Προκύπτει ότι $[D] = [D']$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Στο σημείο αυτό κάνουμε μία χρήσιμη παρατήρηση πάνω στην απόδειξη της Πρότασης 3.3. Έστω $[A]$, $[B]$, $[C]$ και $[D]$ τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία της $\mathbb{R}P^1$ και έστω

$$(A, B; C, D) = \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$((1, 0), (0, 1); (\lambda, 1), (1, 1)) = \lambda = (A, B; C, D).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3, υπάρχει $M \in P(1)$ με

$$M([1 : 0]) = [A], \quad M([0 : 1]) = [B], \quad M([\lambda : 1]) = [C], \quad M([1 : 1]) = [D].$$

Άρα, όταν μας δίνονται τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία της $\mathbb{R}P^1$ μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι αυτά είναι τα

$$[1 : 0], \quad [0 : 1], \quad [\lambda : 1], \quad [1 : 1],$$

όπου λ είναι ο διπλός λόγος των δοθέντων σημείων.

Ας παρατηρήσουμε ότι μέσω της ταύτισης της $\mathbb{R}P^1$ με τον $S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$, ο διπλός λόγος μπορεί να οριστεί και ως εξής: έστω $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$, τέτοια ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά να μην είναι ίσα. Αν κανένα από αυτά δεν είναι το ∞ , θεωρούμε τις ανυψώσεις τους

$$[A] = [a : 1], \quad [B] = [b : 1], \quad [C] = [c : 1], \quad [D] = [d : 1].$$

Αν $a \neq b$, τότε επειδή

$$c = \frac{(c-b)a + (a-c)b}{a-b},$$

$$d = \frac{(d-b)a + (a-d)b}{a-b},$$

έχουμε

$$(A, B; C, D) = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)},$$

το οποίο και ορίζουμε ως τον διπλό λόγο $(a, b; c, d)$ των a, b, c, d . Χρειάζεται βεβαίως να κάνουμε ορισμένες παραδοχές στην περίπτωση όπου δύο από τα σημεία είναι ίσα· λόγου χάρη, αν $b = c$,

τότε λέμε ότι $(a, b; c, d) = \infty$. Έτσι, ο διπλός λόγος παίρνει τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.² Παρατηρήστε τώρα ότι με την επιπλέον παραδοχή $\infty : \infty = 1$, ο διπλός λόγος

$$(a, b; c, d) = \frac{(d-b)(c-a)}{(d-a)(c-b)},$$

και στην περίπτωση που κάποιο από τα a, b, c, d είναι το σημείο στο άπειρο.

Παράδειγμα. Θα βρούμε με δύο τρόπους τον διπλό λόγο των

$$[\mathbf{A}] = [1 : 2], \quad [\mathbf{B}] = [2 : 1], \quad [\mathbf{C}] = [1 : 0], \quad [\mathbf{D}] = [1 : 1].$$

Κατ' αρχάς είναι

$$\mathbf{C} = (1, 0) = (-1/3)\mathbf{A} + (2/3)\mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = (1, 1) = (1/3)\mathbf{A} + (1/3)\mathbf{B},$$

οπότε

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \frac{(2/3) \cdot (1/3)}{(-1/3) \cdot (1/3)} = -2.$$

Από την άλλη, επειδή τα $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$ ανήκουν στο σύνολο H_0 , θεωρούμε τις προβολές

$$a = 1/2, \quad b = 2, \quad d = 1,$$

των $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$, αντίστοιχα, επάνω στην πραγματική ευθεία, ενώ παίρνουμε $c = \infty$. Τότε

$$(a, b; c, d) = \frac{(1-2)(\infty - 1/2)}{(1-1/2)(\infty - 2)} = \frac{-1}{1/2} \cdot \frac{\infty}{\infty} = (-2) \cdot 1 = -2.$$

Πρόταση 3.4. (Θεώρημα Τεσσάρων Σημείων.) Έστω $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{X}]$, $[\mathbf{Y}]$ σημεία της προβολικής ευθείας. Τότε

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{Y}) \implies [\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}].$$

Απόδειξη. Έστω

$$\mathbf{C} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = r\mathbf{A} + s\mathbf{B}, \quad \mathbf{Y} = r'\mathbf{A} + s'\mathbf{B}.$$

Τότε,

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{X}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{Y}) \implies \frac{qr}{ps} = \frac{qr'}{ps'} \implies \frac{r}{s} = \frac{r'}{s'}.$$

Οπότε,

$$\mathbf{Y} = r'\mathbf{A} + s'\mathbf{B} = (r'/r)r\mathbf{A} + (s'/s)s\mathbf{B} = (r'/r)(r\mathbf{A} + s\mathbf{B}) = (r'/r)\mathbf{X} \implies [\mathbf{X}] = [\mathbf{Y}].$$

□

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι το εξής: τί συμβαίνει στον διπλό λόγο τεσσάρων σημείων όταν μετατάζουμε τα σημεία a, b, c, d με μία μετάταξη της S^4 ; Υπάρχουν ως γνωστόν 24 μετατάξεις της S^4 αλλά ο διπλός λόγος που προκύπτει από οποιαδήποτε από αυτές είναι συνάρτηση του διπλού λόγου $(a, b; c, d)$.

Άσκηση. Δείξτε ότι ο διπλός λόγος ικανοποιεί τις ιδιότητες:

$$(2) \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}) = (\mathbf{B}, \mathbf{A}; \mathbf{D}, \mathbf{C}) = (\mathbf{C}, \mathbf{D}; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{D}, \mathbf{C}; \mathbf{B}, \mathbf{A})$$

²Εάν τα σημεία είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, τότε ο διπλός λόγος παίρνει τιμές στο $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

και

$$\begin{aligned} (A, B; C, D) &= \lambda, & (A, B; D, C) &= 1/\lambda, \\ (A, C; B, D) &= 1 - \lambda, & (A, C; D, B) &= 1/(1 - \lambda), \\ (A, D; B, C) &= 1 - 1/\lambda, & (A, D; C, B) &= \lambda/(\lambda - 1). \end{aligned}$$

4. ΤΟ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΑΙ Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ

4.1. **Γενικά για το Προβολικό Επίπεδο $\mathbb{R}P^2$.** Ας παρατηρήσουμε κατ' αρχάς ότι το προβολικό επίπεδο $\mathbb{R}P^2$ είναι η ένωση των εξής τριών συνόλων:

$$H_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_0 \neq 0\},$$

$$H_1 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_1 \neq 0\},$$

$$H_2 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_2 \neq 0\}.$$

Και πάλι τονίζουμε ότι τα σύνολα αυτά δεν είναι ξένα μεταξύ τους. Το κάθε ένα από αυτά όμως είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{R}^2$: Λόγου χάρη, τα σημεία του H_3 είναι ισοδύναμα με σημεία της μορφής $[x : y : 1]$ και έτσι έχουμε την απεικόνιση (προβολής) $[x : y : 1] \mapsto (x, y)$. Είναι τώρα

$$L_\infty^3 = \mathbb{R}P^2 \setminus H_3 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}P^2 \mid x_2 = 0\}.$$

Το σύνολο L_∞^3 μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα αντίγραφο της προβολικής ευθείας $\mathbb{R}P^1$ εμβυθισμένης εντός του $\mathbb{R}P^2$:

