Απειροστικός Λογισμός ΙΙ

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2006

Περιεχόμενα

1 Παραγωγος και μελετη συναρτησεων 1

1.1 Κρισιμα σημεια 1

1.2 Θεωρημα μεσης τιμης 3

1.3 Γεωμετρικη σημασια της δευτερης παραγωγου 8

1.3α′ Κυρτες και κοιλες συναρτησεις 8

1.3β′ Ασυμπτωτες 11

1.4 Απροσδιοριστες μορφες 12

1.5 Ιδιοτητα Darboux 14

1.6 Ασκήσεις 15

2 Σειρές πραγματικών αριθμών 19

2.1 Σύγκλιση σειράς 19

2.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους 23

2.2α′ Σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους 24

2.2β′ Ο αριθμός e 26

2.3 Γενικά κριτήρια 28

2.3α′ Απόλυτη σύγκλιση σειράς 28

2.3β′ Κριτήρια σύγκρισης 29

2.3γ′ Κριτήριο λόγου και κριτήριο ρίζας 31

2.3δ′ Το κριτήριο του Dirichlet 33

2.3ε′ Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών* 34

2.4 Δυναμοσειρές 38

2.5 Ασκήσεις 41

3 Ομοιόμορφη συνέχεια 47

3.1 Ομοιόμορφη συνέχεια 47

3.2 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών 51

3.3 Ομοιόμορφη συνέχεια συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα 52

3.4 Συστολές – θεώρημα σταθερού σημείου 55

3.5 Ασκήσεις 56

4 Ολοκλήρωμα Riemann 61
4.1 Ο ορισμός του Darboux 61
4.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann 64
4.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων 69
4.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann 71
4.5 Ο ορισμός του Riemann* 77
4.6 Ασκήσεις 80

5 Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού 87
5.1 Το θεώρημα μέσης του Ολοκληρωτικού Λογισμού 87
5.2 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού 88
5.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης 92
5.4 Ασκήσεις 94

6 Βασικές πραγματικές συναρτήσεις 97
6.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις 97
6.2 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις 100
6.3 Λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση: πρώτος ορισμός 101
6.4 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση: δεύτερος ορισμός 106
6.5 Ασκήσεις 109

7 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις 113
7.1 Ορισμός 113
7.2 Κυρτές συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτό διάστημα 114
7.3 Παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις 116
7.4 Ανισότητα του Jensen 118

8 Υποδείξεις για τις Ασκήσεις 121
8.1 Παράγωγος και μελέτη συναρτήσεων 121
8.2 Σειρές πραγματικών αριθμών 130
8.3 Ομοιόμορφη συνέχεια 141
8.4 Ολοκλήρωμα Riemann 148
8.5 Παράγωγος και Ολοκλήρωμα 158
8.6 Βασικές πραγματικές συναρτήσεις 164

Κεφάλαιο 1

Παράγωγος και μελέτη συναρτήσεων

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε τα κύρια θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού και να δούμε πώς εφαρμόζονται στη μελέτη συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Θα δούμε ότι αν μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη (ή, ακόμα καλύτερα, δύο φορές παραγωγίσιμη) στο I, τότε χρησιμοποιώντας την f' (ή και την f'') μπορούμε να «σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση» της f.

1.1 Κρίσιμα σημεία

Θα ξεκινήσουμε με κάποια παραδείγματα που δείχνουν ότι η μονοτονία ή η ύπαρξη κάποιου τοπικού ακρότατου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης δίνουν κάποιες πληροφορίες για την παράγωγο. Το μοναδικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο ορισμός της παραγώγου.

Λήμμα 1.1.1. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι αύξουσα στο (a,b) τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in (a,b)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$. Αν λοιπόν $|h| < \delta$ τότε η f ορίζεται στο $x+h$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x, έχουμε

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{1.1.1}$$

Έστω $0 < h < \delta$. Αφού η f είναι αύξουσα στο (a,b) έχουμε $f(x+h) \geq f(x)$. Συνεπώς,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \text{άρα} \quad f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0. \tag{1.1.2}$$

Παρατηρήστε ότι δείξαμε το ζητούμενο χωρίς να κοιτάξουμε τι γίνεται για αρνητικές τιμές του h (ελέγξτε όμως ότι αν $-\delta < h < 0$ τότε η κλίση $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι πάλι μη αρνητική, οπότε οδηγούμαστε στο ίδιο συμπέρασμα). □

Παρατήρηση 1.1.2. Αν υποθέσουμε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι *γνησίως αύξουσα*, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f' είναι *γνησίως θετική* στο (a, b). Για παράδειγμα, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(x) = 3x^2$, άρα *υπάρχει* σημείο στο οποίο η παράγωγος μηδενίζεται: $f'(0) = 0$. Το Λήμμα 1.1.1 μας εξασφαλίζει φυσικά ότι $f' \geq 0$ παντού στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in I$. Λέμε ότι η f έχει *τοπικό μέγιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x_0) \geq f(x).$$

Ομοίως, λέμε ότι η f έχει *τοπικό ελάχιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x_0) \leq f(x).$$

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 τότε λέμε ότι η f έχει *τοπικό ακρότατο* στο σημείο x_0.

Αυτό που χρειαστήκαμε για την απόδειξη του Λήμματος 1.1.1 ήταν η ύπαρξη της $f'(x)$ (ο ορισμός της παραγώγου) και το γεγονός ότι (λόγω μονοτονίας) η ελάχιστη τιμή της f στο $[x, x + \delta)$ ήταν η $f(x)$. Επαναλαμβάνοντας λοιπόν το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα παίρνουμε την ακόλουθη Πρόταση (Fermat).

Θεώρημα 1.1.4 (Fermat). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,*

$$f'(x_0) = 0. \tag{1.1.3}$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε οτι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a, b)$ και $f(x_0+h) \leq f(x_0)$ για κάθε $h \in (-\delta, \delta)$.

Αν $0 < h < \delta$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \text{άρα} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0. \tag{1.1.4}$$

Συνεπώς, $f'(x_0) \leq 0$.

Αν $-\delta < h < 0$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0, \quad \text{άρα} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0. \tag{1.1.5}$$

Συνεπώς, $f'(x_0) \geq 0$.

Από τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f'(x_0) = 0$. □

Ορισμός 1.1.5. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο x_0 του I λέγεται κρίσιμο σημείο για την f αν $f'(x_0) = 0$.*

Εφαρμογή 1.1.6. Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πολύ χρήσιμα όταν θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή $\max(f)$ και ελάχιστη τιμή $\min(f)$ στο $[a,b]$. Αν $x_0 \in [a,b]$ και $f(x_0) = \max(f)$ ή $f(x_0) = \min(f)$, τότε αναγκαστικά συμβαίνει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ (άκρο του διαστήματος).

(ii) $x_0 \in (a,b)$ και $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμο σημείο).

(iii) $x_0 \in (a,b)$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Δεδομένου ότι, στην πράξη, το πλήθος των σημείων που ανήκουν σε αυτές τις «τρεις ομάδες» είναι σχετικά μικρό, μπορούμε με απλό υπολογισμό και σύγκριση μερικών τιμών της συνάρτησης να απαντήσουμε στο ερώτημα.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ στο $[-1,2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,2)$, με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος είναι τα $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ τα οποία ανήκουν στο $(-1,2)$. Άρα, τα σημεία στα οποία μπορεί να παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή η f είναι τα άκρα του διαστήματος και τα δύο κρίσιμα σημεία:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_3 = 2.$$

Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$f(-1) = 0, \quad f(-1/\sqrt{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(2) = 6.$$

Συγκρίνοντας αυτές τις τέσσερις τιμές βλέπουμε ότι $\max(f) = f(2) = 6$ και $\min(f) = f(1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$. □

1.2 Θεώρημα Μέσης Τιμής

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα στο (a,b) τότε $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

Σκοπός μας τώρα είναι να δούμε αν ισχύει κάποιου είδους αντίστροφο. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σε *ένα σημείο* $x_0 \in (a,b)$ και ότι $f'(x_0) > 0$. Είναι σωστό ότι η f είναι αύξουσα σε μια περιοχή του x_0; Η απάντηση είναι «όχι». Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις $f(x) = x + x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = x - x^2$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Παρατηρήστε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$, είναι όμως παραγωγίσιμη στο 0, και $f'(0) = 1 > 0$. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στο $\mathbb{R}$, μπορείτε να ελέγξετε ότι η f δεν είναι αύξουσα σε κανένα διάστημα της μορφής $(-\delta, \delta)$ όπου $\delta > 0$ (άσκηση).

Χρησιμοποιώντας την παραγωγισιμότητα μιας συνάρτησης και το πρόσημο της παραγώγου της σε ένα μόνο σημείο, μπορούμε να δείξουμε κάτι πολύ ασθενέστερο:

Λήμμα 1.2.1. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και $f'(x_0) > 0$. Τότε, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq (a,b)$ και*

(α) $f(x) > f(x_0)$ *για κάθε* $x \in (x_0, x_0+\delta)$.

(β) $f(x) < f(x_0)$ *για κάθε* $x \in (x_0-\delta, x_0)$.

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) > 0$. Εφαρμόζοντας τον $\varepsilon - \delta$ ορισμό του ορίου με $\varepsilon = \frac{f'(0)}{2} > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |x-x_0| < \delta$ τότε $x \in (a,b)$ και

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0. \tag{1.2.1}$$

Έπεται ότι:

(α) Για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta)$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) > \frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0) > 0 \ \Rightarrow f(x) > f(x_0). \tag{1.2.2}$$

(β) Για κάθε $x \in (x_0-\delta, x_0)$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) < \frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0) < 0 \ \Rightarrow f(x) < f(x_0). \qquad \square \tag{1.2.3}$$

Παρατηρήστε ότι οι (1.2.2) και (1.2.3) δεν δείχνουν ότι η f είναι αύξουσα στο $(x_0, x_0+\delta)$ ή στο $(x_0-\delta, x_0)$. $\square$

Το ερώτημα για το αντίστροφο του Λήμματος 1.1.1 διατυπώνεται λοιπόν ως εξής: αν $f'(x) \geq 0$ για *κάθε* $x \in (a,b)$ τότε είναι σωστό ότι η f είναι αύξουσα στο (a,b); Η απάντηση είναι «ναι». Όπως θα δούμε, η υπόθεση ότι η f' διατηρεί πρόσημο σε *ολόκληρο* το (a,b) παίζει ουσιαστικό ρόλο. Για την αυστηρή όμως απόδειξη, θα χρειαστεί επίσης να συνδυάσουμε την έννοια της παραγώγου με τα βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα. Το βασικό τεχνικό βήμα είναι η απόδειξη του «θεωρήματος μέσης τιμής».

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b): δηλαδή, για κάθε $x \in (a,b)$ ορίζεται καλά η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο $(x, f(x))$. Θεωρούμε την ευθεία (ℓ) που περνάει από τα σημεία $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$. Αν τη μετακινήσουμε παράλληλα προς τον εαυτό της, κάποια από τις παράλληλες θα εφάπτεται στο γράφημα της f σε κάποιο σημείο $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a,b)$. Η κλίση της εφαπτομένης θα πρέπει να ισούται με την κλίση της ευθείας (ℓ). Δηλαδή,

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{1.2.4}$$

Στο πρώτο μέρος αυτής της παραγράφου δίνουμε αυστηρή απόδειξη αυτού του ισχυρισμού (Θεώρημα Μέσης Τιμής). Αποδεικνύουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση: το θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα 1.2.2 (Rolle). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(a) = f(b)$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = 0. \tag{1.2.5}$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που η f είναι σταθερή στο $[a,b]$, δηλαδή $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε, $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a,b)$ και οποιοδήποτε από αυτά τα x μπορεί να παίξει το ρόλο του x_0.

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει $x_1 \in (a,b)$ ώστε $f(x_1) \neq f(a)$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_1) > f(a)$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \geq f(x_1) > f(a). \tag{1.2.6}$$

Ειδικότερα, $x_0 \neq a, b$. Δηλαδή, το x_0 βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα (a,b). Η f έχει (ολικό) μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Από το Θεώρημα 1.1.4 (Fermat) συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0) = 0$. □

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Rolle.

Θεώρημα 1.2.3 (θεώρημα μέσης τιμής). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{1.2.7}$$

Απόδειξη. Θα αναχθούμε στο Θεώρημα του Rolle ως εξής. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ που παίρνει τις ίδιες τιμές με την f στα σημεία a και b. Δηλαδή,

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{1.2.8}$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{1.2.9}$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και από τον τρόπο επιλογής της h έχουμε

$$g(a) = f(a) - h(a) = 0 \quad \text{και} \quad g(b) = f(b) - h(b) = 0. \tag{1.2.10}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $g'(x_0) = 0$. Όμως,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.2.11}$$

στο (a,b). Άρα, το x_0 ικανοποιεί την (1.2.7). □

Παρατήρηση 1.2.4. Η υπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο *κλειστό διάστημα* $[a,b]$ χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη και είναι απαραίτητη. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ αν $0\leq x<1$ και $f(1)=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα, συνεχής) στο $(0,1)$ και έχουμε $f(0)=f(1)=0$. Όμως δεν υπάρχει $x\in(0,1)$ που να ικανοποιεί την $f'(x)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$, αφού $f'(x)=1$ για κάθε $x\in(0,1)$. Το πρόβλημα είναι στο σημείο 1: η f είναι ασυνεχής στο 1, δηλαδή δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Το θεώρημα μέσης τιμής μας επιτρέπει να απαντήσουμε στα ερωτήματα που συζητήσαμε στην αρχή της παραγράφου.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(i) *Αν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η f είναι αύξουσα στο (a,b).*

(ii) *Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b).*

(iii) *Αν $f'(x)\leq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η f είναι φθίνουσα στο (a,b).*

(iv) *Αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (a,b).*

(v) *Αν $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε η f είναι σταθερή στο (a,b).*

Απόδειξη. Θα δείξουμε έναν από τους πρώτους τέσσερις ισχυρισμούς: υποθέτουμε ότι $f'(x)\geq 0$ στο (a,b), και θα δείξουμε ότι αν $a<x<y<b$ τότε $f(x)\leq f(y)$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[x,y]$. Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ και παραγωγίσιμη στο (x,y), οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής βρίσκουμε $\xi\in(x,y)$ που ικανοποιεί την

$$f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}. \tag{1.2.12}$$

Αφού $f'(\xi)\geq 0$ και $y-x>0$, έχουμε $f(y)-f(x)\geq 0$. Δηλαδή, $f(x)\leq f(y)$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $f'=0$ στο (a,b) τότε $f'\geq 0$ και $f'\leq 0$ στο (a,b). Άρα, η f είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα: αν $x<y$ στο (a,b) τότε $f(x)\leq f(y)$ και $f(x)\geq f(y)$, δηλαδή $f(x)=f(y)$. Έπεται ότι η f είναι σταθερή. □

Μια παραλλαγή (και γενίκευση) του θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy:

Θεώρημα 1.2.6 (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy). *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Τότε, υπάρχει $x_0\in(a,b)$ ώστε*

$$[f(b)-f(a)]\,g'(x_0)=[g(b)-g(a)]\,f'(x_0). \tag{1.2.13}$$

Σημείωση: Παρατηρήστε πρώτα ότι το θεώρημα μέσης τιμής είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος που θέλουμε να δείξουμε: αν $g(x)=x$ τότε $g'(x)=1$ και η (1.2.13) παίρνει τη μορφή

$$[f(b)-f(a)]\cdot 1=(b-a)\,f'(x). \tag{1.2.14}$$

Η ύπαρξη κάποιου $x_0 \in (a,b)$ το οποίο ικανοποιεί την (1.2.14) είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του θεωρήματος μέσης τιμής.

Θυμηθείτε τώρα την ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος μέσης τιμής. Εφαρμόσαμε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{1.2.15}$$

Ισοδύναμα (πολλαπλασιάστε την προηγούμενη συνάρτηση με $b-a$) θα μπορούσαμε να έχουμε πάρει την

$$[f(x)-f(a)]\,(b-a) - [f(b)-f(a)]\,(x-a). \tag{1.2.16}$$

Θα θεωρήσουμε λοιπόν συνάρτηση αντίστοιχη με αυτήν της (1.2.16) «αντικαθιστώντας την x με την $g(x)$».

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = [f(x)-f(a)]\,(g(b)-g(a)) - [f(b)-f(a)]\,(g(x)-g(a)). \tag{1.2.17}$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) (γιατί οι f και g έχουν τις ίδιες ιδιότητες). Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$h(a) = 0 = h(b). \tag{1.2.18}$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle: υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $h'(x_0) = 0$. Αφού

$$h'(x_0) = f'(x_0)\,(g(b)-g(a)) - g'(x_0)\,(f(b)-f(a)), \tag{1.2.19}$$

παίρνουμε την (1.2.13). □

Παρατήρηση 1.2.7. Το ενδιαφέρον σημείο στην (1.2.13) είναι ότι οι παράγωγοι $f'(x_0)$ και $g'(x_0)$ «υπολογίζονται στο ίδιο σημείο» x_0.

Πολύ συχνά, το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy διατυπώνεται ως εξής.

Πόρισμα 1.2.8. *Εστω $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$, συνεχείς στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμες στο (a,b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

(α) οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a,b).

(β) $g(b)-g(a) \neq 0$.

Τότε υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{1.2.20}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε

$$(f(b)-f(a))g'(x_0) = (g(b)-g(a))f'(x_0). \tag{1.2.21}$$

Παρατηρούμε ότι $g'(x_0) \neq 0$: αν είχαμε $g'(x_0) = 0$, τότε θα ήταν $(g(b)-g(a))f'(x_0) = 0$ και, αφού από την υπόθεσή μας $g(b)-g(a) \neq 0$, θα έπρεπε να έχουμε $f'(x_0) = 0$. Δηλαδή οι f' και g' θα είχαν κοινή ρίζα. Μπορούμε λοιπόν να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της (1.2.21) με $(g(b)-g(a))g'(x_0)$ και να πάρουμε το ζητούμενο. □

1.3 Γεωμετρική σημασία της δεύτερης παραγώγου

Στην §1.1 είδαμε ότι ο μηδενισμός της παραγώγου σε ένα σημείο x_0 δεν είναι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου στο x_0. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x_0) = 0$. Κοιτάζοντας τη δεύτερη παράγωγο στα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου μπορούμε πολλές φορές να συμπεράνουμε αν ένα κρίσιμο σημείο είναι όντως σημείο ακρότατου.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a,b)$ με $f'(x_0) = 0$.*

(α) *Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0) > 0$, τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

(β) *Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0) < 0$, τότε έχουμε τοπικό μέγιστο στο x_0.*

Σημείωση: Αν $f''(x_0) = 0$ ή αν δεν υπάρχει η $f''(x_0)$, τότε πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει με άλλο τρόπο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α). Έχουμε

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}. \tag{1.3.1}$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

(i) Αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $f'(x) > 0$.

(ii) Αν $x_0 - \delta < x < x_0$ τότε $f'(x) < 0$.

Έστω $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(i) Αν $x_0 < y < x_0 + \delta$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, y]$ βρίσκουμε $x \in (x_0, y)$ ώστε

$$f(y) - f(x_0) = f'(x)(y - x_0) > 0. \tag{1.3.2}$$

(ii) Αν $x_0 - \delta < y < x_0$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y, x_0]$ βρίσκουμε $x \in (y, x_0)$ ώστε

$$f(y) - f(x_0) = f'(x)(y - x_0) > 0. \tag{1.3.3}$$

Δηλαδή, $f(y) \geq f(x_0)$ για κάθε $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. □

1.3α΄ Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Σε επόμενο Κεφάλαιο θα ασχοληθούμε συστηματικά με τις κυρτές και τις κοίλες συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}$. Σε αυτή την υποπαράγραφο αποδεικνύουμε κάποιες απλές προτάσεις για παραγωγίσιμες συναρτήσεις, οι οποίες μας βοηθάνε να «σχεδιάσουμε τη γραφική τους παράσταση».

