ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Χειμερινό εξάμηνο 2017-18

ΜΕΜ232-ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ, ΑΣΚΗΣΕΙΣ XI

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Οι παρακάτω ασκήσεις αφορούν στην ομοτοπία συναρτήσεων και δρόμων.

1. Έστω $f, f' : X \to Y$, με $f \simeq_F f'$ και $g, g' : Y \to Z$, με $g \simeq_G g'$. Αποδείξτε ότι

$$f \circ g \simeq f' \circ g'.$$

2. Έστω $[X, Y]$ το σύνολο των κλάσεων ομοτοπικών συναρτήσεων $X \to Y$.

α) Αν $I = [0, 1]$ τότε το $[X, I]$ αποτελείται από ένα στοιχείο.

β) Αν ο Y είναι συνεκτικός κατά δρόμους, τότε το $[I, Y]$ αποτελείται από ένα στοιχείο.

3. Έστω η ανάκλαση $R : S^1 \to S^1$, $R(x, y) = (x, -y)$ και η αντιποδική απεικόνιση $\alpha : S^1 \to S^1$, $\alpha(x, y) = (-x, -y)$. Δείξτε ότι και οι δύο είναι ομοτοπικές με την ταυτοτική $\mathbf{1}_{S^1}$.

4. Δείξτε αναλυτικά ότι η ομοτοπία δρόμων είναι σχέση ισοδυναμίας.

5. Έστω $f : X \to S^n$ απεικόνιση που δεν είναι επί. Δείξτε ότι η f είναι ομοτοπική με σταθερή συνάρτηση $c : X \to S^n$.

(Υπόδειξη: Επειδή η f δεν είναι επί, υποθέτουμε χωρίς βλάβη ότι $f(x) \neq n$, για κάθε $x \in X$, όπου n είναι ο βόρειος πόλος της S^n· η επιλογή του n είναι απολύτως τυχαία. Θεωρείστε την $c : X \to S^n$, $c(x) = n$. Θεωρούμε τώρα την $H : X \times I \to S^n$ με

$$H(x, t) = \frac{(1-t) \cdot f(x) + t \cdot n}{|(1-t) \cdot f(x) + t \cdot n|}.$$

Δείξτε ότι $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = c(x)$ και επιπλέον ότι η H είναι συνεχής.)