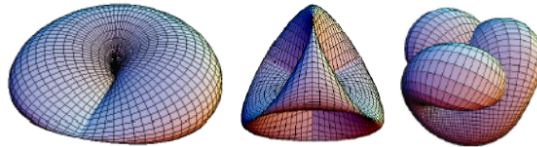
$$\mathbb{R}P^1 \ni [x_0 : x_1] \mapsto [x_0 : x_1 : 0] \in \mathbb{R}P^2,$$

και ονομάζεται *ευθεία στο άπειρο* ως προς H_3 . (Προσδιορίστε τις ευθείες το άπειρο ως προς H_0 και H_1 !) Η παραπάνω εμβύθιση έχει υποκείμενη την εμβύθιση του ευκλείδειου επιπέδου $\mathbb{R}^2$ εντός του $\mathbb{R}^3$ ως το επίπεδο $x_2 = 0$. Όμως, το ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ μπορεί να εμβυθιστεί εντός του $\mathbb{R}^3$ και ως οποιοδήποτε επίπεδο

$$(3) \quad ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0, \quad |a| + |b| + |c| \neq 0,$$

που περνά από την αρχή. Τέτοιου είδους επίπεδα προκύπτουν από την δράση ενός στοιχείου της ορθογώνιας ομάδας $O(3)$ στο $\mathbb{R}^3$. Η εξίσωση (3) παριστάνει την εξίσωση της τυχούσας προβολικής ευθείας του $\mathbb{R}P^2$ και μας λέει επίσης ότι κάθε τέτοια προβολική ευθεία μπορεί να θεωρηθεί ως ευθεία στο άπειρο.

Το προβολικό επίπεδο είναι ένα συμπαγές σύνολο. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε διάφορες αναπαραστάσεις του προβολικού επιπέδου σαν συμπαγή επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.



Αναπαραστάσεις του προβολικού επιπέδου.

4.2. Ευθείες του $\mathbb{RP}^2$.

Πρόταση 4.1. Από κάθε δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{RP}^2$ περνά μοναδική ευθεία.

Απόδειξη. Έστω $[\mathbf{x}] = [x_0 : x_1 : x_2]$ και $[\mathbf{x}'] = [x'_0 : x'_1 : x'_2]$ διαφορετικά μεταξύ τους σημεία του $\mathbb{RP}^2$. Τούτο σημαίνει ότι τουλάχιστον μία από τις ελάχιστονες ορίζουσες

$$D_0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x'_1 & x'_2 \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x'_0 & x'_2 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x'_0 & x'_1 \end{vmatrix},$$

είναι διαφορετική του μηδενός. Τότε η ευθεία με εξίσωση

$$D_0 X_0 - D_1 X_1 + D_2 X_2 = 0,$$

περιέχει τα $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{x}']$. (Επιβεβαιώστε τον ισχυρισμό· παρατηρήστε ότι ουσιαστικά αποδείξαμε ότι δύο επίπεδα του $\mathbb{R}^3$ που περνούν από την αρχή τέμνονται σε μία ευθεία!) $\square$

Πόρισμα 4.2. Η ευθεία που περνά από τα $[\mathbf{x}]$ και $[\mathbf{x}']$ όπως παραπάνω δίνεται από τη σχέση

$$(4) \quad \begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ x_0 & x_1 & x_2 \\ x'_0 & x'_1 & x'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Παράδειγμα. Έστω τα σημεία $[1 : 0 : 2]$ και $[0 : 1 : 2]$ του $\mathbb{RP}^2$. Αν $aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$ είναι η ευθεία που τα περιέχει, τότε θα πρέπει να ικανοποιούνται οι σχέσεις

$$a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 2 = a + 2c = 0 \quad \text{και} \quad a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 2 = b + 2c = 0.$$

Προκύπτει ότι η ζητούμενη ευθεία είναι η $L : 2X_0 + 2X_1 - X_2 = 0$. Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (4) έχουμε πάλι

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2X_0 - 2X_1 + X_2 = 0.$$

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή και ως ιδιότητα πρόσπτωσης:

Πρόταση 4.3. (Πρόσπτωση) Δύο διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται πάντοτε σε ένα μοναδικό σημείο.

Απόδειξη. Έστω οι ευθείες

$$L_1 : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0,$$

$$L_2 : a'x_0 + b'x_1 + c'x_2 = 0.$$

Τα κοινά σημεία είναι οι λύσεις του παραπάνω συστήματος, το οποίο, επειδή τουλάχιστον μία από τις ελάχιστονες ορίζουσες

$$D_0 = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

είναι διαφορετική του μηδενός, έχει άπειρες λύσεις: αν λόγου χάρη $D_2 \neq 0$, τότε

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -c' & b' \end{vmatrix}}{D_2} \cdot x_2, \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ a' & -c' \end{vmatrix}}{D_2} \cdot x_2.$$

Προκύπτει το μοναδικό προβολικό σημείο

$$\left[\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right],$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

Πρόταση 4.4. Τρία σημεία $[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1 : a_2]$, $[\mathbf{B}] = [b_0 : b_1 : b_2]$ και $[\mathbf{C}] = [c_0 : c_1 : c_2]$ του προβολικού επιπέδου είναι συνευθειακά αν και μόνο αν

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Απόδειξη. Η ευθεία που ορίζουν τα $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$ δίνεται από την

$$\begin{vmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

Σημειώνουμε εδώ ότι τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{R}P^2$ σχηματίζουν *τρικόρυφο*. Ο όρος τρίγωνο που χρησιμοποιείται παρακάτω είναι καταχρηστικός. Και τούτο διότι, ενώ μπορεί να οριστεί η γωνία μεταξύ δύο προβολικών ευθειών ως η διέδρη γωνία των αντίστοιχων ευκλείδειων επιπέδων, ο ορισμός αυτός δεν είναι προβολική αναλλοίωτος, δηλαδή, δεν διατηρείται από τους προβολικούς μετασχηματισμούς.

4.3. Δυϊσμός. Έστω η ευθεία L του $\mathbb{R}P^2$ με εξίσωση

$$ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0.$$

Το $\mathbf{A} = (a, b, c)$ είναι το διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ κάθετο στο ευκλείδειο επίπεδο που ορίζει την L και συνεπώς είναι μή μηδενικό. Το προβολικό σημείο $[\mathbf{A}] = [a : b : c]$ λέγεται *δυϊκό σημείο της προβολικής ευθείας L* .

Αντιστρόφως, αν $[\mathbf{A}] = [a : b : c] \in \mathbb{R}P^2$, τότε η ευθεία L με εξίσωση $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ καλείται *δυϊκή ευθεία του $[\mathbf{A}]$* .

Συμπεραίνουμε ότι στο προβολικό επίπεδο υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία σημείων και ευθειών, κάτι που εμφανώς δεν ισχύει στην Ευκλείδεια Επιπεδομετρία. Ο δυϊσμός προέρχεται από την αντιστοίχιση επιπέδων από την αρχή και κατευθύνσεων στο $\mathbb{R}^3$. Επιπρόσθετα, μπορούμε να γράφουμε την εξίσωση μίας ευθείας L ως $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$. Δείτε τώρα ότι από την Πρόταση 4.3 προκύπτει αμέσως ότι το σημείο τομής των ευθειών $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ είναι ακριβώς το $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Λέμε τότε ότι η ευθεία από τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{A}']$ έχει *δυϊκές συντεταγμένες $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$* . Δυϊκά, οι ευθείες $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ τέμνονται στο $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$.

Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη

Αρχή δυϊσμού: Η ισχύς μιας πρότασης της γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου που αναφέρεται σε σημεία και ευθείες παραμένει αναλλοίωτη αν εναλλάξουμε τα σημεία με ευθείες και τις ευθείες με σημεία.