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in (a,b)$, η «εξίσωση της εφαπτομένης» του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{1.3.4}$$

Λέμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x_0 \in (a,b)$ έχουμε

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{για κάθε } x \in (a,b). \tag{1.3.5}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ βρίσκεται πάνω από όλες τις εφαπτόμενες. Λέμε ότι η f είναι *γνησίως κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x \neq x_0$ η ανισότητα στην (1.3.5) είναι γνήσια.

Λέμε ότι η f είναι *κοίλη* στο (a,b) αν για κάθε $x_0 \in (a,b)$ έχουμε

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{για κάθε } x \in (a,b). \tag{1.3.6}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ βρίσκεται κάτω από όλες τις εφαπτόμενες. Λέμε ότι η f είναι *γνησίως κοίλη* στο (a,b) αν για κάθε $x \neq x_0$ η ανισότητα στην (1.3.6) είναι γνήσια.

Τέλος, λέμε ότι η f έχει *σημείο καμπής* στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως κυρτή στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και γνησίως κοίλη στο $(x_0, x_0 + \delta)$ ή γνησίως κοίλη στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και γνησίως κυρτή στο $(x_0, x_0 + \delta)$.

Θεώρημα 1.3.2. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Αν η f' είναι (γνησίως) αύξουσα στο (a,b), τότε η f είναι (γνησίως) κυρτή στο (a,b).

(β) Αν η f' είναι (γνησίως) φθίνουσα στο (a,b), τότε η f είναι (γνησίως) κοίλη στο (a,b).

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in (a,b)$ και έστω $x \in (a,b)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x > x_0$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_x \in (x_0, x)$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi_x). \tag{1.3.7}$$

Αφού $x_0 < \xi_x$ έχουμε $f'(\xi_x) \geq f'(x_0)$, και αφού $x - x_0 > 0$ βλέπουμε ότι

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi_x) \geq (x - x_0)f'(x_0). \tag{1.3.8}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $x < x_0$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_x \in (x, x_0)$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi_x). \tag{1.3.9}$$

Αφού $\xi_x < x_0$ έχουμε $f'(\xi_x) \leq f'(x_0)$, και αφού $x - x_0 < 0$ βλέπουμε ότι

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(\xi_x) \geq (x - x_0)f'(x_0). \tag{1.3.10}$$

Σε κάθε περίπτωση, ισχύει η (1.3.5). Ελέγξτε ότι αν η f' υποτεθεί γνησίως αύξουσα στο (a,b) τότε παίρνουμε γνήσια ανισότητα στην (1.3.5).

(β) Με τον ίδιο τρόπο. □

Η δεύτερη παράγωγος (αν υπάρχει) μπορεί να μας δώσει πληροφορία για το αν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο (a,b).

(β) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο (a,b).

Απόδειξη: (α) Αφου $f'' > 0$ στο (a,b), η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b) (Θεώρημα 1.2.5). Από το Θεώρημα 1.3.2 έπεται το ζητούμενο.

(β) Με τον ίδιο τρόπο. □

Τέλος, δίνουμε μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το x_0 σημείο καμπής της f.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a,b)$. Αν η f έχει σημείο καμπής στο x_0, τότε $f''(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Η g δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο x_0: έχουμε $g(x_0) = 0$ και $g > 0$ αριστερά του x_0, $g < 0$ δεξιά του x_0 – ή το αντίστροφο.

Επίσης, $g'(x_0) = 0$ και $g''(x_0) = f''(x_0)$. Αν ήταν $g''(x_0) > 0$ ή $g''(x_0) < 0$ τότε από το Θεώρημα 1.3.1 η g θα είχε ακρότατο στο x_0, άτοπο. Άρα, $f''(x_0) = g''(x_0) = 0$. □

Σημείωση. Η συνθήκη του Θεωρήματος 1.3.4 δεν είναι ικανή. Η $f(x) = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$. Είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως $f''(x) = 12x^2$, άρα $f''(0) = 0$.

Παράδειγμα. Μελετήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}. \tag{1.3.11}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}. \tag{1.3.12}$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Παίρνει μέγιστη τιμή στο 0: $f(0) = 1$, και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Η δεύτερη παράγωγος της f ορίζεται παντού και είναι ίση με

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}. \tag{1.3.13}$$

Άρα, $f'' > 0$ στα $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, ενώ $f'' < 0$ στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Έπεται ότι η f έχει σημείο καμπής στα $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ και είναι: γνησίως κυρτή στα $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, γνησίως κοίλη στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Αυτές οι πληροφορίες είναι αρκετές για να σχεδιάσουμε «αρκετά πιστά» τη γραφική παράσταση της f.

1.3β′ Ασύμπτωτες

1. Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

(α) Λέμε ότι η ευθεία $y = \beta$ είναι *οριζόντια ασύμπτωτη* της f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta. \tag{1.3.14}$$

Παράδειγμα. Η $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$.

(β) Λέμε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ ($\alpha \neq 0$) είναι *πλάγια ασύμπτωτη* της f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0. \tag{1.3.15}$$

Παρατηρήστε ότι η f έχει το πολύ μία πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και ότι αν $y = \alpha x + \beta$ είναι η ασύμπτωτη της f τότε η κλίση α υπολογίζεται από την

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{1.3.16}$$

και η σταθερά β υπολογίζεται από την

$$\beta = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x). \tag{1.3.17}$$

Αντίστροφα, για να δούμε αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, εξετάζουμε πρώτα αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Αν αυτό το όριο υπάρχει και αν είναι διαφορετικό από το 0, το συμβολίζουμε με α και εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x)$. Αν και αυτό το όριο – ας το πούμε β – υπάρχει, τότε η $y = \alpha x + \beta$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Παράδειγμα. Η $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x + 2$. Πράγματι,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x} = 1, \tag{1.3.18}$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - 1}{x - 1} = 2. \tag{1.3.19}$$

2. Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε – και βρίσκουμε – την οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ στο $-\infty$ (αν υπάρχει).

3. Τέλος, λέμε ότι η $f : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ έχει (αριστερή ή δεξιά) κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad ή \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \tag{1.3.20}$$

αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει αριστερή και δεξιά κατακόρυφη ασύμπτωτη στο 0 την ευθεία $x = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

1.4 Απροσδιόριστες μορφές

Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy χρησιμοποιείται στην απόδειξη των «κανόνων του L' Hospital» για όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$. Τυπικά παραδείγματα της κατάστασης που θα συζητήσουμε σε αυτή την παράγραφο είναι τα εξής: θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \tag{1.4.1}$$

όπου f,g είναι δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες δεξιά και αριστερά από το x_0, με $g(x)\neq 0$ αν x κοντά στο x_0 και $x\neq x_0$, και

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \tag{1.4.2}$$

ή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty. \tag{1.4.3}$$

Τότε λέμε ότι έχουμε *απροσδιόριστη μορφή* $\frac{0}{0}$ (ή $\frac{\infty}{\infty}$ αντίστοιχα) στο x_0.

Οι κανόνες του l'Hospital μας επιτρέπουν συχνά να βρούμε τέτοια όρια (αν υπάρχουν) με τη βοήθεια των παραγώγων των f και g. Τυπικό θεώρημα αυτού του είδους είναι το εξής.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $f,g:(a,x_0)\cup(x_0,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,x_0)\cup(x_0,b)$.

(β) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell\in\mathbb{R}$, τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.4}$$

Απόδειξη. Επεκτείνουμε τις f και g, ορίζοντάς τις στο x_0 με $f(x_0)=g(x_0)=0$. Αφού

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0, \tag{1.4.5}$$

οι f και g γίνονται τώρα συνεχείς στο (a,b). Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.6}$$

Έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \tag{1.4.7}$$

για κάθε $x\in(x_0,b)$. Οι f',g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (x_0,x) γιατί η g' δεν μηδενίζεται πουθενά. Επίσης $g(x)\neq 0$, δηλαδή $g(x)-g(x_0)\neq 0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy μπορούμε για κάθε $x \in (x_0, b)$ να βρούμε $\xi_x \in (x_0, x)$ ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}. \tag{1.4.8}$$

Έστω τώρα ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x_0 < y < x_0 + \delta$ τότε

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - \ell \right| < \varepsilon. \tag{1.4.9}$$

Συνδυάζοντας τις (1.4.8) και (1.4.9) βλέπουμε ότι αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ τότε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \ell \right| < \varepsilon \tag{1.4.10}$$

(γιατί $x_0 < \xi_x < x < x_0 + \delta$). Άρα,

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.11}$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. □

Ο αντίστοιχος κανόνας όταν $x_0 = +\infty$ είναι ο εξής.

Θεώρημα 1.4.2. *Εστω $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x > a$.

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.12}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $f_1, g_1 : \left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{και} \quad g_1(x) = g\left(\frac{1}{x}\right). \tag{1.4.13}$$

Οι f_1, g_1 είναι παραγωγίσιμες και

$$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}. \tag{1.4.14}$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to0^+} g_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, $g_1 \neq 0$ και $g_1' \neq 0$ στο $(0, 1/a)$. Τέλος,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.15}$$

Άρα, εφαρμόζεται το Θεώρημα 1.4.1 για τις f_1, g_1 και έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.16}$$

Αφού

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \tag{1.4.17}$$

έπεται η (1.4.12). □

Υπάρχουν αρκετές ακόμα περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών για τις οποίες μπορούμε να διατυπώσουμε κατάλληλο «κανόνα του l'Hospital». Δεν θα δώσουμε άλλες αποδείξεις, ας δούμε όμως τη διατύπωση ενός κανόνα για απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a,b)$.

(β) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$.

Αν υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1.4.18}$$

1.5 Ιδιότητα Darboux για την παράγωγο

Ορισμός 1.5.1. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει την *ιδιότητα Darboux* (ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής) αν: για κάθε $x < y$ στο I με $f(x) \neq f(y)$ και για κάθε πραγματικό αριθμό ρ ανάμεσα στους $f(x)$ και $f(y)$ μπορούμε να βρούμε $z \in (x,y)$ ώστε $f(z) = \rho$. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής έπεται ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα Darboux.

Θα δείξουμε ότι η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης έχει πάντα την ιδιότητα Darboux (αν και δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση).

Θεώρημα 1.5.2. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε, η f' έχει την ιδιότητα Darboux.*

Απόδειξη: Έστω $x < y \in (a,b)$ με $f'(x) \neq f'(y)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f'(x) < f'(y)$. Υποθέτουμε ότι $f'(x) < \rho < f'(y)$ και θα βρούμε $z \in (x,y)$ ώστε $f'(z) = \rho$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $g(t) = f(t) - \rho t$. Τότε, η g είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και $g'(t) = f'(t) - \rho$. Άρα, έχουμε $g'(x) < 0 < g'(y)$ και ζητάμε $z \in (x,y)$ με την ιδιότητα $g'(z) = 0$.

Ισχυρισμός. *Υπάρχουν $x_1, y_1 \in (x,y)$ ώστε $g(x_1) < g(x)$ και $g(y_1) < g(y)$.*

Απόδειξη του ισχυρισμού. Η g είναι παραγωγίσιμη στο x, δηλαδή

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x)<0. \tag{1.5.1}$$

Επιλέγοντας $\varepsilon=-\frac{g'(x)}{2}>0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $0<\delta_1<y-x$ ώστε

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}<g'(x)+\varepsilon=\frac{g'(x)}{2}<0 \tag{1.5.2}$$

για κάθε $0<h<\delta_1$. Παίρνοντας $x_1=x+\frac{\delta_1}{2}$ έχουμε $x_1\in(x,y)$ και $g(x_1)<g(x)$. Όμοια, η g είναι παραγωγίσιμη στο y, δηλαδή

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{g(y+h)-g(y)}{h}=g'(y)>0. \tag{1.5.3}$$

Επιλέγοντας $\varepsilon=\frac{g'(y)}{2}>0$ βλέπουμε ότι υπάρχει $0<\delta_2<y-x$ ώστε

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h}>g'(y)-\varepsilon=\frac{g'(y)}{2}>0 \tag{1.5.4}$$

για κάθε $-\delta_2<h<0$. Παίρνοντας $y_1=y-\frac{\delta_2}{2}$ έχουμε $y_1\in(x,y)$ και $g(y_1)<g(y)$. □

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 1.5.2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), άρα συνεχής στο $[x,y]$. Επομένως, η g παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[x,y]$: υπάρχει $z\in[x,y]$ με την ιδιότητα $g(z)\leq g(t)$ για κάθε $t\in[x,y]$.

Από τον Ισχυρισμό βλέπουμε ότι η g δεν παίρνει ελάχιστη τιμή στο x ούτε στο y. Άρα, $z\in(x,y)$. Αφού η g είναι παραγωγίσιμη στο z, το Θεώρημα 1.1.4 (Fermat) μας εξασφαλίζει ότι $g'(z)=0$. □

1.6 Ασκήσεις

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Α1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).

2. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και αν $f(0)=f'(0)=0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n)=0$.

3. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0=a$, τότε $f'(a)=0$.

4. Αν $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,\infty)$ και $f(0)=0$, τότε $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[0,\infty)$.

5. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και $f(0)=f(1)=f(2)=0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ ώστε $f''(x_0)=0$.

6. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in(a,b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, τότε $f'(x_0)=\ell$.

7. Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta,\delta)$.

8*. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$ και $f'(x_0)>0$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

A2. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:
(α) $f(-1)=0$, $f(2)=1$ και $f'(1)>0$.
(β) $f(-1)=0$, $f(2)=1$ και $f'(1)<0$.
(γ) $f(0)=0$, $f(3)=1$, $f'(1)=0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.
(δ) $f(m)=0$ και $f'(m)=(-1)^m$ για κάθε $m\in\mathbb{Z}$, $|f(x)|\le\frac{1}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

B. Βασικές ασκήσεις

1. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.
(α) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ στο $[-2,2]$.
(β) $f(x)=x^5+x+1$ στο $[-1,1]$.
(γ) $f(x)=x^3-3x$ στο $[-1,2]$.

2. Δείξτε ότι η εξίσωση:
(α) $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.
(β) $6x^4-7x+1=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.
(γ) $x^3+9x^2+33x-8=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

3. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^n+ax+b=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες αν ο n είναι άρτιος και το πολύ τρεις πραγματικές ρίζες αν ο n είναι περιττός.

4. Έστω $a_1<\cdots<a_n$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς $n-1$ λύσεις.

5. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\qquad f(x)=x+\frac{3}{x^2},\qquad f(x)=\frac{x^2}{x^2-1},\qquad f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν.

6. (α) Δείξτε ότι: από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή διαγώνιο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

(β) Δείξτε ότι: από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο, το τετράγωνο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

7. Βρείτε τα σημεία της υπερβολής $x^2 - y^2 = 1$ που έχουν ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(0, 1)$.

8. Πάνω σε κύκλο ακτίνας 1 θεωρούμε δύο αντιδιαμετρικά σημεία A, B. Βρείτε τα σημεία Γ του κύκλου για τα οποία το τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει τη μέγιστη δυνατή περίμετρο.

9. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$.

10. Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|} + \frac{1}{1 + |x - a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

11. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$ και $f'(x_0) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

(α) $f(x) > f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

(β) $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

12. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f''(x_0)$. Δείξτε ότι:

(α) Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, τότε $f''(x_0) \geq 0$.

(β) Αν η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0, τότε $f''(x_0) \leq 0$.

13. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και ότι $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο (a, b) για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

14. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x) = 0$, και αντίστροφα.

15. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

16. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x + 1) - f(x)) = 0.$$

17. Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)|\leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x>1$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$.

18. Έστω f,g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0,a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0)=g(0)=0$ και $f'(x)>0$, $g'(x)>0$ στο $(0,a)$.

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0,a)$, δείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.

(β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$, δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0,a)$.

Γ. Ασκήσεις*

1. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x-a_k|$.

2. Έστω f παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $|f'(x)|\leq 1$ για κάθε $x\in(0,2)$. Θέτουμε $a_n=f\left(\frac{1}{n}\right)$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

3. Έστω $n\in\mathbb{N}$ και έστω $f(x)=(x^2-1)^n$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x)=0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα $(-1,1)$.

4. Έστω $a>0$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f'(0)=0$ και $f'(x)\geq a$ για κάθε $x\in(0,1]$.

5. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f' είναι ασυνεχής σε κάποιο σημείο $x_0\in(a,b)$, δείξτε οτι η ασυνέχεια της f' στο x_0 είναι ουσιώδης (δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$).

6. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to b^-}f'(x)$ τότε είναι ίσο με $+\infty$.

7. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ τότε είναι ίσο με 0.

Κεφάλαιο 2

Σειρές πραγματικών αριθμών

2.1 Σύγκλιση σειράς

Ορισμός 2.1.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n. \tag{2.1.1}$$

Δηλαδή,

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots \tag{2.1.2}$$

Το σύμβολο $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η *σειρά* με k-οστό όρο τον a_k. Το άθροισμα $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ είναι το *n-οστό μερικό άθροισμα* της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και η (s_n) είναι η *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Αν η (s_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s, τότε γράφουμε

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{ή} \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{2.1.3}$$

και λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (στο s), το δε όριο $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ είναι το *άθροισμα* της σειράς.

Αν $s_n \to +\infty$ ή αν $s_n \to -\infty$, τότε γράφουμε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ ή $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ και λέμε ότι *η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$* αντίστοιχα.

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε λέμε ότι *η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει*.

Παρατηρήσεις 2.1.2. (α) Πολλές φορές εξετάζουμε τη σύγκλιση σειρών της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ή $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ όπου $m \geq 2$. Σε αυτήν την περίπτωση θέτουμε $s_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ή $s_{n-m+1} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ (για $n \geq m$) αντίστοιχα, και εξετάζουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας (s_n).

(β) Από τους ορισμούς που δώσαμε είναι φανερό ότι για να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς, απλώς εξετάζουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας ακολουθίας (της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς). Ο n-οστός όμως όρος της ακολουθίας (s_n) είναι ένα «άθροισμα με ολοένα αυξανόμενο μήκος», το οποίο αδυνατούμε (συνήθως) να γράψουμε σε κλειστή μορφή. Συνεπώς, η εύρεση του ορίου $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (όταν αυτό υπάρχει) είναι πολύ συχνά ανέφικτη. Σκοπός μας είναι λοιπόν να αναπτύξουμε κάποια κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν (τουλάχιστον) να πούμε αν η (s_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή όχι.

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα δούμε κάποιες απλές προτάσεις που θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα στη συνέχεια.

Αν έχουμε δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, μπορούμε να σχηματίσουμε τον γραμμικό συνδυασμό τους $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.3. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{2.1.4}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των σειρών, τότε $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αφού έχουμε αθροίσματα με πεπερασμένους το πλήθος όρους. Όμως, $s_n \to s$ και $t_n \to t$, άρα $u_n \to \lambda s + \mu t$. Από τον ορισμό του αθροίσματος σειράς έπεται η (2.1.4). □

Πρόταση 2.1.4. (α) *Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος «αρχικών» όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλιση της.*

(β) *Αν αλλάξουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλιση της.*

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Με τη φράση «απαλείφουμε τους αρχικούς όρους $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$» εννοούμε ότι θεωρούμε την καινούργια σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Αν συμβολίσουμε με s_n και t_n τα n-οστά μερικά αθροίσματα των δύο σειρών αντιστοίχως, τότε για κάθε $n \geq m$ έχουμε

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + \cdots + a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + t_{n-m+1}. \tag{2.1.5}$$

Άρα η (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (t_{n-m+1}) συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνον αν η (t_n) συγκλίνει. Επίσης, αν $s_n \to s$ και $t_n \to t$, τότε $s = a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+t$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k. \tag{2.1.6}$$

(β) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλάζουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους της (a_k). Θεωρούμε δηλαδή μια νέα σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ που όμως έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_k = b_k$ για κάθε $k \geq m$. Αν απαλείψουμε τους πρώτους $m-1$ όρους των δύο σειρών, προκύπτει η ίδια σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Τώρα, εφαρμόζουμε το (α). □

Πρόταση 2.1.5. (α) *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, *τότε* $a_n \to 0$.

