ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ–ΤΜΕΜ

Χειμερινό εξάμηνο 2017-18

ΜΕΜ 232 ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ, ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ, 09/01/2018

ΔΙΔΑΣΚΩΝ: Ι.Δ. ΠΛΑΤΗΣ

Α.Μ: **Ονοματεπώνυμο:**

Κρατάτε τον βαθμό της προόδου;

Οδηγιες

- Οι κρατούντες τον βαθμό της προόδου γράφουν **μόνο** τα θέματα IV-VIII και αποχωρούν σε δύο ώρες. Υπάρχουν 75 μονάδες γι αυτούς/ές, άριστα το 60. Οι υπόλοιποι γράφουν **όλα** τα θέματα και αποχωρούν σε τρεις ώρες. Υπάρχουν 110 μονάδες γι αυτούς/ές, άριστα το 100.

- Για την απάντηση των ερωτημάτων μπορείτε να χρησιμοποιήσετε οποιοδήποτε αποτέλεσμα που διδάχθηκε στην τάξη, αρκεί να είναι στοιχειωδέστερο αυτού που σας ζητείται να απαντήσετε.

- Τα κινητά σας τηλέφωνα πρέπει να είναι κλειστά.

Θέμα I

α) **(3)** Αποδείξετε ότι η συλλογή ανοικτών διαστημάτων (a,b), $a,b \in \mathbb{Q}$, είναι μια βάση για την τυπική τοπολογία του $\mathbb{R}$.

β) **(4)** Αποδείξτε ότι εάν ο X είναι Hausdorff, τότε κάθε μονοσύνολο του X είναι κλειστό.

γ) **(3)** Αποδείξτε ότι κάθε υπόχωρος χώρου Hausdorff είναι Hausdorff.

Θέμα II

α) **(3)** Αποδείξτε ότι η ιδιότητα της συνεκτικότητας διατηρείται από τη συνέχεια.

β) **(5)** Αποδείξτε ότι ένας ανοικτός συνεκτικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικός κατά δρόμους.

γ) **(5)** Χρησιμοποιώντας τη συνεκτικότητα, αποδείξτε ότι ο $\mathbb{R}$ και ο $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, δεν είναι ομοιομορφικοί. Γιατί δεν μπορεί να λειτουργήσει η απόδειξή σας αν αντικαταστήσουμε το $\mathbb{R}$ με το $\mathbb{R}^m$, $m > 1$;

Θέμα III

α) **(2)** Αποδείξτε χρησιμοποιώντας τον ορισμό ότι το $[0,1)$ δεν είναι συμπαγές.

β) **(5)** Αποδείξτε ότι κάθε κλειστός υπόχωρος συμπαγούς χώρου είναι συμπαγής και δώστε κατόπιν παράδειγμα ανοικτού υποχώρου συμπαγούς χώρου που δεν είναι συμπαγής.

γ) **(5)** Διατυπώστε και αποδείξτε το Θεώρημα Μεγίστου-Ελαχίστου. Με ένα αντιπαράδειγμα, δείξτε ότι το θεώρημα παύει να ισχύει εν γένει σε μη συμπαγείς χώρους.

Γυρίστε σελίδα.

Θέμα IV

α) **(3)** Δώστε τον ορισμό της απεικόνισης πηλίκο.

β) **(5)** Είναι η $f : [0, 2\pi] \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$: 1) Απεικόνιση πηλίκο; 2) Ομοιομορφισμός; 3) Εμφύτευση του $[0, 2\pi]$ στον S^1;

γ) **(7)** Έστω η σχέση $\sim$ στο $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Αποδείξτε με τη σειρά ότι:

(α′) ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}^2/_\sim$ είναι σε 1–1 και επί αντιστοιχία με το $[0, \infty)$.

(β′) Αν $\overline{D_r}$ είναι ο κλειστός δίσκος του $\mathbb{R}^2$ κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας r, αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $\overline{D_r}/_\sim$ είναι ομοιομορφικός με το $[0, r]$.

(γ′) Χρησιμοποιώντας ιδιότητες κατασκευής συνεχών συναρτήσεων αποδείξτε ότι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}^2/_\sim$ είναι ομοιομορφικός με το $[0, \infty)$.

Θέμα V

α) **(5)** Διατυπώστε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου (ΘΣΣ) του Brower και σκιαγραφήστε την απόδειξή του για $n = 2$.

β) **(2)** Αποδείξτε ότι το ΘΣΣ δεν ισχύει εν γένει στην περίπτωση $n = 1$ για $f : (-1, 1) \to (-1, 1)$ συνεχείς και μη σταθερές. (Ένα καλό σχήμα αρκεί).

γ) **(8)** Αποδείξτε ότι στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο του $\mathbb{C}$ δεν ισχύει εν γένει το ΘΣΣ.

Θέμα VI

α) **(4)** Αποδείξτε ότι κάθε κυρτό του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοτοπικό με σημείο.

β) **(5)** Αποδείξτε ότι κάθε αστρόμορφο του $\mathbb{R}^n$ είναι ομοτοπικό με σημείο.

γ) **(6)** Ποια από τα παρακάτω υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$ είναι: 1) Κυρτό; 2) Αστρόμορφο; Είναι ομοτοπικά ισοδύναμα;

Θέμα VII

α) **(3)** Δώστε τόν ορισμό του απλά συνεκτικού χώρου.

β) **(6)** Αποδείξτε ότι αν X και Y είναι κατά δρόμους συνεκτικοί χώροι, τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in X \times Y$ είναι

$$(\pi_1)_{(x_0,y_0)}(X \times Y) \simeq (\pi_1)_{x_0}(X) \times (\pi_1)_{y_0}(Y).$$

γ) **(6)** Υπολογίστε τη θεμελιώδη ομάδα του $\overline{B^2} \times \mathbb{R}^2_*$. Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Θέμα VIII

α) **(3)** Δώστε τόν ορισμό του συσταλτού χώρου.

β) **(6)** Αποδείξτε ότι αν $r : X \to A$ είναι ανάκληση του X στο A και ο X είναι συσταλτός, τότε και ο A είναι συσταλτός. Βρείτε ανάκληση $r : \mathbb{R}^{n+1}_* \to S^n$ και συμπεράνετε ότι ο $\mathbb{R}^{n+1}_*$ και η S^n είναι του ίδιου ομοτοπικού τύπου.

γ) **(6)** Αποδείξτε ότι ο κύκλος S^1 και ο κύλινδρος $S^1 \times [0, 1]$ έχουν τον ίδιο ομοτοπικό τύπο. Ποιός είναι ο ομοτοπικός τύπος του στερεού κυλίνδρου $\overline{B^2} \times [0, 1]$; Υπάρχει ανάκληση του στερεού κυλίνδρου στον κύλινδρο $S^1 \times [0, 1]$;