Λόγου χάρι είδαμε ότι δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές προβολικές ευθείες τέμνονται (συντρέχουν) σε ένα μοναδικό σημείο. Η δυϊκή πρόταση είναι:

Πρόταση 4.5. Δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία συντρέχουν σε μοναδική ευθεία.

Εφαρμογή. Οι κορυφές του τριγώνου που ορίζουν οι ευθείες

$$[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0, \quad [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} = 0, \quad [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

είναι τα σημεία

$$[\mathbf{A} \times \mathbf{B}], \quad [\mathbf{B} \times \mathbf{C}], \quad [\mathbf{C} \times \mathbf{A}].$$

4.4. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας του $\mathbb{RP}^2$. Θεωρούμε την ομάδα $P(2) = \text{GL}(3, \mathbb{R})$ η οποία δρα στο $\mathbb{RP}^2$ ως εξής:

$$\text{GL}(3, \mathbb{R}) \times \mathbb{RP}^2 \ni (A, [\mathbf{x}]) \mapsto [\mathbf{x}A] \in \mathbb{RP}^2.$$

Η δράση είναι καλώς ορισμένη ακριβώς επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Η γεωμετρία του προβολικού επιπέδου (κατά Klein) είναι το ζεύγος $(\mathbb{RP}^2, P(2))$. Η παρακάτω πρόταση είναι ανάλογη της Πρότασης 3.1 και συνιστά το Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας του Προβολικού Επιπέδου:

Πρόταση 4.6. Έστω $[\mathbf{A}], [\mathbf{B}], [\mathbf{C}], [\mathbf{D}]$ και $[\mathbf{A}'], [\mathbf{B}'], [\mathbf{C}'], [\mathbf{D}]'$ τετράδες μη συνευθειακών ανά τριών σημείων του $\mathbb{RP}^2$. Τότε υπάρχει μοναδικό $M \in P(2)$ με

$$M([\mathbf{A}]) = [\mathbf{A}'], \quad M([\mathbf{B}]) = [\mathbf{B}'], \quad M([\mathbf{C}]) = [\mathbf{C}'], \quad M([\mathbf{D}]) = [\mathbf{D}'].$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παραπλήσια της απόδειξης της Πρότασης 3.1. Έστω τα σημεία $[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$ και $[1 : 1 : 1]$. Έστω επίσης ότι

$$[\mathbf{A}] = [a_0 : a_1 : a_2], \quad [\mathbf{B}] = [b_0 : b_1 : b_2], \quad [\mathbf{C}] = [c_0 : c_1 : c_2], \quad \mathbf{D} = [d_0 : d_1 : d_2].$$

Για $\lambda, \mu, \nu \neq 0$, ο πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} \lambda a_0 & \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \mu b_0 & \mu b_1 & \mu b_2 \\ \nu c_0 & \nu c_1 & \nu c_2 \end{pmatrix} \in P(2)$$

εφόσον $[\mathbf{A}] \neq [\mathbf{B}]$ και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} N([1 : 0 : 0]) &= [\mathbf{A}], & N([0 : 1 : 0]) &= [\mathbf{B}], \\ N([0 : 0 : 1]) &= [\mathbf{C}], & N([1 : 1 : 1]) &= [\lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{C}]. \end{aligned}$$

Τα $\mathbf{A}, \mathbf{B}, [\mathbf{C}]$ σχηματίζουν μία βάση του $\mathbb{R}^3$, άρα υπάρχουν μοναδικά λ, μ, ν ώστε

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B} + \nu \mathbf{C}$$

για κάποια λ, μ, ν όλα διαφορετικά του μηδενός. (Το ότι τα σημεία υποτέθηκαν ανά τρία μη συνευθειακά, χρειάζεται ακριβώς εδώ). Τότε

$$N([1 : 1 : 1]) = [\mathbf{D}].$$

Αναλόγως, βρίσκουμε $N' \in P(2)$ με

$$N'([1 : 0 : 0]) = [\mathbf{A}'], \quad N'([0 : 1 : 0]) = [\mathbf{B}'], \quad N'([0 : 0 : 1]) = [\mathbf{C}'], \quad N'([1 : 1 : 1]) = [\mathbf{D}'].$$

Ο μετασχηματισμός $M = N'N^{-1}$ είναι ο ζητούμενος. Συμπληρώστε από το σημείο αυτό την απόδειξη. $\square$

Παράδειγμα. Για να βρούμε τον προβολικό μετασχηματισμό κατά τον οποίον

$$\begin{aligned} [1 : 0 : 0] &\mapsto [0 : 0 : 1], \\ [0 : 1 : 0] &\mapsto [0 : 1 : 1], \\ [0 : 0 : 1] &\mapsto [1 : 1 : 1], \\ [1 : 1 : 1] &\mapsto [3 : 2 : 4], \end{aligned}$$

έστω $\lambda, \mu, \nu \neq 0$ και

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & \mu \\ \nu & \nu & \nu \end{pmatrix}.$$

Τότε από τη σχέση

$$[1 : 1 : 1]M = [\nu : \mu + \nu : \lambda + \mu + \nu] = [3 : 2 : 4]$$

έχουμε $\lambda = 2, \mu = -1, \nu = 3$.

4.5. Ιδιότητες των προβολικών μετασχηματισμών. Οι παρακάτω προτάσεις περιγράφουν ορισμένες από τις ιδιότητες της $P(2)$. Η πρώτη είναι άμεσο πόρισμα της Πρότασης 4.6:

Πρόταση 4.7. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει τρίγωνα σε τρίγωνα και τετράπλευρα σε τετράπλευρα. Κατά συνέπεια, όλα τα τρίγωνα καθώς και όλα τα τετράπλευρα είναι προβολικά ισοδύναμα.³

Πρόταση 4.8. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει ευθείες σε ευθείες.

Απόδειξη. Η απόδειξη ουσιαστικά θα μπορούσε να συμπυκνωθεί στην πρόταση: κάθε στοιχείο της $GL(3, \mathbb{R})$ απεικονίζει επίπεδα από την αρχή του $\mathbb{R}^3$ σε επίπεδα από την αρχή. Αναλυτικά, έστω ευθεία L με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και μετασχηματισμός $M \in P(2)$. Θέτουμε για $[\mathbf{X}] \in L$ $\mathbf{X}' = \mathbf{X}M$ και τότε $\mathbf{X}' = \mathbf{X}M \implies \mathbf{X}'M^{-1} = \mathbf{X}$. Έτσι

$$0 = [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = [\mathbf{A}] \cdot (\mathbf{X}'M^{-1}) = [\mathbf{A}(M^T)^{-1}] \cdot \mathbf{X}'.$$

Με άλλα λόγια, η εικόνα της $L : [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ είναι η $L' : [\mathbf{A}(M^T)^{-1}] \cdot \mathbf{X} = 0$. □

Παράδειγμα. Έστω η ευθεία L με εξίσωση

$$[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 2x_0 + x_1 - 3x_2 = 0$$

και ο μετασχηματισμός

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P(2).$$

Ο αντίστροφος του M είναι ο

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -1/3 \\ -7/3 & 1 & -2/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \in P(2).$$

³Υπενθυμίζουμε ξανά ότι η σωστή ορολογία είναι τριχόρυφα ή τρίπλευρα (τα δυϊκά τους) και τετρακόρυφα ή τετράπλευρα (τα δυϊκά τους).