(β) *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: για κάθε* $n \geq N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Απόδειξη. (α) Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, τότε $s_n \to s$ και $s_{n-1} \to s$. Άρα,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0. \tag{2.1.8}$$

(β) Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε από την (2.1.6) έχουμε

$$\beta_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n \to 0 \tag{2.1.9}$$

καθώς το $n \to \infty$. Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq N$, $|\beta_n| < \varepsilon$. □

Σημείωση. Το μέρος (α) της Πρότασης 2.1.5 χρησιμοποιείται σαν *κριτήριο απόκλισης*: Αν η ακολουθία (a_k) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αναγκαστικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Η *γεωμετρική σειρά* με λόγο $x \in \mathbb{R}$ είναι η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{2.1.10}$$

Δηλαδή $a_k = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Αν $x = 1$ τότε $s_n = n+1$, ενώ αν $x \neq 1$ έχουμε

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{2.1.11}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $|x| \geq 1$ τότε $|a_k| = |x|^k \geq 1$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Από την Πρόταση 2.1.5(α) βλέπουμε ότι η σειρά (2.1.10) αποκλίνει.

(ii) Αν $|x| < 1$ τότε $x^{n+1} \to 0$, οπότε η (2.1.11) δείχνει ότι $s_n \to \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}. \tag{2.1.12}$$

(β) *Τηλεσκοπικές σειρές.* Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (a_k) ικανοποιεί την

$$a_k = b_k - b_{k+1} \tag{2.1.13}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου (b_k) μια άλλη ακολουθία. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (b_k) συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}, \tag{2.1.14}$$

οπότε $b_n \to b$ αν και μόνον αν $s_n \to b_1 - b$.

Σαν παράδειγμα θεωρούμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Τότε,

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_{k+1} - b_k, \tag{2.1.15}$$

όπου $b_k = \frac{1}{k}$. Άρα,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + \cdots + a_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \tag{2.1.16}$$

Θεώρημα 2.1.6 (κριτήριο Cauchy). *Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $N \leq m < n$ τότε*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon. \tag{2.1.17}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) συγκλίνει. Δηλαδή, αν και μόνον αν η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Αυτό όμως είναι (από τον ορισμό της ακολουθίας Cauchy) ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \leq m < n$,

$$(2.1.18)\quad |a_{m+1} + \cdots + a_n| = |(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_m)| = |s_n - s_m| < \varepsilon. \quad \square$$

Παράδειγμα: Η *αρμονική σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Έχουμε $a_k = \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι: αν $n > m$ τότε

$$(2.1.19)\qquad a_{m+1} + \cdots + a_n = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{n-m}{n}.$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο του Cauchy. Αν η αρμονική σειρά συγκλίνει, τότε, για $\varepsilon = \frac{1}{4}$, πρέπει να υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $N \leq m < n$ τότε

$$(2.1.20)\qquad |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \frac{1}{4}.$$

Επιλέγουμε $m = N$ και $n = 2N$. Τότε, συνδυάζοντας τις (2.1.19) και (2.1.20) παίρνουμε

$$(2.1.21)\qquad \frac{1}{4} > a_{N+1} + \cdots + a_{2N} \geq \frac{2N - N}{2N} = \frac{1}{2},$$

που είναι άτοπο. Άρα, η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Σημείωση: Το παράδειγμα της αρμονικής σειράς δείχνει ότι το αντίστροφο της Προτασης 2.1.5(α) δεν ισχύει. Αν $a_k \to 0$ δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

2.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Σε αυτήν την παράγραφο συζητάμε τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών με μη αρνητικούς όρους. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν για την ακολουθία (a_k) έχουμε $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα: πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$(2.2.1)\quad s_{n+1} - s_n = (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1} \geq 0.$$

Θεώρημα 2.2.1. *Εστω (a_k) ακολουθία με $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.*

Απόδειξη. Η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, άρα η σειρά συγκλίνει. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε, αφού είναι αύξουσα, έχουμε $s_n \to +\infty$. $\square$

Σημείωση. Είδαμε ότι μια σειρά με μη αρνητικούς όρους συγκλίνει ή αποκλίνει στο $+\infty$. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της αρμονικής σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, βλέπουμε ότι, αφού δεν συγκλίνει, αποκλίνει στο $+\infty$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty. \tag{2.2.2}$$

Θα δώσουμε μια απευθείας απόδειξη για το γεγονός ότι η ακολουθία $s_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ τείνει στο $+\infty$. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$s_{2^n}\geq 1+\frac{n}{2}\quad\text{για κάθε } n\in\mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Για $n=1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $s_2=1+\frac{1}{2}$. Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιον φυσικό n. Τότε,

$$s_{2^{n+1}}=s_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Παρατηρήστε ότι ο $s_{2^{n+1}}-s_{2^n}$ είναι ένα άθροισμα 2^n το πλήθος αριθμών και ότι ο μικρότερος από αυτούς είναι ο $\frac{1}{2^{n+1}}$. Συνεπώς,

$$s_{2^{n+1}}\geq s_{2^n}+2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}=s_{2^n}+\frac{1}{2}\geq 1+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{n+1}{2}.$$

Άρα, η $(*)$ ισχύει για τον φυσικό $n+1$. Έπεται ότι $s_{2^n}\to+\infty$. Αφού η (s_n) είναι αύξουσα και έχει υπακολουθία που τείνει στο $+\infty$, συμπεραίνουμε ότι $s_n\to+\infty$.

2.2α΄ Σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους

Πολλές φορές συναντάμε σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ των οποίων οι όροι a_k *φθίνουν* προς το 0: $a_{k+1}\leq a_k$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$ και $a_k\to 0$. Ένα κριτήριο σύγκλισης που εφαρμόζεται συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις είναι το *κριτήριο συμπύκνωσης*.

Πρόταση 2.2.2 (Κριτήριο συμπύκνωσης - Cauchy). *Εστω (a_k) μια φθίνουσα ακολουθία με $a_k>0$ και $a_k\to 0$. Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k\,a_{2^k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^ka_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$t_n=a_1+2a_2+4a_4+\cdots+2^na_{2^n} \tag{2.2.3}$$

είναι άνω φραγμένη. Έστω M ένα άνω φράγμα της (t_n). Θα δείξουμε ότι ο M είναι άνω φράγμα για τα μερικά αθροίσματα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$. Έστω $s_m=a_1+\cdots+a_m$. Ο αριθμός m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2: υπάρχει $n\in\mathbb{N}$

ώστε $2^n \leq m < 2^{n+1}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) \\ &\quad + (a_{2^n} + \cdots + a_m) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \\ &\leq M. \end{aligned}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει μη αρνητικούς όρους και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δηλαδή ότι η (s_m) είναι άνω φραγμένη: υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $s_m \leq M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για το τυχόν μερικό άθροισμα (t_n) της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} t_n &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &\leq 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &= 2s_{2^n} \leq 2M. \end{aligned}$$

Αφού η (t_n) είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 2.2.1 δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. □

Παραδείγματα

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, όπου $p > 0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k^p}$. Αφού $p > 0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k. \tag{2.2.4}$$

Η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $x_p = \frac{1}{2^{p-1}}$ Είδαμε ότι συγκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, δηλαδή αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$, δηλαδή αν $p \leq 1$.

Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0 < p \leq 1$.

(β) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$, όπου $p > 0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k(\log k)^p}$. Αφού $p > 0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log(2^k))^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}. \tag{2.2.5}$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα, αυτή συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει αν $p \leq 1$. Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ συγκλίνει αν $p > 1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0 < p \leq 1$.

2.2β′ Ο αριθμός e

Έχουμε ορίσει τον αριθμό e ως το όριο της γνησίως αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας $\alpha_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ καθώς το $n\to\infty$.

Πρόταση 2.2.3. *Ο αριθμός e ικανοποιεί την*

$$e=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}. \tag{2.2.6}$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι $0!=1$. Γράφουμε s_n για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς στο δεξιό μέλος:

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{2.2.7}$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{n}{1!}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\ &\quad +\cdots+\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]\\ &\le 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!},\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha_n\le s_n. \tag{2.2.8}$$

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι αν $k>n$ τότε

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\right]\\ &\quad +\cdots+\frac{1}{k!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\right]\\ &\ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left[\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)\right].\end{aligned}$$

Κρατώντας το n σταθερό και αφήνοντας το $k\to\infty$, βλέπουμε ότι

$$e=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=s_n. \tag{2.2.9}$$

Αφού η αύξουσα ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη από τον e, έπεται ότι η (s_n) συγκλίνει και $\lim\limits_{n\to\infty}s_n\le e$. Από την άλλη πλευρά, η (2.2.8) δείχνει ότι $e=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n\le\lim\limits_{n\to\infty}s_n$. Άρα,

$$e=\lim_{n\to\infty}s_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}, \tag{2.2.10}$$

όπως ισχυρίζεται η Πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση του e, θα δείξουμε ότι είναι άρρητος αριθμός.

Πρόταση 2.2.4. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$e = \frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}. \tag{2.2.11}$$

Δηλαδή,

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+s)!} + \cdots\right). \tag{2.2.12}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (2.2.12) με $n!$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} 0 < A &= n!\left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots . \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, από τον τρόπο ορισμού του, ο

$$A = n!\left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \tag{2.2.13}$$

είναι φυσικός αριθμός. Όμως, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^s} \\ &< \frac{2}{3} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots \leq \frac{11}{12}. \tag{2.2.14}$$

Έπεται ότι ο φυσικός αριθμός A ικανοποιεί την

$$0 < A \leq \frac{11}{12} \tag{2.2.15}$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

2.3 Γενικά κριτήρια

2.3α′ Απόλυτη σύγκλιση σειράς

Ορισμός 2.3.1. *Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *συγκλίνει. Λέμε ότι η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει υπό συνθήκη αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.*

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την (απλή) σύγκλιση.

Πρόταση 2.3.2. *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 2.1.6). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $N \leq m < n$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.3.1}$$

Τότε, για κάθε $N \leq m < n$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon. \tag{2.3.2}$$

Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. Από το Θεώρημα 2.1.6, συγκλίνει. □

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι συγκλίνει απολύτως: έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \tag{2.3.3}$$

και η τελευταία σειρά συγκλίνει (είναι της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ με $p = 2 > 1$).

(β) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{2.3.4}$$

(αρμονική σειρά). Μπορούμε όμως να δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη. Θεωρούμε πρώτα το μερικό άθροισμα

$$\begin{aligned} s_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)2m}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$s_{2m+2} = s_{2m} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} > s_{2m}, \tag{2.3.5}$$

δηλαδή, η υπακολουθία (s_{2m}) είναι γνησίως αύξουσα. Παρατηρούμε επίσης ότι η (s_{2m}) είναι άνω φραγμένη, αφού

$$s_{2m} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^2}, \tag{2.3.6}$$

και το δεξιό μέλος της (2.3.6) φράσσεται από το $(2m-1)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ η οποία συγκλίνει. Άρα η υπακολουθία (s_{2m}) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s. Τότε,

$$s_{2m-1} = s_{2m} + \frac{1}{2m} \to s + 0 = s. \tag{2.3.7}$$

Αφού οι υπακολουθίες (s_{2m}) και (s_{2m-1}) των άρτιων και των περιττών όρων της (s_m) συγκλίνουν στον s, συμπεραίνουμε ότι $s_n \to s$.

2.3β′ Κριτήρια σύγκρισης

Θεώρημα 2.3.3 (κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $M > 0$ *ώστε*

$$|a_k| \leq M \cdot b_k \tag{2.3.8}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *και ότι η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει. Τότε, η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Θέτουμε $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ και $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Από την (2.3.8) έπεται ότι

$$s_n \leq M \cdot t_n \tag{2.3.9}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, η ακολουθία (t_n) είναι άνω φραγμένη. Από την (2.3.9) συμπεραίνουμε ότι και η (s_n) είναι άνω φραγμένη. Άρα, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 2.3.4 (οριακό κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R} \tag{2.3.10}$$

και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει. Τότε, η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leq M \tag{2.3.11}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, ικανοποιείται η (2.3.8) και μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.3.3. □

Θεώρημα 2.3.5 (ισοδύναμη συμπεριφορά). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *όπου* $a_k, b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0. \tag{2.3.10}$$

Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το Θεώρημα 2.3.4.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αφού $\frac{a_k}{b_k} \to \ell > 0$, έχουμε $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{\ell}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των (a_k) και (b_k), βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα 2.3.4. □

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}. \tag{2.3.12}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το κριτήριο σύγκρισης) ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$. Παρατηρούμε ότι αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ και $b_k = \frac{1}{k^3}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \to 1. \tag{2.3.13}$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το οριακό κριτήριο σύγκρισης) ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει.

(γ) Τέλος, εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $b_k = \frac{k+1}{k^2+2}$ και $a_k = \frac{1}{k}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+2}{k^2+k} \to 1 > 0. \tag{2.3.14}$$

Από το Θεώρημα 2.3.5 έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δηλαδή αποκλίνει.

2.3γ΄ Κριτήριο λόγου και κριτήριο ρίζας

Θεώρημα 2.3.6 (Κριτήριο λόγου - D' Alembert). *Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.*

(α) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.*

(β) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell < 1$. Έστω $x > 0$ με $\ell < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq x$ γιά κάθε $k \geq N$. Δηλαδή,

$$|a_{N+1}| \leq x|a_N|, \quad |a_{N+2}| \leq x|a_{N+1}| \leq x^2|a_N| \quad \text{κλπ.} \tag{2.3.15}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$|a_k| \leq x^{k-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{x^N} \cdot x^k \tag{2.3.16}$$

γιά κάθε $k \geq N$.

Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Από την (2.3.16) βλέπουμε ότι

$$|a_k| \leq M \cdot x^k \tag{2.3.17}$$

για κάθε $k \geq N$, όπου $M = \frac{|a_N|}{x^N}$. Η σειρά $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$ συγκλίνει, διότι προέρχεται από την γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ (με απαλοιφή των πρώτων όρων της) και $0 < x < 1$. Άρα, η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει κι αυτή.

(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλαδή,

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \cdots \geq |a_N| > 0 \tag{2.3.18}$$

για κάθε $k \geq N$. Τότε, $a_k \not\to 0$ και, από την Πρόταση 2.1.5(α), η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.
□

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Παρατηρήστε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1$, ενώ η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1. \tag{2.3.19}$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

Θεώρημα 2.3.7 (κριτήριο ρίζας - Cauchy). *Έστω* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *μια σειρά πραγματικών αριθμών.*
(α) *Αν* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, *τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.*
(β) *Αν* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, *τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη (α) Επιλέγουμε $x > 0$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \leq x$ για κάθε $k \geq N$. Ισοδύναμα,

$$|a_k| \leq x^k \tag{2.3.21}$$

για κάθε $k \geq n$. Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Αφού $x < 1$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Άρα η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.
(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Δηλαδή, $|a_k| \geq 1$ τελικά. Άρα $a_k \not\to 0$ και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Για τις $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$. Η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to |x|$. Αν $|x| < 1$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| < 1$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Αν $|x| > 1$, τοτε $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| > 1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| = 1$, το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Για $x = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει. Για $x = -1$ παίρνουμε την «εναλλάσσουσα σειρά» $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leq x < 1$.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{x^2}{\sqrt[k]{k^2}} \to x^2$. Άρα, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = x^2$. Αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| = 1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Στην περίπτωση $x = \pm 1$ η σειρά παίρνει τη μορφή $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, δηλαδή συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| \leq 1$.

2.3δ′ Το κριτήριο του Dirichlet

Το κριτήριο του Dirichlet εξασφαλίζει (μερικές φορές) τη σύγκλιση μιας σειράς η οποία δεν συγκλίνει απολύτως (συγκλίνει υπό συνθήκη).

Λήμμα 2.3.8 (άθροιση κατά μέρη - Abel). *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες. Ορίζουμε $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $s_0 = 0$. Για κάθε $1 \leq m < n$, ισχύει η ισότητα*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m. \tag{2.3.22}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\
&= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m,
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.3.9 (κριτήριο Dirichlet). *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *Η (b_k) έχει θετικούς όρους και φθίνει προς το 0.*

(β) *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ της (a_k) είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|s_n| \leq M \tag{2.3.23}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. *Τότε, η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (α), βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{\varepsilon}{2M} > b_N \geq b_{N+1} \geq b_{N+2} \geq \cdots > 0. \tag{2.3.24}$$

Άν $N \leq m < n$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\right| \\ &\leq \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n| + |s_{m-1}||b_m| \\ &\leq M \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m \\ &= 2M b_m < 2M \frac{\varepsilon}{2M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα (κριτήριο Leibniz)

Σειρές με εναλλασσόμενα πρόσημα $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$, *όπου η* $\{b_k\}$ *φθίνει προς το* 0.

Τα μερικά αθροίσματα της $((-1)^{k-1})$ είναι φραγμένα, αφού $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος και $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός. Άρα, κάθε τέτοια σειρά συγκλίνει. Παράδειγμα, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

2.3ε′ Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών*

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση: είναι δηλαδή άθροισμα σειράς της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots , \tag{2.3.25}$$

όπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$.

Παρατηρήστε ότι κάθε σειρά αυτής της μορφής συγκλίνει και ορίζει έναν πραγματικό αριθμό $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Πράγματι, η γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ συγκλίνει και επειδή $0 \leq \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{9}{10^k}$ για κάθε $k \geq 1$, η σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης σειρών.

Λήμμα 2.3.10. *Αν $N \geq 1$ και $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ για κάθε $k \geq N$, τότε*

$$0 \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.26}$$

Η αριστερή ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 0$ για κάθε $k \geq N$, ενώ η δεξιά ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 9$ για κάθε $k \geq N$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \geq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{0}{10^k} = 0. \tag{2.3.27}$$

Αν $a_k = 0$ για κάθε $k \geq N$, τότε $\sum\limits_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = 0$. Αντίστροφα, αν $a_m \geq 1$ για κάποιον $m \geq N$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \\
&\geq \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{0}{10^k} \\
&= \frac{1}{10^m} > 0.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^N} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots \right) = \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.28}$$

Αν $a_k = 9$ για κάθε $k \geq N$, τότε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{N-1}}. \tag{2.3.29}$$

Αντίστροφα, αν $a_m \leq 8$ για κάποιον $m \geq N$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \\
&\leq \frac{8}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^m} - \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{N-1}} \\
&< \frac{1}{10^{N-1}},
\end{aligned}$$

κι αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. □

Λήμμα 2.3.11. *Έστω n μη αρνητικός ακέραιος και έστω $N \geq 0$. Τότε υπάρχουν ακέραιοι $p_0, p_1, \dots p_n$ ώστε: $p_k \in \{0,1,\dots,9\}$ για $0 \leq k \leq N-1$, $p_N \geq 0$ και*

$$n = 10^N p_N + 10^{N-1} p_{N-1} + \cdots + 10 p_1 + p_0. \tag{2.3.30}$$

Απόδειξη. Διαιρώντας διαδοχικά με 10 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_0 \leq 9 \quad \text{και} \quad q_1 \geq 0\\
q_1 &= 10q_2 + p_1, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_1 \leq 9 \quad \text{και} \quad q_2 \geq 0\\
q_2 &= 10q_3 + p_2, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_2 \leq 9 \quad \text{και} \quad q_3 \geq 0\\
\vdots & \quad \vdots\\
q_{N-1} &= 10p_N + p_{N-1}, \quad \text{όπου} \quad 0 \leq p_{N-1} \leq 9 \quad \text{και} \quad q_N \geq 0.
\end{aligned}$$

Επαγωγικά, έχουμε:

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0 = 10^2 q_2 + 10p_1 + p_0 = 10^3 q_3 + 10^2 p_2 + 10 p_1 + p_0 = \cdots\\
&= 10^N q_N + 10^{N-1} p_{N-1} + 10 p_1 + p_0.
\end{aligned}$$

Θέτοντας $p_N = q_N$ έχουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 2.3.10 και 2.3.11 θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση.