Οπότε η δυϊκή συντεταγμένη της $L' = M(L)$ είναι

$$[\mathbf{A}(M^T)^{-1}] = [5 : -5 : 1]$$

και έτσι η L' έχει εξίσωση $5x_0 - 5x_1 + x_2 = 0$.

Πρόταση 4.9. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ απεικονίζει συνευθειακά σημεία σε συνευθειακά σημεία.

Απόδειξη. Κάθε δύο σημεία ανήκουν σε μία ευθεία, η οποία μέσω στοιχείου της $P(2)$ απεικονίζεται σε ευθεία λόγω της Πρότασης 4.8. $\square$

Πρόταση 4.10. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ διατηρεί την πρόπτωση: απεικονίζει το σημείο τομής ευθειών στην τομή των εικόνων τους.

Απόδειξη. Έστω οι ευθείες L με εξίσωση $[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} = 0$ και L' με εξίσωση $[\mathbf{A}'] \cdot \mathbf{X} = 0$ και έστω ότι τέμνονται στο $[\mathbf{A} \times \mathbf{A}']$. Αν $M \in P(2)$ τότε το σημείο $M([\mathbf{A} \times \mathbf{A}'])$ θα ανήκει στην τομή $M(L) \cap M(L')$ η οποία συνίσταται από μοναδικό σημείο. $\square$

Ο διπλός λόγος $(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D})$ τεσσάρων συνευθειακών σημείων τέτοιων ώστε οποιαδήποτε τρία από αυτά δεν είναι ίσα, ορίζεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της $\mathbb{R}P^1$. Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι οι ανάλογες των Προτάσεων 3.2 και 3.3, αντίστοιχα, και αποδεικνύονται επίσης με τον ίδιο τρόπο μετά τις κατάλληλες τροποποιήσεις.

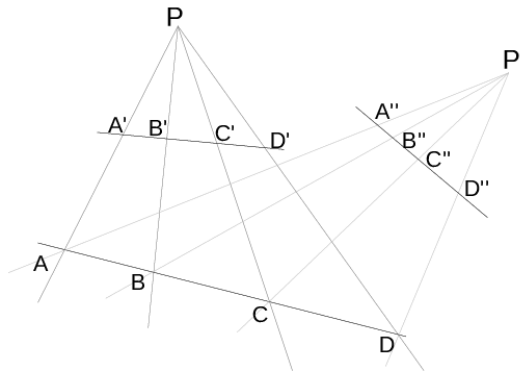
Πρόταση 4.11. Κάθε στοιχείο της $P(2)$ διατηρεί τον διπλό λόγο τεσσάρων συνευθειακών και διαφορετικών ανά δύο σημείων του $\mathbb{R}P^2$.

Για την απόδειξη, χρησιμοποιήστε το τετράπλευρο αναφοράς με κορυφές

$$[1 : 0 : 0], \quad [0 : 1 : 0], \quad [0 : 0 : 1], \quad [1 : 1 : 1].$$

Πρόταση 4.12. Υπάρχει $M \in P(2)$ που απεικονίζει τέσσερα συνευθειακά, διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ στα τέσσερα συνευθειακά, διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο σημεία $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$, $[\mathbf{D}']$, αντίστοιχα, αν και μόνο αν

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}').$$



Ο διπλός λόγος είναι προβολική αναλλοίωτος.

Εφαρμογή. Τέσσερα οποιαδήποτε ανά τρία μη συνευθειακά σημεία του $\mathbb{RP}^2$ ορίζουν ένα τετράπλευρο (ή, πιά σωστά, τετρακόρυφο). Σύμφωνα με την Πρόταση 4.6 μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι οι κορυφές είναι οι

$$[\mathbf{A}_1] = [1 : 0 : 0], \quad [\mathbf{A}_2] = [0 : 1 : 0], \quad [\mathbf{A}_3] = [0 : 0 : 1], \quad [\mathbf{A}_4] = [1 : 1 : 1].$$

Ορίζονται έξι ευθείες:

- η ευθεία L_{12} από τα $[\mathbf{A}_1]$ και $[\mathbf{A}_2]$ με τύπο

$$[\mathbf{A}_3] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{13} από τα $[\mathbf{A}_1]$ και $[\mathbf{A}_3]$ με τύπο

$$[\mathbf{A}_2] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{14} από τα $[\mathbf{A}_1]$ και $[\mathbf{A}_4]$ με τύπο

$$[0 : -1 : 1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{23} από τα $[\mathbf{A}_2]$ και $[\mathbf{A}_3]$ με τύπο

$$[\mathbf{A}_1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{24} από τα $[\mathbf{A}_2]$ και $[\mathbf{A}_4]$ με τύπο

$$[1 : 0 : -1] \cdot \mathbf{X} = 0,$$

- η ευθεία L_{34} από τα $[\mathbf{A}_3]$ και $[\mathbf{A}_4]$ με τύπο

$$[-1 : 1 : 0] \cdot \mathbf{X} = 0.$$

Τα διαγώνια σημεία του τετραπλεύρου είναι τα

- $L_{13} \cap L_{24} = \{[\mathbf{D}_1] = [1 : 0 : 1]\},$
- $L_{12} \cap L_{34} = \{[\mathbf{D}_2] = [1 : 1 : 0]\},$
- $L_{23} \cap L_{14} = \{[\mathbf{D}_3] = [0 : 1 : 1]\}.$

Η ευθεία από τα $[\mathbf{D}_1]$ και $[\mathbf{D}_3]$ είναι η

$$[-1 : -1 : 1]\mathbf{X} = 0$$

και τέμνει την L_{12} στο

$$[\mathbf{A}'_1] = [-1 : 1 : 0].$$

Υπολογίζουμε τον διπλό λόγο $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_1, \mathbf{D}_2)$: είναι

$$\mathbf{A}'_1 = (-1) \cdot \mathbf{A}_1 + 1 \cdot \mathbf{A}_2 = 1 \cdot \mathbf{A}_1 + 1 \cdot \mathbf{A}_2$$

και συνεπώς $(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2; \mathbf{A}'_1, \mathbf{D}_2) = -1$. Όταν ο διπλός λόγος τεσσάρων σημείων είναι ίσος με -1 , λέμε ότι τα σημεία είναι σε αρμονική θέση.

Πρόταση 4.13. Η δράση κάθε στοιχείου της $P(2)$ αφήνει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο $\mathbb{RP}^2$.

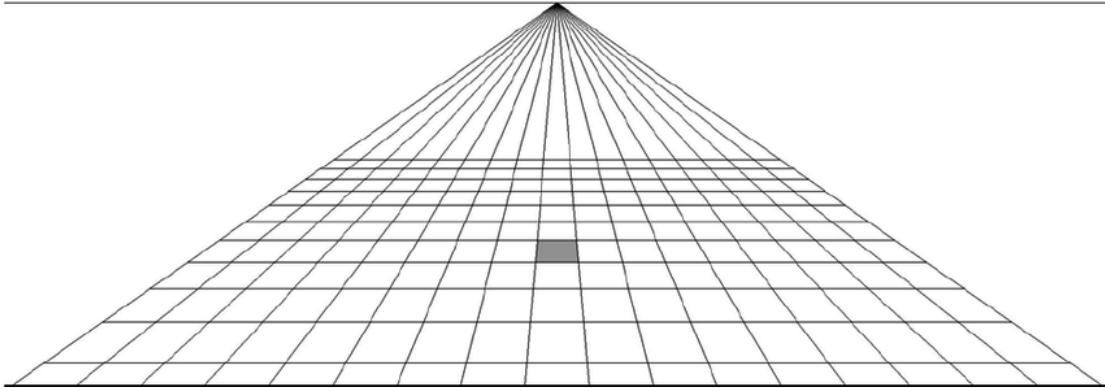
Απόδειξη. Αν $M \in P(2)$, το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο p_M είναι τρίτου βαθμού άρα έχει είτε μία είτε τρεις πραγματικές ιδιοτιμές. Αν λ είναι μία τέτοια ιδιοτιμή και $\mathbf{A}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιανυσμά της, τότε $[\mathbf{A}M] = [\lambda\mathbf{A}]$. $\square$

Άσκηση. Έστω

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (1) Δείξτε ότι $M \in P(2)$.
 (2) Βρείτε τα σταθερά του σημεία.