Θεώρημα 2.3.12. (α) *Κάθε πραγματικός αριθμός $x \geq 0$ γράφεται σαν άθροισμα «δεκαδικής σειράς»:*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots, \tag{2.3.31}$$

όπου $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_k \in \{0,1,\dots,9\}$ για κάθε $k \geq 1$. Τότε, λέμε ότι ο x έχει τη δεκαδική παράσταση $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$.
(β) *Οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{10^N}$ όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geq 0$ έχουν ακριβώς δύο δεκαδικές παραστάσεις:*

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_N 9999\cdots = a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}(a_N+1)000\cdots \tag{2.3.32}$$

Όλοι οι άλλοι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν μοναδική δεκαδική παράσταση.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \geq 0$. Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος a_0, το ακέραιο μέρος του x, ώστε:

$$a_0 \leq x < a_0 + 1. \tag{2.3.33}$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[a_0, a_0+1)$ σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά. Άρα, υπάρχει $a_1 \in \{0,1,\dots,9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leq x < a_0 + \frac{a_1+1}{10}. \tag{2.3.34}$$

Χωρίζουμε το νέο αυτό διάστημα (που έχει μήκος $\frac{1}{10}$) σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά, άρα υπάρχει $a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}. \tag{2.3.35}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $k \geq 1$ βρίσκουμε $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k + 1}{10^k}. \tag{2.3.36}$$

Από την κατασκευή, τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ η οποία δημιουργείται, ικανοποιούν την $s_n \leq x < s_n + \frac{1}{10^n}$. Άρα,

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}. \tag{2.3.37}$$

Έπεται ότι $s_n \to x$, δηλαδή

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}. \tag{2.3.38}$$

(β) Ας υποθέσουμε ότι κάποιος $x \geq 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Δηλαδή,

$$x = a_0.a_1a_2\cdots = b_0.b_1b_2\cdots, \tag{2.3.39}$$

όπου $a_0, b_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k, b_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ για κάθε $k \geq 1$, και υπάρχει $m \geq 0$ με την ιδιότητα $a_m \neq b_m$.

Έστω $N \geq 0$ ο ελάχιστος m για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Δηλαδή,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \dots,\ a_{N-1} = b_{N-1},\ a_N \neq b_N. \tag{2.3.40}$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_N < b_N$. Από την

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \tag{2.3.41}$$

και από το Λήμμα 2.3.10 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{10^N} &\leq \frac{b_N - a_N}{10^N} \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \\ &\leq \frac{1}{10^N} - 0 \\ &= \frac{1}{10^N}. \end{aligned}$$

Άρα, όλες οι ανισότητες είναι ισότητες. Δηλαδή,

$$b_N - a_N = 1 \tag{2.3.42}$$

και

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}=\frac{1}{10^N},\qquad \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k}{10^k}=0. \tag{2.3.43}$$

Από το Λήμμα 2.3.10,

$$\begin{aligned} b_N &= a_N+1,\\ a_k &= 9,\ \text{αν } k\geq N+1,\\ b_k &= 0,\ \text{αν } k\geq N+1. \end{aligned}$$

Άρα, αν ο x έχει περισσότερες από μία δεκαδικές παραστάσεις, τότε έχει ακριβώς δύο παραστάσεις, τις ακόλουθες:

$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_N999\cdots=a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}(a_N+1)\ 00\cdots \tag{2.3.44}$$

Τότε, ο x ισούται με

$$\begin{aligned} x &= a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{10^{N-1}}+\frac{a_N+1}{10^N}\\ &= \frac{10^Na_0+10^{N-1}a_1+\cdots+10a_{N-1}+a_N+1}{10^N}\\ &= \frac{m}{10^N} \end{aligned}$$

για κάποιους $m\in\mathbb{N}$ και $N\geq 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x=\frac{m}{10^N}$, όπου $m\in\mathbb{N}$ και $N\geq 0$. Από το Λήμμα 2.3.11 μπορούμε να γράψουμε

$$m=10^Np_N+10^{N-1}p_{N-1}+\cdots+10p_1+p_0, \tag{2.3.45}$$

όπου $p_N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $p_k\in\{0,1,\ldots,9\}$ για $0\leq k\leq N-1$. Αν p_m είναι ο πρώτος μη μηδενικός όρος της ακολουθίας $p_0,p_1,\ldots,p_{N-1},p_N$, τότε

$$\begin{aligned} x &= \frac{10^Np_N+\cdots+10^mp_m}{10^N}\\ &= p_N+\frac{p_{N-1}}{10}+\cdots+\frac{p_m}{10^{N-m}}\\ &= p_N.p_{N-1}\cdots p_m000\cdots=p_N.p_{N-1}\cdots(p_m-1)\ 99\cdots. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (β). □

2.4 Δυναμοσειρές

Ορισμός 2.4.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{2.4.1}$$

λέγεται *δυναμοσειρά* με συντελεστές a_k.

Ο x είναι μια παράμετρος από το $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε εδώ είναι: για δοθείσα ακολουθία συντελεστών (a_k) να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η αντίστοιχη δυναμοσειρά συγκλίνει. Για κάθε τέτοιο x λέμε ότι η *δυναμοσειρά συγκλίνει στο* x.

Πρόταση 2.4.2. *Εστω* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *μια δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k.

(α) *Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο* $y \neq 0$ *και αν* $|x| < |y|$, *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο* x.

(β) *Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* y *και αν* $|x| > |y|$, *τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* x.

Απόδειξη. (α) Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k y^k \to 0$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_k y^k| \leq 1 \quad \text{για κάθε } k \geq N. \tag{2.4.2}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < |y|$. Για κάθε $k \geq N$ έχουμε

$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^k \leq \left|\frac{x}{y}\right|^k. \tag{2.4.3}$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=N}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^k$ συγκλίνει, διότι $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται το συμπέρασμα.

(β) Αν η δυναμοσειρά συνέκλινε στο x, από το (α) θα συνέκλινε απολύτως στο y, άτοπο. □

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Με βάση την Πρόταση 2.4.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι «ουσιαστικά» ένα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0 (ή, ενδεχομένως, το $\{0\}$ ή το $\mathbb{R}$). Αυτό φαίνεται ως εξής: ορίζουμε

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}. \tag{2.4.4}$$

Το σύνολο στο δεξιό μέλος είναι μη κενό, αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει στο 0. Η Πρόταση 2.4.2 δείχνει ότι αν $|x| < R$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x. Πράγματι, από τον ορισμό του R υπάρχει y με $R \geq |y| > |x|$ ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει στο y, οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 2.4.2(α) στο x. Από τον ορισμό του R είναι φανερό ότι αν $|x| > R$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x. Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$.

Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Η συζήτηση που κάναμε δείχνει ότι το *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων στα οποία συγκλίνει, προκύπτει από το $(-R, R)$ με την προσθήκη (ίσως) του R ή του $-R$ ή των $\pm R$. Στην περίπτωση που $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in R$. Στην περίπτωση που $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο σημείο $x = 0$.

Το πρόβλημα είναι λοιπόν τώρα το εξής: πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την *ακτίνα σύγκλισης* μιας δυναμοσειράς συναρτήσει των συντελεστών της. Μια απάντηση μας δίνει το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$ με τη σύμβαση ότι $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$.*

(α) *Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.*

(β) *Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $0 < a < +\infty$ (οι περιπτώσεις $a = 0$ και $a = +\infty$ αφήνονται σαν άσκηση).

(α) Αν $|x| < R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| a = \frac{|x|}{R} < 1. \tag{2.4.5}$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $|x| > R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \frac{|x|}{R} > 1. \tag{2.4.6}$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 2.4.4. Το Θεώρημα 2.4.3 δεν μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αμέσως τις συμβαίνει στα «άκρα $\pm R$ του διαστήματος σύγκλισης». Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, μπορεί η δυναμοσειρά να συγκλίνει σε ένα, σε κανένα ή και στα δύο άκρα.

1. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

οι οποίες αποκλίνουν.

2. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

οι οποίες συγκλίνουν.

3. Για την $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Η πρώτη αποκλίνει, ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου στη θέση του κριτηρίου της ρίζας.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *μια δυναμοσειρά με συντελεστές* $a_k \neq 0$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει το* $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a$ *και θέτουμε* $R = \frac{1}{a}$.
(α) *Αν* $x \in (-R, R)$ *η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο* x.
(β) *Αν* $x \notin [-R, R]$ *η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* x.

Απόδειξη. Εφαρμόστε το κριτήριο του λόγου για τη σύγκλιση σειρών. □

2.5 Ασκήσεις

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

2. Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

3. Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

4. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

5. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

6. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

7. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

8. Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

9. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

10. Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

11. Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

12. Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

13. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν $p < -1$.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. Δείξτε ότι αν $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$ τότε $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

2. Δείξτε ότι

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

3. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

4. Εξετάστε για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού x συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$.

5. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

6. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \cdots$$

και
$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots.$$

7. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2}-k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k}-1)^k$.

8. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1),\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^2},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}.$$

9. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p,q,x\in\mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0<p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^p-k^q}$ $(0<q<p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k-q^k}$ $(0<q<p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p\left(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)$.

10. Έστω ότι $a_k\geq 0$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+k^2a_k}$ συγκλίνει.

11. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k=\frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k=\frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

12. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^p}$, όπου $p\in\mathbb{R}$.

13. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε
$$s=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k.$$
Δείξτε ότι $0\leq(-1)^n(s-s_n)\leq a_{n+1}$.

14. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $ka_k\to 0$.

15. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

16. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

17. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

18. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

Γ. Ασκήσεις*

1. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

2. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geq 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

3. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Δείξτε ότι: για $1 \leq m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geq 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

4. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

5. Υποθέτουμε ότι $a_k \geq 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$b_k = \frac{1}{k} \sum_{m=k+1}^{2k} a_m.$$

Δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει. [*Υπόδειξη:* Αν s_n και t_n είναι τα μερικά αθροίσματα των δύο σειρών, δοκιμάστε να συγκρίνετε τα s_{2n} και t_n.]

6. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών αριθμών ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ και $a_k \to 0$. Δείξτε ότι αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε υπάρχουν φυσικοί $m \leq n$ ώστε

$$\alpha < \sum_{k=m}^{n} a_k < \beta.$$

7. Δείξτε ότι αν $0 \leq \alpha < \beta$ τότε υπάρχουν φυσικοί $m \leq n$ ώστε

$$\alpha < \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{n} < \beta.$$

Κεφάλαιο 3

Ομοιόμορφη συνέχεια

3.1 Ομοιόμορφη συνέχεια

Πριν δώσουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, θα εξετάσουμε πιο προσεκτικά δύο απλά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, κάτι που εύκολα επιβεβαιώνουμε αυστηρά χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας:
Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta > 0$ ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \ \ \text{δηλαδή} \ \ |x - x_0| < \varepsilon. \tag{3.1.1}$$

Η επιλογή του δ είναι προφανής: αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι το δ που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από το ε που δόθηκε και όχι από το συγκεκριμένο σημείο x_0. Η συνάρτηση f μεταβάλλεται με τον «ίδιο ρυθμό» σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(β) Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι πάλι γνωστό ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού $g = f \cdot f$). Αν θελήσουμε να το επιβεβαιώσουμε με τον εψιλοντικό ορισμό, θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, και ζητάμε $\delta > 0$ με την ιδιότητα

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon. \tag{3.1.2}$$

Ένας τρόπος για να επιλέξουμε κατάλληλο δ είναι ο εξής. Συμφωνούμε από την αρχή ότι θα πάρουμε $0 < \delta \leq 1$, οπότε

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq (|x| + |x_0|) \cdot |x - x_0| \\ &\leq (2|x_0| + 1)|x - x_0|. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\}, \tag{3.1.3}$$

τότε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + 1)\delta \leq \varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Άρα, η g είναι συνεχής στο x_0. Παρατηρήστε όμως ότι το δ που επιλέξαμε δεν εξαρτάται μόνο από το ε που μας δόθηκε, αλλά και από το σημείο x_0 στο οποίο ελέγχουμε την συνέχεια της g. Η επιλογή που κάναμε στην (3.1.3) δείχνει ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται το x_0 από το 0, τόσο πιο μικρό πρέπει να επιλέξουμε το δ.

Θα μπορούσε βέβαια να πει κανείς ότι ίσως υπάρχει καλύτερος τρόπος επιλογής του δ, ακόμα και ανεξάρτητος από το σημείο x_0. Ας δούμε το ίδιο πρόβλημα με έναν δεύτερο τρόπο. Θεωρούμε $x_0 > 0$ και $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varepsilon < x_0^2$, αφού τα μικρά ε είναι αυτά που παρουσιάζουν ενδιαφέρον. Μπορούμε επίσης να κοιτάμε μόνο $x > 0$, αφού μας ενδιαφέρει τι γίνεται κοντά στο x_0 το οποίο έχει υποτεθεί θετικό. Η ανισότητα $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ ικανοποιείται αν και μόνο αν $x_0^2 - \varepsilon < x^2 < x_0^2 + \varepsilon$, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}. \tag{3.1.5}$$

Ισοδύναμα, αν

$$-\left(x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}\right) < x - x_0 < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0. \tag{3.1.6}$$

Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} |x - x_0| &< \min\left\{x_0 - \sqrt{x_0^2 - \varepsilon}, \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0\right\} \\ &= \min\left\{\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 - \varepsilon} + x_0}, \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}\right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}. \end{aligned}$$

Υποθέσαμε ότι $x_0^2 > \varepsilon$. Άρα,

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0} < \frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0} < \frac{x_0^2}{x_0} = x_0. \tag{3.1.7}$$

Αν λοιπόν $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2+\varepsilon}+x_0}$, τότε $|x - x_0| < x_0 \Rightarrow x > 0$ και ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. Δηλαδή, αν $0 < \varepsilon < x_0^2$ τότε η καλύτερη επιλογή του δ στο σημείο x_0 είναι

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0}. \tag{3.1.8}$$

Δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε την (3.1.2) αν επιλέξουμε μεγαλύτερο δ.

Αν τα προηγούμενα δύο επιχειρήματα δεν είναι απολύτως πειστικά, δίνουμε κι ένα τρίτο.

Ισχυρισμός. Θεωρούμε την $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. **Δεν** υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.

Παρατηρήστε ότι ο ισχυρισμός είναι ισοδύναμος με το εξής: για δοθέν $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει κάποια *ομοιόμορφη επιλογή* του δ που να μας επιτρέπει να ελέγχουμε την (3.1.2) σε *κάθε* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y-x| < \delta$ τότε $|g(y)-g(x)| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|x + \frac{\delta}{2} - x\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$, πρέπει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η

$$\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon. \tag{3.1.9}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x > 0$ πρέπει να ισχύει η

$$\delta x < \delta x + \frac{\delta^2}{4} = \left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon. \tag{3.1.10}$$

Όμως τότε, για κάθε $x > 0$ θα είχαμε

$$x < \frac{\varepsilon}{\delta}. \tag{3.1.11}$$

Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{R}$ θα ήταν άνω φραγμένο. $\square$

Τα παραδείγματα που δώσαμε δείχνουν μια «παράλειψη» μας στον ορισμό της συνέχειας. Ένας πιο προσεκτικός ορισμός θα ήταν ο εξής:

> Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο συμβολισμός $\delta(\varepsilon, x_0)$ θα έδειχνε ότι το δ εξαρτάται τόσο από το ε όσο και από το σημείο x_0. Οι συναρτήσεις (όπως η $f(x) = x$) που μας επιτρέπουν να επιλέγουμε το δ ανεξάρτητα από το x_0 λέγονται *ομοιόμορφα συνεχείς*:

Ορισμός 3.1.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$\textit{αν} \quad x, y \in A \quad \textit{και} \quad |x - y| < \delta \quad \textit{τότε}\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.1.12}$$

Παραδείγματα

(α) Η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Η $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ του (β), περιορισμένη όμως στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, όπου $M > 0$. Τότε, για κάθε $x, y \in [-M, M]$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| = |y^2 - x^2| = |x + y| \cdot |y - x| \leq 2M \cdot |y - x|. \tag{3.1.13}$$

Δίνεται $\varepsilon > 0$. Αν επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$ τότε η (3.1.13) δείχνει ότι αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| \leq 2M \cdot |y - x| < 2M\delta = \varepsilon. \tag{3.1.14}$$

Δηλαδή, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$.

Το παράδειγμα (γ) οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *Lipschitz συνεχής* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \tag{3.1.15}$$

Πρόταση 3.1.3. *Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ για κάθε $x, y \in A$. Αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε, για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| < M\delta = \varepsilon. \tag{3.1.16}$$

Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να εξασφαλίζουμε ότι μια συνάρτηση είναι Lipschitz συνεχής (άρα, ομοιόμορφα συνεχής).

Πρόταση 3.1.4. *Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε: $|f'(x)| \leq M$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του I. Τότε, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M.*

Απόδειξη. Έστω $x < y$ στο I. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x, y)$ ώστε

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x). \tag{3.1.17}$$

Τότε,

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| \cdot |y - x| \leq M|y - x|. \tag{3.1.18}$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.2, η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά M. □

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας, είναι λογικό να περιμένουμε ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις είναι συνεχείς. Αυτό αποδεικνύεται με απλή σύγκριση των δύο ορισμών:

Πρόταση 3.1.5. *Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Πράγματι: έστω $x_0 \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε αυτό το δ. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (πάρτε $y = x_0$). Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0. □

3.2 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών

Θυμηθείτε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών: αν $f : A \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας έχει ως εξής:

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει*

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω (x_n), (y_n) δύο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } x, y \in A \text{ και } |x - y| < \delta \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3.2.2}$$

Αφού $x_n - y_n \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $|x_n - y_n| < \delta$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε, $|x_n - y_n| < \delta$ και $x_n, y_n \in A$, οπότε η (3.2.2) δίνει

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon. \tag{3.2.3}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αντίστροφα: ας υποθέσουμε ότι

$$\text{αν } x_n, y_n \in A \text{ και } x_n - y_n \to 0 \quad \text{τότε} \quad f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.2.4}$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω ότι δεν είναι. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in A$ με $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, y_n \in A$ ώστε

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{αλλά} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon. \tag{3.2.5}$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n), (y_n). Από την κατασκευή έχουμε $x_n - y_n \to 0$, αλλά από την $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0, 1]$. Η f είναι συνεχής αλλά *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για να το δούμε, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n),

(y_n) στο $(0,1]$ που να ικανοποιούν την $x_n - y_n \to 0$ αλλά να μην ικανοποιούν την $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \to 0$.

Παίρνουμε $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{2n}$. Τότε, $x_n, y_n \in (0,1]$ και

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0 \tag{3.2.6}$$

αλλά

$$f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - 2n = -n \to -\infty. \tag{3.2.7}$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$ και $y_n = n$. Τότε,

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0 \tag{3.2.8}$$

αλλά

$$g(x_n) - g(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0. \tag{3.2.9}$$

Άρα, η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Ορίζουμε $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f είναι επιπλέον φραγμένη. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δείτε, θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad \text{και} \quad y_n = \sqrt{n\pi}. \tag{3.2.10}$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0, \tag{3.2.11}$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2 \tag{3.2.12}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 3.2.1 έπεται το συμπέρασμα. Υπάρχουν λοιπόν φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $\cos(x^2)$ για να δείτε το λόγο: για μεγάλα x, η f ανεβαίνει από την τιμή -1 στην τιμή 1 και κατεβαίνει από την τιμή 1 στην τιμή -1 όλο και πιο γρήγορα - ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται πολύ μεγάλος).