4.6. Διπλοί λόγοι και δυϊσμός. Αρχίζουμε με κάποια ορολογία. Μία συλλογή σημείων Σ του $\mathbb{RP}^2$ θα καλείται *σημειοσειρά*. Αν η Σ βρίσκεται επάνω σε μία ευθεία L , τότε η L θα καλείται *άξονας* της σημειοσειράς Σ . Το δυϊκό σύνολο P της σημειοσειράς Σ θα καλείται *δέσμη* ευθειών ομόλογη με την Σ . Αν η Σ έχει άξονα $L : [\mathbf{O}] \cdot \mathbf{X} = 0$, τότε όλες οι ευθείες της δέσμης P περνούν από το $[\mathbf{O}]$, η P καλείται *κεντρική δέσμη* και το $[\mathbf{O}]$ καλείται *κορυφή* της P .



Κεντρική δέσμη ευθειών με εγκάρσιες σε αυτήν ευθείες.

Σε μία κεντρική δέσμη μπορεί να οριστεί ο διπλός λόγος κάθε τεσσάρων ευθειών της δέσμης. Κι αυτό, διότι τα αντίστοιχα δυϊκά σημεία κάθε μίας από αυτές ανήκουν στον άξονα L . (Με άλλα λόγια, τέσσερις ευθείες ανήκουν σε κεντρική δέσμη, δηλαδή συντρέχουν, αν και μόνο αν τα αντίστοιχα δυϊκά τους σημεία είναι συνευθειακά.)

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να δείξουμε ότι οι ευθείες με εξισώσεις

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}] \cdot \mathbf{X} &= [1 : 1 : 2] \cdot \mathbf{X} = 0, & [\mathbf{B}] \cdot \mathbf{X} &= [3 : -1 : 4] \cdot \mathbf{X} = 0, \\ [\mathbf{C}] \cdot \mathbf{X} &= [5 : 1 : 8] \cdot \mathbf{X} = 0, & [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{X} &= [2 : 0 : 3] \cdot \mathbf{X} = 0, \end{aligned}$$

συντρέχουν. Παίρνουμε δύο οποιαδήποτε δυϊκά σημεία έστω τα $[\mathbf{A}]$ και $[\mathbf{B}]$. Η ευθεία που περνά από αυτά είναι η

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 6x_0 + 2x_1 - 4x_2,$$

δηλαδή η $L : [3 : 1 : -2] \cdot \mathbf{X} = 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$[3 : 1 : -2] \cdot (5, 1, 8) = [3 : 1 : -2] \cdot (2, 0, 3) = 0$$

και άρα όλα τα σημεία ανήκουν στην L . Συμπεραίνουμε ότι οι δοθείσες ευθείες συντρέχουν. Το κοινό σημείο των ευθειών είναι το $[\mathbf{O}] = [3 : 1 : -2]$ που είναι και η κορυφή της δέσμης.

Υπολογίζουμε τώρα τον διπλό τους λόγο. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{C} = 2 \cdot \mathbf{A} + 1 \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{D} = (1/2) \cdot \mathbf{A} + (1/2)\dot{\mathbf{B}},$$

άρα

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}) = 1/2.$$

Κάθε ευθεία που δεν περνά από την κορυφή κεντρικής δέσμης P τεσσάρων ευθειών με άξονα L καλείται εγκάρσια ευθεία στην P και θα συναντά την P σε τέσσερα συνευθειακά σημεία. Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή και ως Θεμελιώδες Θεώρημα των Διπλών Λόγων.

Πρόταση 4.14. Τα τέσσερα συνευθειακά σημεία που προσδιορίζονται από εγκάρσια ευθεία κεντρικής δέσμης τεσσάρων ευθειών έχουν διπλό λόγο ίσο με τον διπλό λόγο της δέσμης.

Απόδειξη. Έστω ότι οι ευθείες της δέσμης έχουν δυϊκά σημεία $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ και έστω $\mathbf{C} = p\mathbf{A} + q\mathbf{B}$, $\mathbf{D} = r\mathbf{A} + s\mathbf{B}$. Έστω επίσης $L : [\mathbf{T}] \cdot \mathbf{X} = 0$ η εγκάρσια ευθεία στη δέσμη. Τα σημεία τομής της L με τις ευθείες της δέσμης είναι τα

$$[\mathbf{T} \times \mathbf{A}], \quad [\mathbf{T} \times \mathbf{B}], \quad [\mathbf{T} \times \mathbf{C}], \quad [\mathbf{T} \times \mathbf{D}].$$

Τώρα

$$\mathbf{T} \times \mathbf{C} = p(\mathbf{T} \times \mathbf{A}) + q(\mathbf{T} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{T} \times \mathbf{D} = r(\mathbf{T} \times \mathbf{A}) + s(\mathbf{T} \times \mathbf{B})$$

και συνεπώς

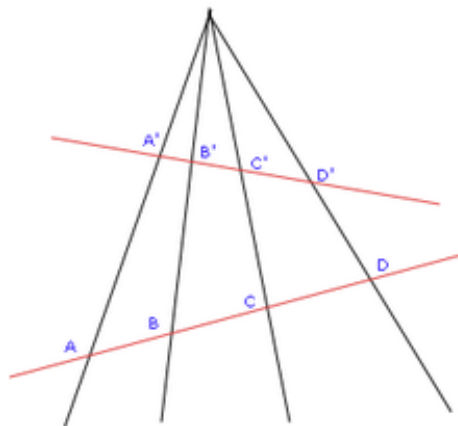
$$(\mathbf{T} \times \mathbf{A}, \mathbf{T} \times \mathbf{B}; \mathbf{T} \times \mathbf{C}, \mathbf{T} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}).$$

□

Πόρισμα 4.15. Έστω ευθείες L και L' εγκάρσιες σε κεντρική δέσμη τεσσάρων ευθειών που τέμνουν τις ευθείες της δέσμης στα $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ και $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$, $[\mathbf{D}']$, αντίστοιχα. Τότε

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}; \mathbf{C}, \mathbf{D}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}'; \mathbf{C}', \mathbf{D}').$$

Όπως θα δούμε και στην επόμενη ενότητα, λέμε ότι τα σημεία $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{D}]$ και $[\mathbf{A}']$, $[\mathbf{B}']$, $[\mathbf{C}']$, $[\mathbf{D}']$, βρίσκονται σε θέση προοπτικής από την κορυφή $[\mathbf{O}]$ της δέσμης.



Σημεία σε θέση προοπτικής.

Η παρακάτω πρόταση αποτελεί μερικό αντίστροφο του Πορίσματος 4.15.