3.3 Ομοιόμορφη συνέχεια συνεχών συναρτήσεων σε κλειστά διαστήματα

Στην παράγραφο §3.1 είδαμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I = \mathbb{R}$ αλλά είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $I = [-M, M]$, $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι το M). Αυτό που ισχύει γενικά είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής:

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a,b]$ με $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού $a \leq x_n, y_n \leq b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες ακολουθίες. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \leq x_{k_n} \leq b$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι $a \leq x \leq b$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} \to x \in [a,b]. \tag{3.3.1}$$

Παρατηρήστε ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$, άρα

$$y_{k_n} = x_{k_n} - (x_{k_n} - y_{k_n}) \to x - 0 = x. \tag{3.3.2}$$

Από τη συνέχεια της f στο x έπεται ότι

$$f(x_{k_n}) \to f(x) \quad \text{και} \quad f(y_{k_n}) \to f(x). \tag{3.3.3}$$

Δηλαδή,

$$f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to x - x = 0. \tag{3.3.4}$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. □

Παρατήρηση. Το γεγονός ότι η f ήταν ορισμένη στο **κλειστό διάστημα** $[a,b]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορέσαμε να βρούμε συγκλίνουσες υπακολουθίες των (x_n), (y_n) (θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Δεύτερον, μπορούσαμε να πούμε ότι το κοινό όριο x αυτών των υπακολουθιών εξακολουθεί να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού $[a,b]$ της f. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή το εξής:

$$\text{αν } a \leq z_n \leq b \text{ και } z_n \to z, \text{ τότε } a \leq z \leq b. \tag{3.3.5}$$

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις έχουν την εξής «καλή ιδιότητα»: απεικονίζουν ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. Αυτό δεν ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις: θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0,1]$. Η $x_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0,1]$, όμως η $f(x_n) = n$ δεν είναι ακολουθία Cauchy.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) ακολουθία Cauchy στο A. Τότε, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.*

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα υπάρχει $n_0(\delta)$ ώστε

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\delta), \quad \text{τότε} \quad |x_n - x_m| < \delta. \tag{3.3.6}$$

Όμως τότε,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{3.3.7}$$

Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\text{αν } m, n \geq n_0(\delta) \quad \text{τότε} \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon. \tag{3.3.8}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy. □

Είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα εξετάσουμε το εξής ερώτημα: Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b);

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b) αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Ορίζουμε μια «επέκταση» g της f στο $[a, b]$, θέτοντας: $g(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $g(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ και $g(x) = f(x)$ αν $x \in (a, b)$.

Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f είναι κι αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a, b]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $x, y \in (a, b)$ με $|x - y| < \delta$. Τότε, από τον ορισμό της g έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |g(x) - g(y)| < \varepsilon. \tag{3.3.9}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a, b) και δείχνουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to a^+} f(x)$ (η ύπαρξη του άλλου πλευρικού ορίου αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο).

Θα δείξουμε ότι αν (x_n) είναι ακολουθία στο (a, b) με $x_n \to a$, τότε η $(f(x_n))$ συγκλίνει. Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 3.3.2: η (x_n) συγκλίνει, άρα η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy, άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ℓ.

Επίσης, το όριο της $(f(x_n))$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της (x_n): έστω (y_n) μια άλλη ακολουθία στο (a, b) με $y_n \to a$. Τότε, $x_n - y_n \to 0$. Από το Θεώρημα 3.2.1,

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0. \tag{3.3.10}$$

Ξέρουμε ήδη ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, άρα

$$f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \to \ell + 0 = \ell. \tag{3.3.11}$$

Από την αρχή της μεταφοράς (για το όριο συνάρτησης) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$.
□

Παράδειγμα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,1]$.

Αν ήταν, θα υπήρχε $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \tag{3.3.12}$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. Ειδικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θα είχαμε

$$\left| f\left(\frac{1}{n^2}\right) - f(0) \right| = \frac{1}{n} = n \cdot \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| \leq M \cdot \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right|. \tag{3.3.13}$$

Δηλαδή, $n \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{N}$ θα ήταν άνω φραγμένο.

(β) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι Lipschitz συνεχής στο $[1,+\infty)$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν $x \geq 1$ τότε

$$|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}, \tag{3.3.14}$$

δηλαδή η f έχει φραγμένη παράγωγο στο $[1,+\infty)$. Από την Πρόταση 3.1.4 είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $1/2$.

(γ) Ας δούμε τώρα την ίδια συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,+\infty)$. Η f δεν είναι Lipschitz συνεχής στο $[0,+\infty)$ ούτε μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.1. Είδαμε όμως ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$ και ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Αυτό φτάνει για να δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x-y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[0,1]$).

Επίσης, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε: αν $x, y \in [1,+\infty)$ και $|x-y| < \delta_2$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο $[1,+\infty)$).

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Έστω $x < y \in [0,+\infty)$ με $|x-y| < \delta$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) Αν $0 \leq x < y \leq 1$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|x-y| < \delta_1$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(ii) Αν $1 \leq x < y$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|x-y| < \delta_2$ άρα $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

(iii) Αν $x < 1 < y$ και $|x-y| < \delta$, παρατηρούμε ότι $|x-1| < \delta$ και $|1-y| < \delta$. Όμως, $x, 1 \in [0,1]$ και $1, y \in [1,+\infty)$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(1)| + |f(1) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3.4 Συστολές – θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 3.4.1. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται *συστολή* αν υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|. \tag{3.4.1}$$

Προφανώς, κάθε συστολή είναι Lipschitz συνεχής.

Θεώρημα 3.4.2 (θεώρημα σταθερού σημείου). *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συστολή. Υπάρχει μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα*

$$f(y) = y. \tag{3.4.2}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $0 < M < 1$ ώστε $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Η f είναι Lipschitz συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) μέσω της

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.4.3}$$

Τότε,

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq M|x_n - x_{n-1}| \tag{3.4.4}$$

για κάθε $n \geq 2$. Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι

$$|x_{n+1} - x_n| \leq M^{n-1}|x_2 - x_1| \tag{3.4.5}$$

για κάθε $n \geq 2$. Έπεται ότι αν $n > m$ στο $\mathbb{N}$, τότε

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \\ &\leq (M^{n-2} + \cdots + M^{m-1})|x_2 - x_1| \\ &= \frac{1 - M^{n-m}}{1 - M} M^{m-1}|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{M^{m-1}}{1 - M}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Αφού $0 < M < 1$, έχουμε $M^m \to 0$. Άρα, για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε $\frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2 - x_1| < \varepsilon$, και συνεπώς, $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Επομένως, η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και αυτό σημαίνει ότι συγκλίνει: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $x_n \to y$. Θα δείξουμε ότι $f(y) = y$: από την $x_n \to y$ και τη συνέχεια της f στο y βλέπουμε ότι $f(x_n) \to f(y)$. Όμως $x_{n+1} = f(x_n)$ και $x_{n+1} \to y$, άρα $f(x_n) \to y$. Από τη μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας προκύπτει η $f(y) = y$.

Το y είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της f. Έστω $z \neq y$ με $f(z) = z$. Τότε,

$$0 < |z - y| = |f(z) - f(y)| \leq M|z - y|, \tag{3.4.6}$$

δηλαδή $1 \leq M$, το οποίο είναι άτοπο. □

3.5 Ασκήσεις

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

3. Αν η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη στο $(0,1)$, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$.

4. Αν η (x_n) είναι ακολουθία Cauchy και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η $(f(x_n))$ είναι ακολουθία Cauchy.

5. Αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,1)$, τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ υπάρχει.

6. Θεωρούμε τις $f(x) = x$ και $g(x) = \sin x$. Οι f και g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$, όμως η fg δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

7. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $x > 0$ και $f(x) = 2x$ αν $x \leq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. Κάθε φραγμένη και συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. Έστω $X \subseteq R$. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in X$,

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|.$$

Δείξτε ότι αν η $f : X \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ισχύει το αντίστροφο;

2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b). Δείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz αν και μόνο αν η f' είναι φραγμένη.

3. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ και $f(x) = x^{1/n}$, $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz. Είναι ομοιόμορφα συνεχής;

4. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν συνθήκη Lipschitz:

(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 0$.

(β) $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$.

5. Έστω $f : [a,b] \to [m,M]$ και $g : [m,M] \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

8. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

11. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.
(β) Δείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

12. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\hat{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ ώστε $\hat{f}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (a, b)$.

13. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.

(ii) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.

(iii) $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

(v) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(vi) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(vii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.

(viii) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Γ. Ασκήσεις*

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : (0, 1) \cup (1, 2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in (0, 1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1, 2)$ είναι συνεχής αλλά δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το $[a, b]$ σε πεπερασμένα το πλήθος διαδοχικά υποδιαστήματα του ιδίου μήκους έτσι ώστε: αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη και μονότονη συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική συνάρτηση. Δηλαδή, υπάρχει $T > 0$ ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

5. Έστω $X \subset \mathbb{R}$ φραγμένο σύνολο και $f : X \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in X$.

6. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \inf\{|x-a| : a \in A\}$$

($f(x)$ είναι η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι

(α) $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

(β) η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Κεφάλαιο 4

Ολοκλήρωμα Riemann

4.1 Ο ορισμός του Darboux

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann για **φραγμένες** συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα. Για μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με μη αρνητικές τιμές, θα θέλαμε το ολοκλήρωμα να δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα $y = 0$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Ορισμός 4.1.1. (α) Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. **Διαμέριση** του $[a, b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \tag{4.1.1}$$

του $[a, b]$ με $x_0 = a$ και $x_n = b$. Θα υποθέτουμε πάντα ότι τα $x_k \in P$ είναι διατεταγμένα ως εξής:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b. \tag{4.1.2}$$

Θα γράφουμε

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \tag{4.1.3}$$

για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη. Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό, κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία: το a και το b (τα άκρα του $[a, b]$).

(β) Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε **πλάτος** της διαμέρισης P το μεγαλύτερο από τα μήκη αυτών των υποδιαστημάτων. Δηλαδή, το πλάτος της διαμέρισης ισούται με

$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}. \tag{4.1.4}$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε να ισαπέχουν τα x_k (τα n υποδιαστήματα δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο μήκος).

(γ) Η διαμέριση P_1 λέγεται **εκλέπτυνση** της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη κάποιων (πεπερασμένων το πλήθος) σημείων. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε επίσης ότι η P_1 είναι *λεπτότερη* από την P.

(δ) Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Η **κοινή εκλέπτυνση** των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$. Εύκολα βλέπουμε ότι η P είναι διαμέριση του $[a, b]$ και ότι αν P' είναι μια διαμέριση λεπτότερη τόσο από την P_1 όσο και από την P_2 τότε $P' \supseteq P$ (δηλαδή, η $P = P_1 \cup P_2$ είναι η μικρότερη δυνατή διαμέριση του $[a, b]$ που εκλεπτύνει ταυτόχρονα την P_1 και την P_2).

Θεωρούμε τώρα μια **φραγμένη** συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Η P διαμερίζει το $[a, b]$ στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f, P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \tag{4.1.5}$$

και

$$M_k(f, P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}. \tag{4.1.6}$$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$, άρα είναι φραγμένη σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$. Για κάθε k, το σύνολο $\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα έχει supremum και infimum.

Για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$ ορίζουμε τώρα το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P με τον εξής τρόπο:

$$U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.7}$$

είναι το **άνω άθροισμα της f ως προς P**, και

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \tag{4.1.8}$$

είναι το **κάτω άθροισμα της f ως προς P**.

Από τις (4.1.7) και (4.1.8) βλέπουμε ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f, P) \leq U(f, P) \tag{4.1.9}$$

αφού $m_k \leq M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Σε σχέση με το «εμβαδόν» που προσπαθούμε να ορίσουμε, πρέπει να σκεφτόμαστε το κάτω άθροισμα $L(f, P)$ σαν μια *προσέγγιση από κάτω* και το άνω άθροισμα $U(f, P)$ σαν μια *προσέγγιση από πάνω*.

Θα δείξουμε ότι ισχύει μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα από την (4.1.9):

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f, P_1) \leq U(f, P_2). \tag{4.1.10}$$

Παρατηρήστε ότι η (4.1.9) είναι ειδική περίπτωση της (4.1.10): αρκεί να πάρουμε $P = P_1 = P_2$ στην Πρόταση 4.1.2.

Η απόδειξη της Πρότασης 4.1.2 θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < y < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$, τότε*

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P). \tag{4.1.11}$$

Δηλαδή, με την προσθήκη ενός σημείου y στην διαμέριση P, το άνω άθροισμα της f «μικραίνει» ενώ το κάτω άθροισμα της f «μεγαλώνει».

Απόδειξη του Λήμματος 4.1.3. Θέτουμε

$$m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq y\} \tag{4.1.12}$$

και

$$m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leq x \leq x_{k+1}\}. \tag{4.1.13}$$

Τότε, $m_k \leq m_k^{(1)}$ και $m_k \leq m_k^{(2)}$ (άσκηση: αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leq \inf A$). Γράφουμε

$$\begin{aligned}
L(f, P_1) &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) + \cdots \\
&\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\
&\geq [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(y - x_k) + m_k(x_{k+1} - y) + \cdots \\
&\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\
&= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \cdots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\
&= L(f, P).
\end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $U(f, P_1) \leq U(f, P)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.2. Για να αποδείξουμε την (4.1.10) θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με διαδοχική προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.1.3 πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leq L(f, P)$.

Όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leq U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leq U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f, P_1) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, P_2). \tag{4.1.14}$$ □

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$A(f) = \Big\{ L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\} \tag{4.1.15}$$

και

$$B(f)=\Big\{U(f,Q):Q \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}. \tag{4.1.16}$$

Από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε: για κάθε $a\in A(f)$ και κάθε $b\in B(f)$ ισχύει $a\leq b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\sup A(f)\leq \inf B(f)$ (άσκηση). Αν λοιπόν ορίσουμε σαν **κάτω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\Big\{L(f,P):P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\} \tag{4.1.17}$$

και σαν **άνω ολοκλήρωμα** της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\Big\{U(f,Q):Q \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}, \tag{4.1.18}$$

έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.1.19}$$

Ορισμός 4.1.4. Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=I=\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.1.20}$$

Ο αριθμός I (η κοινή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$) λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f. \tag{4.1.21}$$

4.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι δύσχρηστος: δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσει κανείς για να δει αν μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Συνήθως, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

Θεώρημα 4.2.1 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f,P_\varepsilon)-L(f,P_\varepsilon)<\varepsilon. \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.2.2}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος ως supremum του $A(f)$ και από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει διαμέριση $P_1 = P_1(\varepsilon)$ του $[a, b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.3}$$

Ομοίως, από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση $P_2 = P_2(\varepsilon)$ του $[a, b]$ ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f, P_2) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2.4}$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$. Τότε, από την Πρόταση 4.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned} U(f, P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq U(f, P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leq U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4.2.5}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a, b]$ ώστε

$$U(f, P_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{4.2.6}$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} f(x)dx &\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(f, P_\varepsilon) \\ &< L(f, P_\varepsilon) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx, \tag{4.2.7}$$

και αφού η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Το κρίτήριο του Riemann διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 4.2.2 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a, b]$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f, P_n) - L(f, P_n)\big) = 0. \tag{4.2.8}$$

Παραδείγματα.

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Riemann για να εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Riemann ολοκληρώσιμες:
(α) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$:

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1\right\}. \tag{4.2.9}$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= f(0)\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n} \to 0. \tag{4.2.10}$$

Από το Θεώρημα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Μπορούμε μάλιστα να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} &= L(f,P_n) \\ &\leq \underline{\int_0^1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \overline{\int_0^1} x^2 dx \\ &\leq U(f,P_n) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3}, \tag{4.2.11}$$

έπεται ότι

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3}. \tag{4.2.12}$$

Δηλαδή,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \tag{4.2.13}$$

(β) Η συνάρτηση $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = \sqrt{x}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακολουθία διαμερίσεων του προηγούμενου παραδείγματος για να δείξετε ότι ικανοποιείται το κριτήριο του Riemann.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική ακολουθία διαμερίσεων. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{ 0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{n^2} < \cdots < \frac{(n-1)^2}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1 \right\}. \tag{4.2.14}$$

Η u είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$L(u, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right) \tag{4.2.15}$$

και

$$U(u, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right). \tag{4.2.16}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(u,P_n) - L(u,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{1}{n} \to 0. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι η u είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αφήνουμε σαν άσκηση να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} L(u, P_n) = \lim_{n\to\infty} U(u, P_n) = \frac{2}{3}. \tag{4.2.17}$$

Η συγκεκριμένη επιλογή διαμερίσεων που κάναμε έχει το πλεονέκτημα ότι μπορείτε εύκολα να γράψετε τα $L(u, P_n)$ και $U(u, P_n)$ σε κλειστή μορφή. Από την (4.2.17) έπεται ότι

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}. \tag{4.2.18}$$

(γ) Η συνάρτηση του Dirichlet $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Υπολογίζουμε το κάτω και το άνω άθροισμα της g ως προς την P. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχουν ρητός q_k και άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $g(q_k) = 1$, $g(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq g(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$ και $M_k = 1$. Συνεπώς,

$$L(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 0 \tag{4.2.19}$$

και

$$U(g,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 \cdot (x_{k+1} - x_k) = 1. \tag{4.2.20}$$

Αφού η P ήταν τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$, παίρνουμε

$$\underline{\int_0^1} g(x)dx = 0 \qquad \text{και} \qquad \overline{\int_0^1} g(x)dx = 1. \tag{4.2.21}$$

Άρα, η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχει άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $h(\alpha_k) = 0$ και $0 \leq h(x) \leq 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$. Συνεπώς,

$$L(h,P) = 0. \tag{4.2.22}$$

Επίσης, υπάρχει ρητός $q_k > (x_k + x_{k+1})/2$ στο (x_k, x_{k+1}), άρα $M_k \geq h(q_k) > (x_k + x_{k+1})/2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(h,P) &> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) \\ &= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$U(h,P) - L(h,P) > \frac{1}{2} \tag{4.2.23}$$

για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$, το κριτήριο του Riemann δεν ικανοποιείται (πάρτε $\varepsilon = 1/3$). Άρα, η h δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Η συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Εύκολα ελέγχουμε ότι $L(w,P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : w(x) \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $w(x) \geq \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $w(x) = 1/q \geq \varepsilon$ δηλαδή $q \leq 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i, b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1 > 0$, $a_i < z_i < b_i$ αν $i < N$ και $a_N < z_N \leq b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leq 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leq 1\}, \tag{4.2.24}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} U(w,P_\varepsilon) &\leq \varepsilon \cdot (a_1 - 0) + 1 \cdot (b_1 - a_1) + \varepsilon \cdot (a_2 - b_1) + \cdots + 1 \cdot (b_{N-1} - a_{N-1}) \\ &\quad + \varepsilon \cdot (a_N - b_{N-1}) + 1 \cdot (b_N - a_N) + \varepsilon \cdot (1 - b_N) \\ &\leq \varepsilon \cdot \Big(a_1 + (a_2 - b_1) + \cdots + (a_N - b_{N-1}) + (1 - b_N) \Big) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(w,P_\varepsilon) - L(w,P_\varepsilon) < 2\varepsilon. \tag{4.2.25}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1, η w είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann (Θεώρημα 4.2.1) θα δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 4.3.1. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη: για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b). \tag{4.3.1}$$

Άρα, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος για την f.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε για τη διαμέριση

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \ldots, a + \frac{n(b-a)}{n} = b \right\} \tag{4.3.2}$$

του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα να ισχύει

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \varepsilon. \tag{4.3.3}$$

Θέτουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0,1,\ldots,n. \tag{4.3.4}$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_1) + \cdots + f(x_n) \right), \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) + \cdots + f(x_{n-1}) \right). \end{aligned}$$

Άρα,

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{[f(x_n) - f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b) - f(a)](b-a)}{n}, \tag{4.3.5}$$

το οποίο γίνεται μικρότερο από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 4.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα 4.3.2. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta. \tag{4.3.6}$$

Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση

$$P_n = \left\{ a, a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}, \dots, a + \frac{n(b-a)}{n} = b \right\}. \tag{4.3.7}$$

Ορίζουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n. \tag{4.3.8}$$

Έστω $k = 0, 1, \dots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$M_k = f(y_k') \qquad \text{και} \qquad m_k = f(y_k''). \tag{4.3.9}$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta. \tag{4.3.10}$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{4.3.11}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f, P_n) - L(f, P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

4.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε αυστηρά μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση που θα σας βοηθήσει να εξοικειωθείτε με τις διαμερίσεις, τα άνω και κάτω αθροίσματα κλπ.