Πρόταση 4.16. Έστω L και L' ευθείες που τέμνονται στο $[P]$. Αν $[A]$, $[B]$, $[C]$, και $[A']$, $[B']$, $[C']$, είναι τριάδες σημείων στην L και την L' , αντίστοιχα, με

$$(P, A; B, C) = (P, A'; B', C'),$$

τότε τα $[A]$, $[B]$, $[C]$ και $[A']$, $[B']$, $[C']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από κάποιο σημείο $[O]$.

Απόδειξη. Είναι αρκετό να δείξουμε ότι οι ευθείες από τα $[A]$ και $[A']$, $[B]$ και $[B']$, $[C]$ και $[C']$, συντρέχουν. Οι ευθείες από τα $[A]$ και $[A']$, $[B]$ και $[B']$ τέμνονται σε κάποιο σημείο $[O]$. Η ευθεία από τα $[O]$, $[C]$ τέμνει την L' σε κάποιο $[C'']$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $[C'] = [C'']$. Αφού τα $[P]$, $[A]$, $[B]$, $[C]$, και $[P]$, $[A']$, $[B']$, $[C'']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[O]$, έχουμε ότι $(P, A; B, C) = (P, A'; B', C'')$. Όμως τότε από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι

$$(P, A'; B', C') = (P, A'; B', C'') \implies [C'] = [C''],$$

από το Θεώρημα των Τεσσάρων Σημείων (Πρόταση 3.4). $\square$

Εφαρμογή. Έστω $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[X]$ σημεία ευθείας L και $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[X']$ σημεία ευθείας L' τέτοια ώστε τα σημεία τομής

- (1) $[P']$ των ευθειών από τα $[A]$, $[B']$ και από τα $[B]$, $[A']$,
- (2) $[P'']$ των ευθειών από τα $[A]$, $[C']$ και από τα $[C]$, $[A']$,
- (3) $[P''']$ των ευθειών από τα $[A]$, $[X']$ και από τα $[X]$, $[A']$,

να είναι συνευθειακά. Τότε θα δείξουμε ότι

$$(A, B; C, X) = (A', B'; C', X').$$

Πράγματι, έχουμε κατ' αρχάς ότι τα $[P']$, $[P'']$ και $[P''']$ είναι συνευθειακά και έστω L'' η ευθεία που τα περιέχει. Έστω $[A'']$ το σημείο τομής της L'' και της ευθείας από τα $[A]$ και $[A']$. Τότε τα $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[X]$ και $[A'']$, $[P']$, $[P'']$ και $[P''']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[A']$. Συνεπώς

$$(A, B; C, X) = (A'', P'; P'', P''').$$

Από την άλλη, τα $[A']$, $[B']$, $[C']$, $[X']$ και $[A'']$, $[P']$, $[P'']$ και $[P''']$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής από το $[A]$. Συνεπώς

$$(A', B'; C', X') = (A'', P'; P'', P''')$$

και έπεται το ζητούμενο.

4.7. Προβολική και προοπτική θέση. Έστω σημειοσειρές

$$\Sigma = ([A_1], \dots, [A_m]) \quad \text{και} \quad \Sigma' = ([B_1], \dots, [B_m]).$$

Θα λέμε ότι οι Σ , Σ' είναι σε θέση προβολής και θα γράφουμε

$$\Sigma \wedge \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([A_1], \dots, [A_m]) \wedge ([B_1], \dots, [B_m]),$$

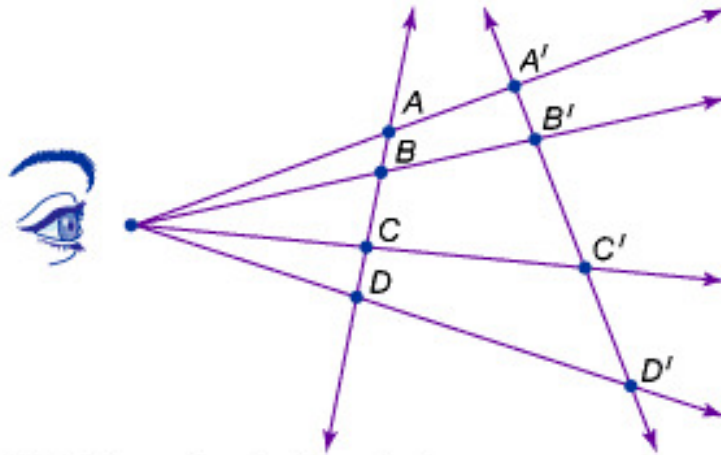
αν υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός (προβολική απεικόνιση) δια της οποίας $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$, $i = 1, \dots, m$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση $m = 4$. Έστω τετράδες συνευθειακών σημείων (διαφορετικών μεταξύ τους ανά δύο)

$$\Sigma = ([A_1], [A_2], [A_3], [A_4]), \quad \Sigma' = ([B_1], [B_2], [B_3], [B_4]).$$

Θα λέμε ότι οι Σ, Σ' είναι σε θέση προβολής,

$$\Sigma \wedge \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([A_1], [A_2], [A_3], [A_4]) \wedge ([B_1], [B_2], [B_3], [B_4]),$$

αν $(A_1, A_2; A_3, A_4) = (B_1, B_2; B_3, B_4)$. Αυτό είναι λογικό λόγω της Πρότασης 4.12. Μία ειδική περίπτωση τέτοιας προβολικής απεικόνισης είναι η *προοπτική απεικόνιση* από κάποιο σημείο $[O]$. Δηλαδή όταν οι τετράδες σημείων βρίσκονται επάνω σε ευθείες εγκάρσιες σε κεντρική δέσμη με κορυφή το $[O]$.



© 2002 Encyclopædia Britannica, Inc.

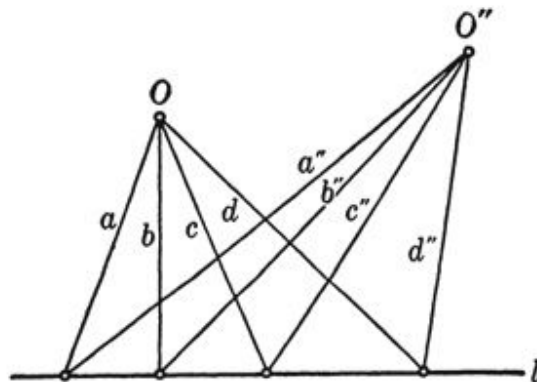
Σημεία σε θέση προοπτικής.

Γράφουμε τότε

$$\Sigma \wedge^{[O]} \Sigma', \quad \text{ή} \quad ([A_1], [A_2], [A_3], [A_4]) \wedge^{[O]} ([B_1], [B_2], [B_3], [B_4]).$$

και λέμε επίσης ότι οι Σ, Σ' βρίσκονται σε θέση προοπτικής.

Μία θέση προοπτικής (ανάμεσα σε δύο τετράδες σημείων) είναι πάντοτε θέση προβολής. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε (γιατί; δείτε το σχήμα!).



Θα δούμε όμως παρακάτω ότι υπάρχει άμεση σχέση των θέσεων προβολής και προοπτικής.