Θεώρημα 4.4.1. *Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \tag{4.4.1}$$

Απόδειξη: Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ έχουμε $m_k = M_k = c$. Άρα,

$$L(f, P) = U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} c(x_{k+1} - x_k) = c(b - a). \tag{4.4.2}$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b - a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.3}$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b - a). \tag{4.4.4}$$

□

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.5}$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned}
m_k &= \inf\{(f + g)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \\
M_k &= \sup\{(f + g)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \\
m'_k &= \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \\
M'_k &= \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \\
m''_k &= \inf\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \\
M''_k &= \sup\{g(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}.
\end{aligned}$$

Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m'_k + m''_k \leq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$m'_k + m''_k \leq m_k. \tag{4.4.6}$$

Ομοίως, για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $M'_k + M''_k \geq f(x) + g(x)$. Άρα,

$$M'_k + M''_k \geq M_k. \tag{4.4.7}$$

Έπεται ότι

$$L(f, P) + L(g, P) \leq L(f + g, P) \leq U(f + g, P) \leq U(f, P) + U(g, P). \tag{4.4.8}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1, P_2 του $[a, b]$ ώστε

$$U(f, P_1) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b f(x)dx < L(f, P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.9}$$

και

$$U(g,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b g(x)dx < L(g,P_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.10}$$

Αν θεωρήσουμε την κοινή τους εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P) + U(g,P) - \varepsilon &\leq U(f,P_1) + U(g,P_2) - \varepsilon \\ &< \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &< L(f,P_1) + L(g.P_2) + \varepsilon \\ &\leq L(f,P) + L(g,P) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με την (4.4.8) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx - \varepsilon &\leq U(f+g,P) - \varepsilon \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &\leq L(f+g,P) + \varepsilon \leq \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx. \tag{4.4.11}$$

Όμως,

$$\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx. \tag{4.4.12}$$

Άρα,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx. \tag{4.4.13}$$

Έπεται το Θεώρημα. □

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, η tf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.14}$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $t > 0$. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Αν για $k = 0,1,\ldots,n-1$ ορίσουμε

$$m_k = \inf\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},\ M_k = \sup\{(tf)(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \tag{4.4.15}$$

και

$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\},\ M_k' = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \tag{4.4.16}$$

είναι φανερό ότι

$$m_k = tm'_k \;\text{ και }\; M_k = tM'_k. \tag{4.4.17}$$

Άρα,

$$L(tf,P) = tL(f,P) \;\text{ και }\; U(tf,P) = tU(f,P). \tag{4.4.18}$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\underline{\int_a^b} f(x)dx \;\text{ και }\; \overline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.19}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{4.4.20}$$

Έπεται ότι η tf είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx. \tag{4.4.21}$$

Αν $t<0$, η μόνη αλλαγή στο προηγούμενο επιχείρημα είναι ότι τώρα $m_k = tM'_k$ και $M_k = tm'_k$. Συμπληρώστε την απόδειξη μόνοι σας.

Τέλος, αν $t=0$ έχουμε $tf\equiv 0$. Άρα,

$$\int_a^b tf = 0 = 0\cdot\int_a^b f. \tag{4.4.22}$$ □

Από τα Θεωρήματα 4.4.2 και 4.4.3 προκύπτει άμεσα η «γραμμικότητα του ολοκληρώματος».

Θεώρημα 4.4.4 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος). *Αν $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t,s\in\mathbb{R}$, τότε η $tf+sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf+sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.23}$$ □

Θεώρημα 4.4.5. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c\in(a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.24}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1 του $[a,c]$ και P_2 του $[c,b]$ ώστε

$$L(f,P_1)\le\int_a^c f(x)dx\le U(f,P_1) \;\text{ και }\; U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.25}$$

και

$$L(f,P_2) \leq \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P_2) \text{ και } U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.4.26}$$

Το σύνολο $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ισχύουν οι

$$L(f,P_\varepsilon) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \text{ και } U(f,P_\varepsilon) = U(f,P_1) + U(f,P_2). \tag{4.4.27}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &= (U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (κριτήριο του Riemann). Επιπλέον, για την P_ε έχουμε

$$L(f,P_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon) \tag{4.4.28}$$

και, από τις (4.4.25), (4.4.26) και (4.4.27),

$$L(f,P_\varepsilon) \leq \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leq U(f,P_\varepsilon). \tag{4.4.29}$$

Επομένως,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \right| \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon, \tag{4.4.30}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{4.4.31}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon. \tag{4.4.32}$$

Αν $c \notin P$ θέτουμε $P' = P \cup \{c\}$, οπότε πάλι έχουμε

$$U(f,P') - L(f,P') \leq U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon. \tag{4.4.33}$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $c \in P$. Ορίζουμε $P_1 = P \cap [a,c]$ και $P_2 = P \cap [c,b]$. Οι P_1, P_2 είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα, και

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2)\ ,\ U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2). \tag{4.4.34}$$

Αφού

$$(U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) = U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \tag{4.4.35}$$

έπεται ότι

$$U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \;\text{ και }\; U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon. \tag{4.4.36}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το κριτήριο του Riemann δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τώρα, από το πρώτο μέρος της απόδειξης παίρνουμε την ισότητα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad \square \tag{4.4.37}$$

Θεώρημα 4.4.6. *Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a). \tag{4.4.38}$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{4.4.39}$$

είναι η **μέση τιμή** της f στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Αρκεί να διαπιστώσετε ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ισχύει

$$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a) \tag{4.4.40}$$

(το οποίο είναι πολύ εύκολο). $\square$

Πόρισμα 4.4.7. (α) *Εστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0. \tag{4.4.41}$$

(β) *Εστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx. \tag{4.4.42}$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.4.6: μπορούμε να πάρουμε $m = 0$.

(β) Η $f - g$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $(f-g)(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Εφαρμόζουμε το (α) για την $f - g$ και χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. $\square$

Θεώρημα 4.4.8. *Εστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(α) *η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \tag{4.4.43}$$

(β) *η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*

(γ) *η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Αφήνεται για τις Ασκήσεις. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a, b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geq b$ ως εξής:

(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).

(β) αν $a > b$ και η $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \tag{4.4.44}$$

4.5 Ο ορισμός του Riemann*

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός 4.5.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη** στο $[a, b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε
>
> $$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, P, \Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{4.5.1}$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στο συμβολισμό $\sum(f, P, \Xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Η βασική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum(f, P, \Xi) \tag{4.5.2}$$

όταν το πλάτος της P τείνει στο μηδέν και τα ξ_k επιλέγονται αυθαίρετα στα υποδιαστήματα που ορίζει η P. Επειδή δεν έχουμε συναντήσει τέτοιου είδους «όρια» ως τώρα, καταφεύγουμε στον «εψιλοντικό ορισμό».

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών ολοκληρωσιμότητας:

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5.3}$$

Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \tag{4.5.4}$$

Άρα,

$$L(f,P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.5.5}$$

και

$$U(f,P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.6}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon, \tag{4.5.7}$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.5.8}$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f). \tag{4.5.9}$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f). \tag{4.5.10}$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.5.11}$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0. \tag{4.5.12}$$

Έστω P' διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, **η οποία είναι και εκλέπτυνση της** P. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} &< L(f,P) \leq L(f,P') \\ &\leq \sum(f,P',\Xi) \\ &\leq U(f,P') \leq U(f,P) \\ &< \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f,P',\Xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.13}$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για **τυχούσα** διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a,b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n-1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l < y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2 = P_1 \cup \{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}\}$ με $\xi_l \in [y_l, y_{l+1}]$, $l = 0,1,\ldots,m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l' \in [y_l, x_k]$ και $\xi_l'' \in [x_k, y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l'', \ldots, \xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)}) - \sum(f,P_2,\Xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1}-y_l) - f(\xi_l')(x_k - y_l) \\ &\quad -f(\xi_l'')(y_{l+1}-x_k)| \\ &\leq 3M \max_l |y_{l+1}-y_l| < 3M\delta \\ &= \frac{\varepsilon}{2n}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1, \Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k, \Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, όπως στην (4.5.13) έχουμε

$$\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)}) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.5.14}$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|<n\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $<\delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right| \\ &\quad+\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □

4.6 Ασκήσεις

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

2. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

3. Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

4. Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

5. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c\in[a,b]$ ώστε $f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)\,dx$.

6. Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f,P)=U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή.

7. Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]\cap\mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx=0.$$

8. Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f,P)=U(f,P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

2. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

3. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

4. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:
(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.
(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

5. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):
(α) $f(x) = x + [x]$.
(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι
$$\int_a^b f(x)dx = 0$$
αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

7. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$
Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$
Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

10. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

11. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

12. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

13. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} \right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

14. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

15. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

16. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx$ συγκλίνει.

17. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

για κάθε $x, y \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} \right) \right| \leq \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Γ. Ασκήσεις*

1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

2. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $a, b > 0$

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(a) = b$.

3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

4. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

6. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b-a$ (γιατί;). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

7. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Δ. Συμπληρώματα της Θεωρίας

Αποδείξτε τις παρακάτω προτάσεις.

1. Έστω $f,g,h:[a,b]\to\mathbb{R}$ τρείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Υποθέτουμε ότι οι f,h είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx = I.$$

Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_a^b g(x)dx = I.$$

2. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη. Ομοίως, ότι η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

3. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

4. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

5. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα της μορφής $[a,b]$. Δείξτε ότι:
(α) $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$.
(β) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.
(γ) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$.
(δ) $\int_{ca}^{cb} f(t)dt = c\int_a^b f(ct)dt$.
(ε) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ αν η f είναι περιττή.
(στ) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ αν η f είναι άρτια.

6. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κλιμακωτές συνάρτησεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon.$$

(β) Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις $g_\varepsilon, h_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g_\varepsilon \leq f \leq h_\varepsilon$ και

$$\int_a^b h_\varepsilon(x)dx - \int_a^b g_\varepsilon(x)dx < \varepsilon.$$

Κεφάλαιο 5

Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα λέμε ότι μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι *παραγωγίσιμη στο* $[a,b]$ αν η παράγωγος $f'(x)$ υπάρχει για κάθε $x \in (a,b)$ και, επιπλέον, υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{και} \quad f'_-(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Συμφωνούμε να γράφουμε $f'(a) = f'_+(a)$ και $f'(b) = f'_-(b)$.

5.1 Το θεώρημα μέσης του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο ορίσαμε τη *μέση τιμή*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \tag{5.1.1}$$

της f στο $[a,b]$. Αν η f υποτεθεί συνεχής, τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ με την ιδιότητα

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \tag{5.1.2}$$

Ο ισχυρισμός αυτός είναι άμεση συνέπεια του εξής γενικότερου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.1.1 (θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.3}$$

Απόδειξη. Οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, άρα η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Έστω

$$m = \min\{f(x) : a \leq x \leq b\} \quad \text{και} \quad M = \max\{f(x) : a \leq x \leq b\}. \tag{5.1.4}$$

Αφού η g παίρνει μη αρνητικές τιμές, έχουμε

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \tag{5.1.5}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Συνεπώς,

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx. \tag{5.1.6}$$

Αφού $g \geq 0$ στο $[a, b]$, έχουμε $\int_a^b g(x)dx \geq 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $\int_a^b g(x)dx = 0$, τότε από την (5.1.6) βλέπουμε ότι $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Άρα, η (5.1.3) ισχύει *για κάθε* $\xi \in [a, b]$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_a^b g(x)dx > 0$. Τότε, από την (5.1.6) συμπεραίνουμε ότι

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M. \tag{5.1.7}$$

Αφού η f είναι συνεχής, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δείχνει ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \tag{5.1.8}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 5.1.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b - a). \tag{5.1.9}$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.1.1, αν θεωρήσουμε την $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [a, b]$. □

Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε (ξανά) το Πόρισμα 5.1.2, αυτή τη φορά σαν άμεση συνέπεια του πρώτου θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

5.2 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Ορισμός 5.2.1 (αόριστο ολοκλήρωμα). Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είδαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, x]$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Το *αόριστο ολοκλήρωμα της* f είναι η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \tag{5.2.1}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι φραγμένη, θα δείξουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq \int_x^y |f(t)|dt \leq M|x-y|. \end{aligned}$$

Άρα, η F είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά M). □

Μπορούμε να δείξουμε κάτι ισχυρότερο: στα σημεία συνέχειας της f, η F είναι παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a,b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$F'(x_0) = f(x_0). \tag{5.2.2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a < x_0 < b$ (οι δύο περιπτώσεις $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ ελέγχονται όμοια, με τη σύμβαση που κάναμε στην αρχή του Κεφαλαίου). Θέτουμε $\delta_1 = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Αν $|h| < \delta_1$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $0 < \delta < \delta_1$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Έστω $0 < |h| < \delta$.

(α) Αν $0 < h < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &< \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon dt = \frac{1}{h}\cdot h\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

(β) Αν $-\delta < h < 0$, τότε

$$\begin{aligned} \left|\frac{F(x_0+h)-F(x)}{h} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}[f(t)-f(x_0)]dt\right| \\ &\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|dt \\ &< \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon dt = \frac{1}{|h|}\cdot(-h)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

δηλαδή $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Άμεση συνέπεια είναι το *πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού*.

Θεώρημα 5.2.4 (πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού). *Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και*

$$F'(x) = f(x) \tag{5.2.3}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. □

Πόρισμα 5.2.5. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a). \tag{5.2.4}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ στο $[a,b]$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται **παράγουσα** της f (ή **αντιπαράγωγος** της f) αν $G'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.4, η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

είναι παράγουσα της f. Αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f, τότε $G'(x)-F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα η $G - F$ είναι σταθερή στο $[a,b]$ (απλή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής). Δηλαδή, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$G(x) - F(x) = c \tag{5.2.5}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αφού $F(a) = 0$, παίρνουμε $c = G(a)$. Δηλαδή,

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a) \tag{5.2.6}$$

ή αλλιώς

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)dt \tag{5.2.7}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

Θεώρημα 5.2.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f, τότε*

$$G(x) = F(x) + c = \int_a^x f(t)dt + G(a) \tag{5.2.8}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a). \qquad \square$$

Σημείωση: Δεν είναι σωστό ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x)dx. \tag{5.2.9}$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $G(0) = 0$ και $G(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ αν $0 < x \leq 1$, τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ αλλά η G' δεν είναι φραγμένη συνάρτηση (ελέγξτε το) οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε για το ολοκλήρωμα $\int_a^b G'$.

Αν όμως η $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε η (5.2.9) ισχύει. Αυτό είναι το *δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού*.

Θεώρημα 5.2.7 (δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού). *Έστω $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ τότε*

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a). \tag{5.2.10}$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a,b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, βρίσκουμε $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ με την ιδιότητα

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k). \tag{5.2.11}$$

Αν, για κάθε $0 \leq k \leq n-1$, ορίσουμε

$$m_k = \inf\{G'(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\} \quad \text{και} \quad M_k = \sup\{G'(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \tag{5.2.12}$$

τότε

$$m_k \leq G'(\xi_k) \leq M_k, \tag{5.2.13}$$

άρα

$$L(G', P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leq U(G', P). \tag{5.2.14}$$

Δηλαδή,

$$L(G', P) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = G(b) - G(a) \leq U(G', P). \tag{5.2.15}$$

Αφού η P ήταν τυχούσα και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, παίρνοντας supremum ως προς P στην αριστερή ανισότητα και infimum ως προς P στη δεξιά ανισότητα της (5.2.15), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b G'(x)dx \leq G(b) - G(a) \leq \int_a^b G'(x)dx, \tag{5.2.16}$$

που είναι το ζητούμενο. □

5.3 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Τα θεωρήματα αυτής της παραγράφου «περιγράφουν» δύο πολύ χρήσιμες μεθόδους ολοκλήρωσης: την ολοκλήρωση κατά μέρη και την ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

Συμβολισμός. Αν $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε συμφωνούμε να γράφουμε

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{5.3.1}$$

Θεώρημα 5.3.1 (ολοκλήρωση κατά μέρη). *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\int_a^x fg' = (fg)(x) - (fg)(a) - \int_a^x f'g. \tag{5.3.2}$$

Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \tag{5.3.3}$$

Απόδειξη. Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{5.3.4}$$

στο $[a, b]$. Από την υπόθεση, οι συναρτήσεις fg', $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(f \cdot g)'$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$\int_a^x fg' + \int_a^x f'g = \int_a^x (fg)' = (fg)(x) - (fg)(a). \tag{5.3.5}$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει αν θέσουμε $x = b$. □

Θεώρημα 5.3.2 (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης). *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η ϕ' είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I = \phi([a, b])$ και $f : I \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(s)\,ds. \tag{5.3.6}$$

Απόδειξη. Η ϕ είναι συνεχής, άρα το $I = \phi([a, b])$ είναι κλειστό διάστημα. Η f είναι συνεχής στο I, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο I. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_{\phi(a)}^x f(s)\,ds \tag{5.3.7}$$

(παρατηρήστε ότι το $\phi(a)$ δεν είναι απαραίτητα άκρο του I, δηλαδή η F δεν είναι απαραίτητα το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I). Αφού η f είναι συνεχής στο I, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο I και $F' = f$. Έπεται ότι

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\phi(t))\phi'(t)\,dt. \tag{5.3.8}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(F' \circ \phi) \cdot \phi' = (F \circ \phi)'. \tag{5.3.9}$$

Η $(F' \circ \phi) \cdot \phi'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, άρα η $(F \circ \phi)'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε

$$\int_a^b (f \circ \phi) \cdot \phi' = \int_a^b (F' \circ \phi) \cdot \phi' = \int_a^b (F \circ \phi)' = (F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a). \tag{5.3.10}$$

Αφού

$$(F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f - \int_{\phi(a)}^{\phi(a)} f = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f, \tag{5.3.11}$$

παίρνουμε την (5.3.6). □

Θεώρημα 5.3.3 (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης). *Έστω* $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με* $\psi'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in [a,b]$. *Αν* $I = \psi([a,b])$ *και* $f : I \to \mathbb{R}$ *είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)(\psi^{-1})'(s)\,ds. \tag{5.3.12}$$

Απόδειξη. Η ψ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$, άρα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική στο $[a,b]$. Συνεπώς, η ψ είναι γνησίως μονότονη στο $[a,b]$. Αν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέσουμε ότι η ψ είναι γνησίως αύξουσα τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\psi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ της ψ στο $I = \psi([a,b]) = [\psi(a), \psi(b)]$. Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης για την $f \cdot (\psi^{-1})'$ (παρατηρήστε ότι η $(\psi^{-1})'$ είναι συνεχής στο I). Έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f \cdot (\psi^{-1})' &= \int_a^b [(f \cdot (\psi^{-1})') \circ \psi]\psi' \\
&= \int_a^b (f \circ \psi) \cdot [(\psi^{-1})' \circ \psi]\psi' \\
&= \int_a^b (f \circ \psi) \cdot (\psi^{-1} \circ \psi)' \\
&= \int_a^b f \circ \psi.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.3.12). □

5.4 Ασκήσεις

Α. Βασικές ασκήσεις

1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b);

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{f(s)}{3}.$$

4. Υποθέτουμε ότι η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

5. Έστω $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g'.

7. Έστω $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την G'.

8. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F'.

9. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0,a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

10. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \int_a^b |f'(x)| \, dx.$$

11. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = x f(x).$$

Β. Ασκήσεις

1. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

2. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geq 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geq 0$.

3. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η g είναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

4. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

5. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n = \int_0^\pi \sin(nx)dx \quad \text{και} \quad b_n = \int_0^\pi |\sin(nx)|dx.$$

6. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g, h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $f = g - h$.