Έστω τριάδες σημείων $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$ που κείνται σε ευθείες L και L' αντίστοιχα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Οι τριάδες βρίσκονται σε θέση προοπτικής από σημείο $[O]$. Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες από τα $[A_1]$, $[B_1]$, από τα $[A_2]$, $[B_2]$ και από τα $[A_3]$, $[B_3]$, συντρέχουν στο $[O]$. Υποθέτουμε ότι μας δίνεται σημείο $[A]$ στην ευθεία L . Τότε η ευθεία από τα $[O]$ και $[A]$ καθορίζει σημείο $[B]$ επάνω στην L' και επίσης

$$([A_1], [A_2], [A_3], [A]) \wedge^{[O]} ([B_1], [B_2], [B_3], [B]).$$

(Παρατηρήστε ότι εάν μας δινόταν σημείο $[B]$ της L' τότε καθορίζεται μοναδικά σημείο $[A]$ επάνω στην L .)

Οι τριάδες δεν βρίσκονται σε θέση προοπτικής. Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες από τα $[A_1]$, $[B_1]$ και από τα $[A_2]$, $[B_2]$ συντρέχουν στο $[O]$ αλλά οι ευθείες από τα $[A_1]$, $[B_1]$ και από τα $[A_3]$, $[B_3]$ συντρέχουν σε σημείο $[O'] \neq [O]$. Υποθέτουμε και πάλι ότι μας δίνεται σημείο $[A]$ στην ευθεία L . Τότε,

- η ευθεία από τα $[O]$, $[O']$, τέμνει την ευθεία από τα $[A_3]$, $[B_2]$ σε σημείο $[X]$,
- η ευθεία από τα $[O]$, $[A]$, τέμνει την ευθεία από τα $[A_3]$, $[B_2]$ σε σημείο $[Y]$,
- η ευθεία από τα $[O']$, $[A]$, τέμνει την ευθεία L' σε σημείο $[B]$.

Τότε

$$([A_1], [A_2], [A_3], [A]) \wedge^{[O]} ([X], [B_2], [A_3], [Y]) \wedge^{[O']} ([B_1], [B_2], [B_3], [B]).$$

Αποδείξαμε λοιπόν την

Πρόταση 4.17. Κάθε απεικόνιση προβολής μεταξύ δύο ευθειών είναι είτε απεικόνιση προοπτικής είτε σύνθεση δύο απεικονίσεων προοπτικής.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο ελέγχου του πότε μία απεικόνιση προβολής είναι απεικόνιση προοπτικής.

Πρόταση 4.18. Έστω ευθείες L και L' που τέμνονται στο $[P]$. Τότε μία απεικόνιση προβολής μεταξύ δύο σημειοσειρών των L και L' αντίστοιχα είναι απεικόνιση προοπτικής αν και μόνο αν το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του υπό μία απεικόνιση προοπτικής. Για το αντίστροφο, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της προηγούμενης πρότασης στην κατασκευή των δύο απεικονίσεων προοπτικής. Έστω ότι η ευθεία από τα $[O]$, $[P]$ τέμνει την ευθεία από τα $[A_3]$, $[B_2]$ σε σημείο $[X']$. Εφόσον το $[P]$ απεικονίζεται στον εαυτό του, το $[O']$ πρέπει να κείται στην ευθεία από τα $[O]$, $[X']$. Αλλά τα $[O]$, $[O']$ κείνται επίσης στην (διαφορετική) ευθεία από τα $[A_1]$, $[B_1]$. Συνεπώς τα $[O]$ και $[O']$ ταυτίζονται και η θέση προβολής είναι θέση προοπτικής από το $[O]$. $\square$

Εφαρμογή. Θεωρώντας ότι το δυϊκό σύνολο μιας σημειοσειράς επάνω σε μία ευθεία είναι η κεντρική δέσμη που ορίζει και ότι μία απεικόνιση προβολής ανάμεσα σε δύο δέσμες ευθειών είναι μία αντιστοιχία που διατηρεί τους διπλούς λόγους, διατυπώνουμε τις δυϊκές των προτάσεων της ενότητας αυτής.

- Δύο δέσμες Σ και Σ' είναι σε θέση προοπτικής από μία ευθεία L αν κάθε ευθεία ℓ της Σ τέμνει την αντίστοιχη ευθεία ℓ' της Σ' επάνω στην L .
- Μία προβολική απεικόνιση μεταξύ δύο δεσμών είναι είτε προοπτική απεικόνιση είτε σύνθεση δύο προοπτικών απεικονίσεων.

- Μία προβολική απεικόνιση είναι προοπτική απεικόνιση αν και μόνο αν η ευθεία που ενώνει τις κορυφές των δύο δεσμών απεικονίζεται στον εαυτό της.

5. ΚΛΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΠΡΟΒΟΛΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

5.1. Θεώρημα Πάππου. Έστω ότι η σημειοσειρά συνευθειακών σημείων $\Sigma = ([A_i])$ σχετίζεται προβολικά με τη σημειοσειρά συνευθειακών σημείων $\Sigma' = ([B_i])$, $i = 1, \dots, n$, ώστε $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$. Σταθεροποιούμε ένα i . Τότε η δέσμη ευθειών από το $[A_i]$ προς όλα τα $[B_j]$ και η δέσμη ευθειών από το $[B_i]$ προς όλα τα $[A_j]$ είναι σε θέση προβολής:

$$([A_i], [B_j]) \wedge^{[B_i]} ([A_j], [B_j]) \wedge^{[A_i]} ([B_i], [A_j]).$$

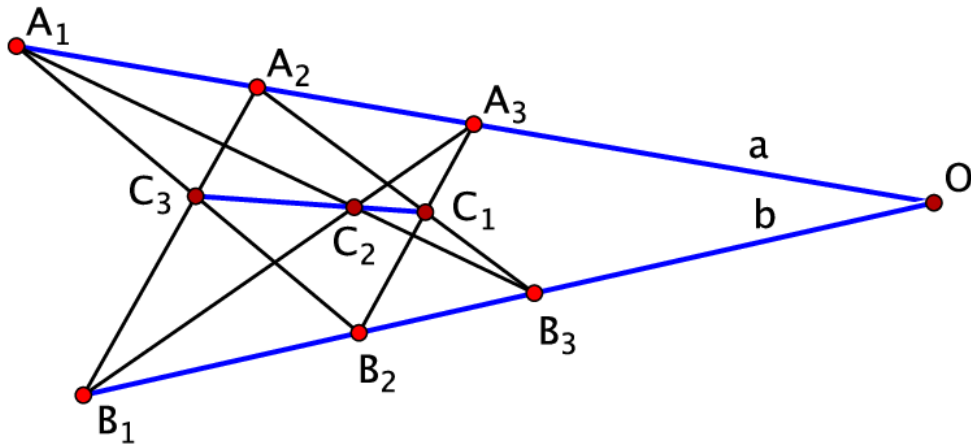
Η ευθεία $L_{i,i}$ από τα $[A_i]$, $[B_i]$ απεικονίζεται στον εαυτό της και άρα η απεικόνιση αυτή είναι μία απεικόνιση προοπτικής από μία ευθεία C_i . Εναλλάσσοντας τα i, j βλέπουμε ότι η ευθεία αυτή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του i . Η $C = C_i$ καλείται ευθεία του Πάππου της απεικόνισης προβολής και έχει την εξής ιδιότητα:

- Για κάθε $i \neq j$, η τομή των ευθειών $L_{i,j}$ και $L_{j,i}$ ανήκει στην C .

Θεώρημα 5.1. (Πάππου.) Έστω $[A_1], [A_2], [A_3]$ και $[B_1], [B_2], [B_3]$, τριάδες συνευθειακών σημείων που κείνται σε διαφορετικές ευθείες. Για $i, j = 1, 2, 3$ έστω $L_{i,j}$ η ευθεία από τα $[A_i], [B_j]$ και έστω ότι:

- $[C_1] = L_{2,3} \cap L_{3,2}$,
- $[C_2] = L_{1,3} \cap L_{3,1}$,
- $[C_3] = L_{1,2} \cap L_{2,1}$.