Κεφάλαιο 6

Βασικές πραγματικές συναρτήσεις

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να θυμηθούμε τις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, να δώσουμε αυστηρό ορισμό της εκθετικής συνάρτησης a^x, $a > 0$ και της (αντίστροφης της) λογαριθμικής συνάρτησης $\log_a x$, $a > 0$, και να αποδείξουμε τις βασικές τους ιδιότητες. Για τις τελευταίες, θα περιγράψουμε συνοπτικά δύο τρόπους ορισμού.

6.1 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Σε αυτή τη σύντομη παράγραφο υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές ταυτότητες και ανισότητες για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο) και tan (εφαπτομένη).

Πρόταση 6.1.1. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι*

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1 \qquad \textit{και} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{6.1.1}$$

και

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x. \tag{6.1.2}$$

Οι συναρτήσεις $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ και $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι περιοδικές, με ελάχιστη περίοδο 2π. Η $\sin$ είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η $\cos$ είναι άρτια.

Πρόταση 6.1.2. *Αν $0 < x < \frac{\pi}{2}$, τότε*

$$\sin x < x < \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{6.1.3}$$

Έπεται ότι, για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ ισχύουν οι ανισότητες

$$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \tag{6.1.4}$$

και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η

$$|\sin x| \leq |x|. \tag{6.1.5}$$

Πρόταση 6.1.3 (συνημίτονο και ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς). *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b\\
\cos(a+b) &= \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\, \cos b + \cos a\, \sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a\, \cos b - \cos a\, \sin b.
\end{aligned}$$

Πρόταση 6.1.4 (συνημίτονο και ημίτονο του $2a$). *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\\
\sin(2a) &= 2\sin a\, \cos a.
\end{aligned}$$

Πρόταση 6.1.5 (μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο). *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\\
\cos x - \cos y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}.
\end{aligned}$$

Πρόταση 6.1.6. *Η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|. \tag{6.1.6}$$

Από την Πρόταση 6.1.2 έχουμε

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq \left|\frac{x-x_0}{2}\right|. \tag{6.1.7}$$

Συνεπώς,

$$|\sin x - \sin x_0| \leq 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x - x_0|. \tag{6.1.8}$$

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι η sin είναι συνεχής στο x_0 (πάρτε $\delta = \varepsilon$ και επαληθεύστε τον ορισμό της συνέχειας). Η cos είναι συνεχής ως σύνθεση της συνεχούς $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ με την sin. $\square$

Πρόταση 6.1.7 (βασικό όριο).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{6.1.9}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $x\mapsto \frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{6.1.10}$$

Από την Πρόταση 6.1.2 έχουμε $\sin x<x<\tan x$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς,

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \tag{6.1.11}$$

στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Αφού η cos είναι συνεχής, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=\cos 0=1$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.1.8. *Τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχουν.*

Απόδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $x_n\to 0$, $y_n\to 0$ (με $x_n,y_n\neq 0$) ώστε $\lim\sin\frac{1}{x_n}\neq\lim\sin\frac{1}{y_n}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n=\frac{1}{\pi n}$ και $y_n=\frac{1}{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ $(n\in\mathbb{N})$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\lim_n x_n=0=\lim_n y_n$. Όμως,

$$\sin\frac{1}{x_n}=\sin(\pi n)=0\to 0 \tag{6.1.12}$$

και

$$\sin\frac{1}{y_n}=\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)=1\to 1. \tag{6.1.13}$$

Τελείως ανάλογα, μπορείτε να δείξετε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. □

Πρόταση 6.1.9. *Οι συναρτήσεις $\sin:\mathbb{R}\to[-1,1]$ και $\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$ είναι παραγωγίσιμες, με παραγώγους $(\sin x)'=\cos x$ και $(\cos x)'=-\sin x$ αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ και για κάθε $h\neq 0$,

$$\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}=\frac{1}{h}\cdot 2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\to\cos x_0 \tag{6.1.14}$$

καθώς το $h\to 0$, αφού $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2}=1$ και $\lim_{h\to 0}\cos(x_0+h/2)=\cos x_0$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $\cos x$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ και $\cos'(x_0)=-\sin x_0$. □

Παρατήρηση. Αν $\cos x_0\neq 0$, τότε η συνάρτηση εφαπτομένης $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και $\tan'(x_0)=\frac{1}{\cos^2 x_0}$. Αυτό προκύπτει άμεσα από την προηγούμενη Πρόταση και τους κλασικούς κανόνες παραγώγισης.

6.2 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Τόξο ημιτόνου

Η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι περιοδική, με ελάχιστη θετική περίοδο ίση με 2π. Ο περιορισμός της στο $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία λέγεται **τόξο ημιτόνου** και συμβολίζεται με arcsin.

Δηλαδή, $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ και $\arcsin y = x$ αν και μόνο αν $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ και $\sin x = y$.

Παρατηρώντας ότι η sin είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi/2, \pi/2]$ και $\sin'(x) = \cos x \neq 0$ αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, συμπεραίνουμε ότι η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, και

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}, \tag{6.2.1}$$

όπου $\sin x = y$. Έπεται ότι

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}, \tag{6.2.2}$$

δηλαδή

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \qquad y \in (-1,1). \tag{6.2.3}$$

Τόξο συνημιτόνου

Η συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι περιοδική, με ελάχιστη θετική περίοδο ίση με 2π. Ο περιορισμός της στο $[0, \pi]$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία λέγεται **τόξο συνημιτόνου** και συμβολίζεται με arccos.

Δηλαδή, $\arccos : [-1,1] \to [0, \pi]$ και $\arccos y = x$ αν και μόνο αν $x \in [0, \pi]$ και $\cos x = y$.

Παρατηρώντας ότι η cos είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ αν $x \in (0, \pi)$, συμπεραίνουμε ότι η arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, και

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin x}, \tag{6.2.4}$$

όπου $\cos x = y$. Έπεται ότι

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - y^2}, \tag{6.2.5}$$

δηλαδή

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \qquad y \in (-1,1). \tag{6.2.6}$$

Τόξο εφαπτομένης

Η συνάρτηση $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και επί. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία λέγεται **τόξο εφαπτομένης** και συμβολίζεται με arctan.

Δηλαδή, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ και $\arctan y = x$ αν και μόνο αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και $\tan x = y$.

Παρατηρώντας ότι η tan είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi/2, \pi/2)$ και $\tan'(x) = 1+\tan^2 x \neq 0$ αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, συμπεραίνουμε ότι η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, και

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x}, \tag{6.2.7}$$

όπου $\tan x = y$. Έπεται ότι

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}. \tag{6.2.8}$$

6.3 Λογαριθμική και εκθετική συνάρτηση: πρώτος ορισμός

Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Μπορούμε να ορίσουμε τον a^x όταν ο x είναι ρητός, ακολουθώντας τα εξής απλά βήματα:

(i) Αν $x \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a^x = a \cdot a \cdots a$ (x φορές).

(ii) Αν $x = 0$, θέτουμε $a^0 = 1$.

(iii) Αν $x \in \mathbb{Z}$ και $x < 0$, θέτουμε $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ (τότε, εξακολουθεί να ισχύει η ισότητα $a^{x+y} = a^x a^y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$).

(iv) Αν $x = 1/n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (έχουμε αποδείξει την ύπαρξη και το μονοσήμαντο θετικής n-οστής ρίζας για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό).

(v) Αν $x = m/n$ όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ είναι τυχών ρητός, θέτουμε

$$a^x = \left(a^{1/n}\right)^m.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $x = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, τότε

$$\left(a^{1/n}\right)^m = \left(a^{1/n_1}\right)^{m_1}.$$

Δηλαδή, ο a^x ορίζεται καλά με αυτό τον τρόπο.

Το πρόβλημα είναι με ποιόν τρόπο θα επεκτείνουμε τον ορισμό του a^x για άρρητους εκθέτες x, έτσι ώστε να προκύψει μια συνεχής συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ που να ικανοποιεί τα εξής:

(i) $f_a(x) = a^x$, $x \in \mathbb{Q}$.

(ii) $f_a(x+y) = f_a(x) f_a(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(iii) $f_a(1) = a$.

Παρατηρήστε ότι η πρώτη ιδιότητα είναι συνέπεια των άλλων δύο.

Ας υποθέσουμε ότι καταφέραμε να ορίσουμε μια τέτοια συνάρτηση f_a και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε η f_a να είναι παραγωγίσιμη. Λογικό είναι επίσης να ζητάμε η f_a να είναι επί του $(0,+\infty)$ αν $a \neq 1$, γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < a < 1$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ πρέπει να έχουμε

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x+h) - f_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f_a(x)f_a(h) - f_a(x)f_a(0)}{h} \\ &= f_a(x) \lim_{h\to 0} \frac{f_a(h) - f_a(0)}{h} \\ &= f_a'(0) \cdot f_a(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, η παράγωγος της f_a πρέπει να ικανοποιεί την

(6.3.1) $$f_a'(x) = f_a'(0) \cdot f_a(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η αντίστροφη συνάρτηση $\log_a := f_a^{-1}$ της f_a θα είναι κι αυτή παραγωγίσιμη (παρατηρήστε ότι $f_a'(0) \neq 0$ αφού η f_a δεν είναι σταθερή συνάρτηση) και θα ικανοποιεί την

(6.3.2) $$\log_a'(x) = \frac{1}{f_a'(\log_a x)} = \frac{1}{f_a'(0) f_a(\log_a x)} = \frac{1}{f_a'(0)x}$$

για κάθε $x > 0$. Δηλαδή, η παράγωγος της $\log_a x$ είναι «υποχρεωμένη» να έχει την πολύ απλή μορφή

(6.3.3) $$(\log_a)'(x) = \frac{1}{cx}$$

όπου $c = f_a'(0)$. Μορφή που θα είναι ακόμα απλούστερη για εκείνο το $a > 0$ (αν υπάρχει) που ικανοποιεί την

(6.3.4) $$f_a'(0) = c = 1.$$

Αυτή η τιμή του a είναι η πιό «φυσιολογική» και αυτής της f_a η αντίστροφη συνάρτηση είναι η πιό «φυσιολογική» λογαριθμική συνάρτηση (με παράγωγο την $1/x$). Αυτές οι παρατηρήσεις μας οδηγούν στον εξής ορισμό:

Ορισμός 6.3.1. Ορίζουμε μια συνάρτηση $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με

(6.3.5) $$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Ο ορισμός αυτός υπαγορεύεται από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού: η $\frac{1}{t}$ είναι συνεχής στο $[1,x]$ αν $x > 1$ ή στο $[x,1]$ αν $0 < x < 1$, άρα η $\log x$ ορίζεται καλά για κάθε $x > 0$. Επιπλέον,

(6.3.6) $$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Δηλαδή, η $\log$ είναι η «φυσιολογική» λογαριθμική συνάρτηση που ζητούσαμε.

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η log ικανοποιεί τη βασική ιδιότητα των λογαρίθμων:

Θεώρημα 6.3.2. *Αν $x, y > 0$ τότε $\log(xy) = \log x + \log y$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x > 0$ και ορίζουμε $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f(y) = \log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt. \tag{6.3.7}$$

Τότε,

$$f'(y) = \frac{1}{xy} \cdot \frac{d(xy)}{dy} = \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{1}{y} = \log'(y). \tag{6.3.8}$$

Άρα, υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\log(xy) = \log y + c \tag{6.3.9}$$

για κάθε $y > 0$. Για να υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς c, θέτουμε $y = 1$. Έχουμε

$$\log x = \log 1 + c = \int_1^1 \frac{1}{t} dt + c = 0 + c = c. \tag{6.3.10}$$

Άρα, $\log(xy) = \log x + \log y$. □

Άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 6.3.2 είναι οι εξής: αν $x, y > 0$, τότε

(α) $\log(x^n) = n \log x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$.

Από τον Ορισμό 6.3.1 είναι φανερό ότι η log είναι συνεχής και μάλιστα παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Επίσης, η log είναι γνησίως αύξουσα αφού η παράγωγός της είναι $\frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$. Τέλος, το σύνολο τιμών της log είναι ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αυτό φαίνεται εύκολα ως εξής: έχουμε

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt > 0, \tag{6.3.11}$$

επομένως

$$\log(2^n) = n \log 2 \to +\infty \tag{6.3.12}$$

καθώς το $n \to \infty$. Δηλαδή, η log παίρνει οσοδήποτε μεγάλες θετικές τιμές. Αφού $\log 1 = 0$, η συνέχεια της log και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μας εξασφαλίζουν ότι η log παίρνει *όλες* τις τιμές στο $[0, +\infty)$ για $x \geq 1$. Δηλαδή,

$$f([1, +\infty)) = [0, +\infty). \tag{6.3.13}$$

Από την $\log(1/x) = -\log x$ συμπεραίνουμε ότι

$$f((0, 1]) = (-\infty, 0]. \tag{6.3.14}$$

Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο εξής:

Θεώρημα 6.3.3. *Η* $\log : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη, γνησίως αύξουσα και επί συνάρτηση, με παράγωγο*

$$\log'(x) = \frac{1}{x} \tag{6.3.15}$$

για κάθε $x > 0$. □

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την αντίστροφη συνάρτηση $\exp : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ της log, θέτοντας $\exp(x) = \log^{-1}(x)$. Ορίζουμε $e = \exp(1)$ και γράφουμε $\exp(x) =: e^x$. Η $x \mapsto e^x$ ικανοποιεί την βασική ιδιότητα μιας «εκθετικής συνάρτησης»:

Θεώρημα 6.3.4. *Αν* $x, y \in \mathbb{R}$, *τότε* $\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)$. *Δηλαδή,* $e^{x+y} = e^x e^y$.

Απόδειξη. Θέτουμε $z = \exp(x)$ και $w = \exp(y)$. Τότε, $zw = \exp(x)\exp(y)$ και το Θεώρημα 6.3.2 δείχνει ότι

$$\log(zw) = \log(\exp(x)\cdot\exp(y)) = \log(\exp(x)) + \log(\exp(y)) = x + y. \tag{6.3.16}$$

Έπεται ότι

$$zw = \log^{-1}(x+y) \Longrightarrow zw = \exp(x+y). \tag{6.3.17}$$

Δηλαδή, $\exp(x)\cdot\exp(y) = \exp(x+y)$. □

Θεώρημα 6.3.5. *Η* exp *είναι παραγωγίσιμη και* $\exp'(x) = \exp(x)$.

Απόδειξη. Από τον τύπο της παραγώγου αντίστροφης συνάρτησης,

$$\begin{aligned}\exp'(x) &= (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1}(x))}\\ &= \log^{-1}(x) = \exp(x).\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 6.3.6. Αξίζει τον κόπο να ελέγξουμε (με τον ορισμό του e που δώσαμε) ότι ισχύει η

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Αν $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, έχουμε

$$\log a_n = n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log 1}{1/n}. \tag{6.3.18}$$

Όταν $n \to \infty$ έχουμε $\frac{1}{n} \to 0$. Άρα,

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log 1}{1/n} \to \log'(1) = 1. \tag{6.3.19}$$

Αφού $\log a_n \to 1$, από τη συνέχεια της exp παίρνουμε $a_n = \exp(\log a_n) \to \exp(1) = e$.

Ορισμός 6.3.7. Για αυθαίρετο $a > 0$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $x \mapsto a^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $x \mapsto \log_a(x)$, $x > 0$ ως εξής:

(i) $a^x = \exp(x \log a) = e^{x \log a}$.

(ii) $\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$, αν $a \neq 1$.

Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των exp και log ελέγχουμε εύκολα ότι

(i) Αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $a^{x+y} = a^x a^y$.

(ii) Αν $a \neq 1$ και $x, y > 0$, τότε $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

Οι βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων $x \mapsto a^x$ και $x \mapsto \log_a(x)$ περιγράφονται στις επόμενες δύο Προτάσεις (η απόδειξη τους είναι μια απλή άσκηση).

Πρόταση 6.3.8 (μονοτονία και συμπεριφορά στο άπειρο).

(i) *Αν $0 < a < 1$, τότε η a^x είναι γνησίως φθίνουσα και*

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = 0.$$

(ii) *Αν $a > 1$, τότε η a^x είναι γνησίως αύξουσα και*

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty.$$

(iii) *Αν $0 < a < 1$, τότε η $\log_a(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα και*

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

(iv) *Αν $a > 1$, τότε η $\log_a(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και*

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

Πρόταση 6.3.9 (παράγωγος).

(i) *Αν $0 < a < 1$ ή $a > 1$, τότε*

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{x \log a}.$$

(ii) *Για κάθε $a > 0$,*

$$(a^x)' = a^x \log a.$$

Επίσης, η a^x είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και η $\log_a x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$. □

Θεώρημα 6.3.10. *Οι συναρτήσεις* log *και* exp *ικανοποιούν τα εξής:* (α) *για κάθε $s > 0$,*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty \tag{6.3.20}$$

και (β)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^s} = 0. \tag{6.3.21}$$

Δηλαδή, η exp *αυξάνει στο $+\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του x, ενώ η* log *αυξάνει στο $+\infty$ βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του x.*

Απόδειξη. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι $e^x > x$ αν $x > 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\log x < x$. Όμως,

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}dt \leq \int_1^x 1dt = x - 1 < x. \tag{6.3.22}$$

Αυτή η ανισότητα ήδη δείχνει ότι $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ (γιατί;). Τώρα,

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{2}\frac{e^{x/2}}{x/2}\cdot e^{x/2} > \frac{1}{2}e^{x/2} \tag{6.3.23}$$

αν $x > 2$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} e^{x/2} = +\infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{e^x}{x} \to +\infty. \tag{6.3.24}$$

Έστω τώρα τυχών $s > 0$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό $n > s$, οπότε για κάθε $x > 1$ έχουμε $e^x/x^s > e^x/x^n$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty \tag{6.3.25}$$

όταν $x \to +\infty$. Γράφουμε

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{e^{x/n}\dots e^{x/n}}{x\dots x} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n. \tag{6.3.26}$$

Όμως, όταν $x \to +\infty$ έχουμε $x/n \to +\infty$, οπότε το προηγούμενο βήμα δείχνει ότι $e^{x/n}/(x/n) \to +\infty$. Έπεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n = +\infty. \tag{6.3.27}$$

(β) Αυτό είναι απλούστερο. Έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ και εφαρμόζουμε τον κανόνα του l'Hospital. Έχουμε

$$\frac{(\log x)'}{(x^s)'} = \frac{\frac{1}{x}}{sx^{s-1}} = \frac{1}{sx^s} \to 0 \tag{6.3.28}$$

όταν $x \to +\infty$. Άρα,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^s} = 0. \tag{6.3.29}$$

□

6.4 Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση: δεύτερος ορισμός

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι ο a^x έχει οριστεί για κάθε $x \in \mathbb{Q}$ όπως στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου, και δίνουμε μια σύντομη περιγραφή του «φυσιολογικού» τρόπου ορισμού της εκθετικής συνάρτησης a^x: επεκτείνουμε τον ορισμό για άρρητους εκθέτες x.

Ο ορισμός του a^x, $x \notin \mathbb{Q}$ θα βασιστεί στο ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 6.4.1. *Έστω $a > 0$ και (q_n) ακολουθία ρητών αριθμών με $q_n \to 0$. Τότε,*

$$a^{q_n} \to 1. \tag{6.4.1}$$

Απόδειξη. Αν $a = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Η περίπτωση $0 < a < 1$ ανάγεται στην $a > 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a > 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι αν $q, q' \in \mathbb{Q}$ και $q < q'$ τότε $a^q < a^{q'}$. Αφού $-|q_n| \leq q_n \leq |q_n|$, έχουμε

$$a^{-|q_n|} \leq a^{q_n} \leq a^{|q_n|} \tag{6.4.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν λοιπόν δείξουμε ότι $a^{|q_n|} \to 1$, τότε εφαρμόζοντας το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών θα έχουμε $a^{q_n} \to 1$.