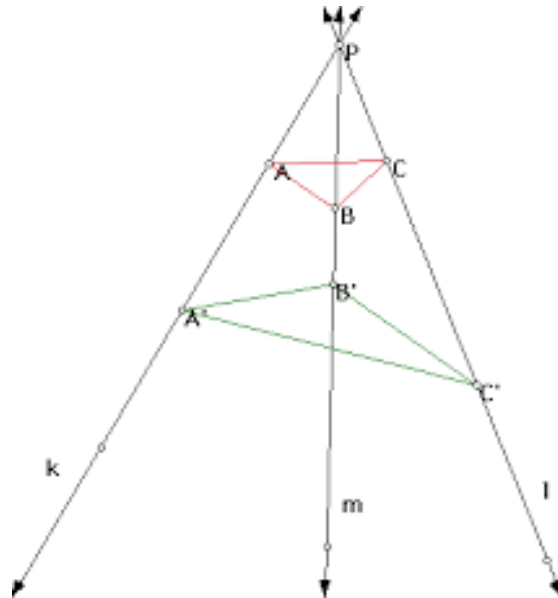
Τότε τα $[C_1], [C_2], [C_3]$, είναι συνευθειακά.



Το Θεώρημα του Πάππου.

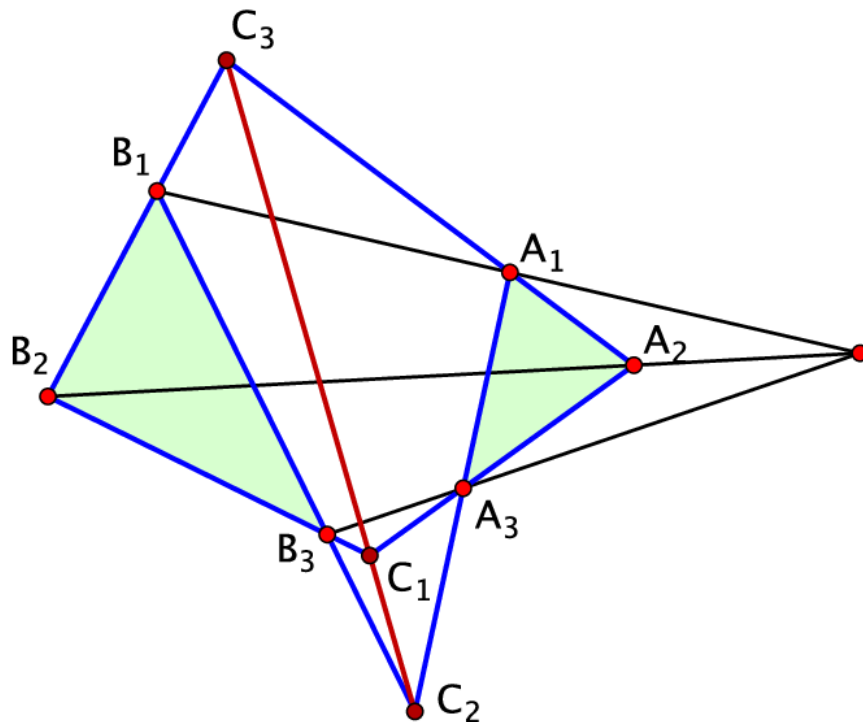
Απόδειξη. Μία προβολική απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από τρία ζεύγη αντίστοιχων σημείων· στην περίπτωση μας η αντιστοιχία είναι $[A_i] \leftrightarrow [B_i]$, $i = 1, 2, 3$. Τα σημεία $[C_1], [C_2], [C_3]$ κείνται στην ευθεία του Πάππου C της απεικόνισης προβολής. $\square$

5.2. **Θεώρημα Desargues.** Το Θεώρημα Desargues αφορά τρίγωνα του $\mathbb{R}P^2$ τα οποία βρίσκονται σε θέση προοπτικής: οι ευθείες που ορίζουν οι αντίστοιχες κορυφές τους συντρέχουν.



Τρίγωνα σε προοπτική θέση.

Θεώρημα 5.2. Εάν δύο τρίγωνα είναι σε θέση προοπτικής, τότε τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών είναι συνευθειακά.



Το Θεώρημα Desargues

Απόδειξη. Δείτε το παραπάνω σχήμα. Τα τρίγωνα με κορυφές $[A_1]$, $[A_2]$, $[A_3]$ και $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$ βρίσκονται σε θέση προοπτικής. Τα σημεία τομής των αντίστοιχων πλευρών είναι τα $[C_1]$, $[C_2]$, $[C_3]$ τα οποία και θα δείξουμε ότι είναι συνευθειακά. Αν $[P]$ είναι το σημείο στο οποίο συντρέχουν οι ευθείες που ορίζουν οι αντίστοιχες κορυφές, τότε εφόσον τα $[P]$, $[A_1]$ και $[B_1]$ είναι συνευθειακά, υπάρχουν $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_*$ με

$$P = \lambda A_1 + \lambda' B_1.$$

Επιλέγοντας αντιπροσώπους για τα $[A_1]$, $[B_1]$ τα λA_1 και $\lambda' B_1$, αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε

$$P = A_1 + B_1$$

και ομοίως θα έχουμε

$$P = A_2 + B_2,$$

$$P = A_3 + B_3.$$

Η ευθεία από τα $[A_1]$ και $[A_2]$ είναι η $[A_1 \times A_2] \cdot X = 0$ και η ευθεία από τα $[B_1]$ και $[B_2]$ είναι η $[B_1 \times B_2] \cdot X = 0$. Συνεπώς, το σημείο τομής τους είναι το

$$[(A_1 \times A_2) \times (B_1 \times B_2)].$$

Θέτουμε $C = B_1 \times B_2$ και έχουμε

$$(A_1 \times A_2) \times C = (A_1 \cdot C)A_2 - (A_2 \cdot C)A_1.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} A_1 \cdot C &= A_1 \cdot (B_1 \times B_2) \\ &= A_1 \cdot ((P - A_1) \times (P - A_2)) \\ &= (A_1 - P) \cdot (A_1 \times (P - A_2)) \\ &= -P \cdot (A_1 \times (P - A_2)) \\ &= A_1 \cdot (P \times (P - A_2)) \\ &= -A_1 \cdot (P \times A_2) \\ &= (A_1, A_2, P), \end{aligned}$$

δηλαδή το μεικτό γινόμενο των A_1 , A_2 και P . Ομοίως βρίσκουμε

$$A_2 \cdot C = (A_1, A_2, P)$$

και έτσι

$$[(A_1 \times A_2) \times (B_1 \times B_2)] = [A_1 - A_2].$$

Παρόμοια, παίρνουμε ότι

- το σημείο τομής της ευθείας από τα $[A_1]$, $[A_3]$ και της ευθείας από τα $[B_1]$, $[B_3]$ είναι το $[A_1 - A_3]$ και
- το σημείο τομής της ευθείας από τα $[A_2]$, $[A_3]$ και της ευθείας από τα $[B_2]$, $[B_3]$ είναι το $[A_2 - A_3]$.

Επειδή όμως

$$(A_1 - A_2) + (A_3 - A_1) + (A_2 - A_3) = 0,$$

τα σημεία αυτά είναι συνευθειακά. □