Αφού $q_n \to 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq |q_n| < 1$. Αν $q_n \neq 0$, τότε ο $|q_n|$ γράφεται στη μορφή $\frac{1}{\pi_n + s_n}$ όπου $0 \leq s_n < 1$ και $\pi_n = [1/|q_n|] \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$a^{|q_n|} = a^{\frac{1}{\pi_n + s_n}} \leq a^{\frac{1}{\pi_n}} \tag{6.4.3}$$

αν $|q_n| \neq 0$ και

$$a^{|q_n|} = 1 \tag{6.4.4}$$

αν $q_n = 0$. Γράφουμε $a^{1/\pi_n} = 1 + \gamma_n$ αν $|q_n| \neq 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\gamma_n \to 0$. Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$a = (1 + \gamma_n)^{\pi_n} \geq 1 + \pi_n \gamma_n. \tag{6.4.5}$$

Άρα,

$$0 \leq \gamma_n < \frac{a}{\pi_n} = \frac{a}{\frac{1}{|q_n|} - 1} \to 0 \tag{6.4.6}$$

αφού $|q_n| \to 0$. □

Η ιδέα μας για να επεκτείνουμε τον ορισμό του a^x για άρρητο x είναι η εξής: οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$, επομένως αν μας δώσουν $x \notin \mathbb{Q}$ υπάρχουν (πολλές) ακολουθίες ρητών $q_n \to x$. Θα δείξουμε ότι για κάποια από αυτές το $\lim_n a^{q_n}$ υπάρχει και θα ορίσουμε

$$a^x = \lim_n a^{q_n}. \tag{6.4.7}$$

Για να είναι καλός ο ορισμός, θα πρέπει αν πάρουμε μια άλλη ακολουθία ρητών αριθμών $q'_n \to x$ να υπάρχει το $\lim_n a^{q'_n}$ και να ισχύει η

$$\lim_n a^{q'_n} = \lim_n a^{q_n}. \tag{6.4.8}$$

Αυτό θα δείχνει ότι η τιμή a^x που ορίσαμε είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας ρητών $q_n \to x$.

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $q_n, q'_n \in \mathbb{Q}$ με $\lim_n q_n = \lim_n q'_n = x$. Αν $a > 1$, τότε*

(i) *τα* $\lim_n a^{q_n'}$ *και* $\lim_n a^{q_n}$ *υπάρχουν.*

(ii) $\lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{q_n}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία ρητών $r_n \to x$. Έστω q ρητός με $q > x$. Τότε $a^{r_n} < a^q$, δηλαδή η a^{r_n} είναι άνω φραγμένη. Επίσης, από την $r_n \leq r_{n+1}$ έπεται ότι $a^{r_n} \leq a^{r_{n+1}}$, δηλαδή η (a^{r_n}) είναι αύξουσα. Συνεπώς, η a^{r_n} συγκλίνει.

Παίρνουμε τώρα οποιαδήποτε από τις (q_n), (q_n'). Έχουμε $q_n - r_n \to x - x = 0$, οπότε το Λήμμα 6.4.1 δείχνει ότι $a^{q_n - r_n} \to 1$. Τότε,

$$a^{q_n} = a^{q_n - r_n} a^{r_n} \to \lim_n a^{r_n}. \tag{6.4.9}$$

Ομοίως,

$$a^{q_n'} \to \lim_n a^{r_n}. \tag{6.4.10}$$

Αφού $\lim_n a^{q_n} = \lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{r_n}$, παίρνουμε τα (i) και (ii) ταυτόχρονα. □

Έχουμε λοιπόν ορίσει τον a^x για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, πρέπει να αποδείξουμε διαδοχικά τα εξής (οι αποδείξεις είναι μια καλή άσκηση πάνω στη σύγκλιση ακολουθιών).

Πρόταση 6.4.3. *Έστω $a, b > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε,*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (ab)^x = a^x b^x. \tag{6.4.11}$$

Πρόταση 6.4.4. *Έστω $a > 0$. Η $x \mapsto a^x$ είναι γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < a < 1$.*

Πρόταση 6.4.5. *Έστω $a > 0$. Τότε, $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.*

Πρόταση 6.4.6. *Έστω $a > 0$. Η $x \mapsto a^x$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x - x_0} - 1)$ και ότι $a^{x - x_0} - 1 \to 0$ όταν το $x \to x_0$. □

Πρόταση 6.4.7. *Έστω $a > 0$. Τότε, το όριο*

$$c_a := \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \tag{6.4.12}$$

υπάρχει. Η $x \mapsto a^x$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(a^x)' = c_a \cdot a^x. \tag{6.4.13}$$

Ο αριθμός e ορίζεται ως το όριο της ακολουθίας $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Για τη συγκεκριμένη τιμή του a η τιμή της σταθεράς c_a ισούται με 1. Δηλαδή, για τη συνάρτηση $\exp(x) := e^x$ έχουμε

$$(\exp)'(x) = \exp x. \tag{6.4.14}$$

Τέλος, οι λογαριθμικές συναρτήσεις ορίζονται στο $(0,+\infty)$ ως αντίστροφες συναρτήσεις των εκθετικών συναρτήσεων: για κάθε $a>0$ ορίζουμε $\log_a : (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ την αντίστροφη συνάρτηση της $x\mapsto a^x$. Ειδικότερα,

$$\log := (\exp)^{-1}. \tag{6.4.15}$$

Παρατηρήστε ότι

$$(\log)'(x) = \frac{1}{(\exp)'(\exp)^{-1}(x)} = \frac{1}{\exp(\exp)^{-1}(x)} = \frac{1}{x}, \tag{6.4.16}$$

καταλήγουμε δηλαδή στην αφετηρία του ορισμού της §6.3.

6.5 Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι για κάθε $n=2,3,\dots$ ισχύει

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x\,\cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

2. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2k}x\,dx \quad \text{και} \quad \int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1}x\,dx.$$

3. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

4. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda>0$ ισχύει

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda\sin t}dt < \frac{\pi}{2\lambda}(1-e^{-\lambda}).$$

5. Δείξτε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει

$$1-\frac{1}{x}\leq \log x\leq x-1.$$

6. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $e^x\geq 1+x$.

7. Δείξτε ότι για κάθε $x>0$ και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\log x\leq n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)\leq \sqrt[n]{x}\,\log x.$$

Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n\,(\sqrt[n]{x}-1)=\log x$ για $x>0$.

8. Δείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)=x.$$

9. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

10. Μελετήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

στο $(0, +\infty)$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο e^π ή ο π^e;

Β. Ασκήσεις

11. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x)+f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

13. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \log 2.$$

[*Υπόδειξη:* Θυμηθείτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ συγκλίνει.]

14. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c μια σταθερά. Δείξτε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με την ιδιότητα

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

16. Έστω $a > 0$ και έστω $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, a)$, ώστε $f(0) = 1$ και $f(a) = e^a$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, a)$ ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

17. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a, b).

18. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $e^{-x} f(x)$.]

19. (α) Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)dx \leq f(2) + \cdots + f(n).$$

(β) Παίρνοντας $f(x) = \log x$ στο (α), δείξτε ότι

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

(γ) Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

20. Έστω $a, b > 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = \sqrt{ab}.$$

Κεφάλαιο 7

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

7.1 Ορισμός

Σε αυτό το κεφάλαιο, με I συμβολίζουμε ένα (κλειστό, ανοικτό ή ημιανοικτό, πεπερασμένο ή άπειρο) διάστημα στο $\mathbb{R}$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Στο επόμενο Λήμμα περιγράφουμε τα σημεία του ευθύγραμμου τμήματος $[a, b]$.

Λήμμα 7.1.1. *Αν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ τότε*

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{7.1.1}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x \in [a, b]$ έχουμε

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b. \tag{7.1.2}$$

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $t \in [0, 1]$ ισχύει

$$a \leq (1-t)a + tb = a + t(b-a) \leq b, \tag{7.1.3}$$

δηλαδή

$$\{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\} \subseteq [a, b]. \tag{7.1.4}$$

Αντίστροφα, κάθε $x \in [a, b]$ γράφεται στη μορφή

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b. \tag{7.1.5}$$

Παρατηρώντας ότι $t := (x-a)/(b-a) \in [0, 1]$ και $1-t = (b-x)/(b-a)$, βλέπουμε ότι

$$[a, b] \subseteq \{(1-t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}. \tag{7.1.6}$$

Τα σημεία $(1-t)a + tb$ του $[a, b]$ λέγονται *κυρτοί συνδυασμοί* των a και b. $\square$

Ορισμός 7.1.2. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση.

(α) Η f λέγεται *κυρτή* αν

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)f(a)+tf(b) \tag{7.1.7}$$

για κάθε $a, b \in I$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $0 < t < 1$ (παρατηρήστε ότι, αφού το I είναι διάστημα, το Λήμμα 7.1.1 δείχνει ότι το σημείο $(1-t)a+tb \in [a,b] \subseteq I$, δηλαδή η f ορίζεται καλά σε αυτό). Η γεωμετρική σημασία του ορισμού είναι η εξής: η χορδή που έχει σαν άκρα τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ δεν είναι πουθενά κάτω από το γράφημα της f.

(β) Η f λέγεται *γνησίως κυρτή* αν είναι κυρτή και έχουμε γνήσια ανισότητα στην (7.1.7) για κάθε $a < b$ στο I και για κάθε $0 < t < 1$.

(γ) Η $f : I \to \mathbb{R}$ λέγεται *κοίλη* (αντίστοιχα, γνησίως κοίλη) αν η $-f$ είναι κυρτή (αντίστοιχα, γνησίως κυρτή).

Παρατήρηση 7.1.3. Ισοδύναμοι τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κυρτότητα της $f : I \to \mathbb{R}$ είναι οι εξής:

(α) Αν $a, b, x \in I$ και $a < x < b$, τότε

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b). \tag{7.1.8}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος αυτής της ανισότητας ισούται με

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \tag{7.1.9}$$

(β) Αν $a, b \in I$ και αν $t, s > 0$ με $t + s = 1$, τότε

$$f(ta+sb) \leq tf(a)+sf(b). \tag{7.1.10}$$

7.2 Κυρτές συναρτήσεις ορισμένες σε ανοικτό διάστημα

Σε αυτή την Παράγραφο μελετάμε ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα μια κυρτή συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό διάστημα. Όλα τα αποτελέσματα που θα αποδείξουμε είναι συνέπειες του ακόλουθου «λήμματος των τριών χορδών»:

Πρόταση 7.2.1 (το λήμμα των τριών χορδών). *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y < x < z$ στο (a,b), τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{7.2.1}$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι κυρτή, έχουμε

$$f(x) \leq \frac{z-x}{z-y}f(y) + \frac{x-y}{z-y}f(z). \tag{7.2.2}$$

Από αυτή την ανισότητα βλέπουμε ότι

$$f(x)-f(y)\le \frac{y-x}{z-y}f(y)+\frac{x-y}{z-y}f(z)=\frac{x-y}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{7.2.3}$$

το οποίο αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα στην (7.2.1). Ξεκινώντας πάλι από την (7.2.2), γράφουμε

$$f(x)-f(z)\le \frac{z-x}{z-y}f(y)+\frac{x-z}{z-y}f(z)=-\frac{z-x}{z-y}[f(z)-f(y)], \tag{7.2.4}$$

απ' όπου προκύπτει η δεξιά ανισότητα στην (7.2.1). □

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την εξής απλή συνέπεια του λήμματος των τριών χορδών.

Λήμμα 7.2.2. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $y<x<z<w$ στο (a,b), τότε*

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le \frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{7.2.5}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.2.1 για τα σημεία $y<x<z$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{7.2.6}$$

Εφαρμόζοντας πάλι την Πρόταση 7.2.1 για τα σημεία $x<z<w$, παίρνουμε

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\le \frac{f(w)-f(z)}{w-z}. \tag{7.2.7}$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x\in(a,b)$, τότε υπάρχουν οι πλευρικές παράγωγοι*

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad \textit{και}\quad f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{7.2.8}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$ (με τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε για την αριστερή πλευρική παράγωγο $f'_-(x)$). Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_x:(x,b)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$g_x(z):=\frac{f(z)-f(x)}{z-x}. \tag{7.2.9}$$

Η g_x είναι αύξουσα: αν $x<z_1<z_2<b$, το λήμμα των τριών χορδών δείχνει ότι

$$g_x(z_1)=\frac{f(z_1)-f(x)}{z_1-x}\le \frac{f(z_2)-f(x)}{z_2-x}=g_x(z_2). \tag{7.2.10}$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε τυχόν $y\in(a,x)$, το λήμμα των τριών χορδών (για τα $y<x<z$) δείχνει ότι

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}=g_x(z) \tag{7.2.11}$$

για κάθε $z \in (x,b)$, δηλαδή η g_x είναι κάτω φραγμένη. Άρα, υπάρχει το

$$\lim_{z\to x^+} g_x(z) = \lim_{z\to x^+}\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{7.2.12}$$

Δηλαδή, υπάρχει η δεξιά πλευρική παράγωγος $f'_+(x)$. □

Θεώρημα 7.2.4. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Οι πλευρικές παράγωγοι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b) και $f'_- \leq f'_+$ στο (a,b).*

Απόδειξη. Έστω $x<y$ στο (a,b). Για αρκετά μικρό θετικό h έχουμε $x\pm h, y\pm h \in (a,b)$ και $x+h<y-h$. Από την Πρόταση 7.2.1 και από το Λήμμα 7.2.2 βλέπουμε ότι

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} \leq \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(y-h)}{h} \leq \frac{f(y+h)-f(y)}{h}. \tag{7.2.13}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $h\to 0^+$, συμπεραίνουμε ότι

$$f'_-(x) \leq f'_+(x) \leq f'_-(y) \leq f'_+(y). \tag{7.2.14}$$

Οι ανισότητες $f'_-(x)\leq f'_-(y)$ και $f'_+(x)\leq f'_+(y)$ δείχνουν ότι οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες στο (a,b). Η αριστερή ανισότητα στην (7.2.14) δείχνει ότι $f'_-\leq f'_+$ στο (a,b). □

Η ύπαρξη των πλευρικών παραγώγων εξασφαλίζει ότι κάθε κυρτή συνάρτηση $f: I\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο εσωτερικό του I:

Θεώρημα 7.2.5. *Κάθε κυρτή συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $x\in(a,b)$. Τότε, για μικρά $h>0$ έχουμε $x+h, x-h\in(a,b)$ και

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h \to f(x) + f'_+(x)\cdot 0 = f(x) \tag{7.2.15}$$

όταν $h\to 0^+$, ενώ, τελείως ανάλογα,

$$f(x-h) = f(x) + \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\cdot(-h) \to f(x) + f'_-(x)\cdot 0 = f(x) \tag{7.2.16}$$

όταν $h\to 0^+$. Άρα, η f είναι συνεχής στο x. □

7.3 Παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις

Στο Κεφάλαιο 1 δόθηκε ένας διαφορετικός ορισμός της κυρτότητας για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in(a,b)$, θεωρήσαμε την εφαπτομένη

$$u = f(x) + f'(x)(u-x) \tag{7.3.1}$$

του γραφήματος της f στο $(x,f(x))$ και είπαμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x\in(a,b)$ και για κάθε $y\in(a,b)$ έχουμε

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{7.3.2}$$

Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(y, f(y)) : a < y < b\}$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, αν περιοριστούμε στην κλάση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οι «δύο ορισμοί» συμφωνούν.

Θεώρημα 7.3.1. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Η f είναι κυρτή.*

(β) *Η f' είναι αύξουσα.*

(γ) *Για κάθε $x, y \in (a, b)$ ισχύει η*

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{7.3.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι κυρτή. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, έχουμε $f' = f'_- = f'_+$ στο (a, b). Από το Θεώρημα 7.2.4 οι f'_-, f'_+ είναι αύξουσες, άρα η f' είναι αύξουσα.

Υποθέτουμε τώρα ότι η f' είναι αύξουσα. Έστω $x, y \in (a, b)$. Αν $x < y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x, y]$, βρίσκουμε $\xi \in (x, y)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x)$. Αφού $\xi > x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \geq f'(x)$. Αφού $y - x > 0$, έπεται ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{7.3.4}$$

Αν $x > y$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y, x]$, βρίσκουμε $\xi \in (y, x)$ ώστε $f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x)$. Αφού $\xi < x$ και η f' είναι αύξουσα, έχουμε $f'(\xi) \leq f'(x)$. Αφού $y - x < 0$, έπεται πάλι ότι

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y - x) \geq f(x) + f'(x)(y - x). \tag{7.3.5}$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι η (7.3.3) ισχύει για κάθε $x, y \in (a, b)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι κυρτή. Έστω $x < y$ στο (a, b) και έστω $0 < t < 1$. Θέτουμε $z = (1 - t)x + ty$. Εφαρμόζοντας την υπόθεση για τα ζευγάρια x, z και y, z, παίρνουμε

$$f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z) \quad \text{και} \quad f(y) \geq f(z) + f'(z)(y - z). \tag{7.3.6}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} (1 - t)f(x) + tf(y) &\geq (1 - t)f(z) + tf(z) + f'(z)[(1 - t)(x - z) + t(y - z)] \\ &= f(z) + f'(z)[(1 - t)x + ty - z] \\ &= f(z). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $(1 - t)f(x) + tf(y) \geq f((1 - t)x + ty)$. □

Στην περίπτωση που η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, b), η ισοδυναμία των (α) και (β) στο Θεώρημα 7.3.1 δίνει έναν απλό χαρακτηρισμό της κυρτότητας μέσω της δεύτερης παραγώγου.

Θεώρημα 7.3.2. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η f είναι κυρτή αν και μόνο αν $f''(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.*

Απόδειξη. Η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν $f'' \geq 0$ στο (a, b). Όμως, στο Θεώρημα 7.3.1 είδαμε ότι η f' είναι αύξουσα αν και μόνο αν η f είναι κυρτή. □

7.4 Ανισότητα του Jensen

Η *ανισότητα του Jensen* αποδεικνύεται με επαγωγή και «γενικεύει» την ανισότητα του ορισμού της κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 7.4.1 (ανισότητα του Jensen). *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση. Αν $x_1, \ldots, x_m \in I$ και $t_1, \ldots, t_m \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m = 1$, τότε $\sum_{i=1}^m t_i x_i \in I$ και*

$$f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{7.4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $a = \min\{x_1, \ldots, x_m\}$ και $b = \max\{x_1, \ldots, x_m\}$. Αφού το I είναι διάστημα και $a, b \in I$, συμπεραίνουμε ότι $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq [a, b] \subseteq I$. Αφού $t_i \geq 0$ και $t_1 + \cdots + t_m = 1$, έχουμε

$$a = (t_1 + \cdots + t_m)a \leq t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \leq (t_1 + \cdots + t_m)b = b, \tag{7.4.2}$$

δηλαδή, $t_1x_1 + \cdots + t_mx_m \in I$.

Θα δείξουμε την (7.4.1) με επαγωγή ως προς m. Για $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, ενώ για $m = 2$ η (7.4.1) ικανοποιείται από τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $m \geq 2$, $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1} \in I$ και $t_1, \ldots, t_m, t_{m+1} \geq 0$ με $t_1 + \cdots + t_m + t_{m+1} = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάποιος $t_i < 1$ (αλλιώς, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $t_{m+1} < 1$. Θέτουμε $t = t_1 + \cdots + t_m = 1 - t_{m+1} > 0$. Αφού $x_1, \ldots, x_m \in I$ και $\frac{t_1}{t} + \cdots + \frac{t_m}{t} = 1$, η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$x = \frac{t_1}{t}x_1 + \cdots + \frac{t_m}{t}x_m \in I \tag{7.4.3}$$

και

$$tf(x) = tf\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \cdots + \frac{t_m}{t}x_m\right) \leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m). \tag{7.4.4}$$

Εφαρμόζοντας τώρα τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης, παίρνουμε

$$f(tx + t_{m+1}x_{m+1}) \leq tf(x) + t_{m+1}f(x_{m+1}). \tag{7.4.5}$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες ανισότητες, έχουμε

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \cdots + t_mx_m + t_{m+1}x_{m+1}) &= f(tx + t_{m+1}x_{m+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + \cdots + t_mf(x_m) \\ &\quad + t_{m+1}f(x_{m+1}). \end{aligned} \qquad \square$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen θα δείξουμε κάποιες κλασικές ανισότητες. Η πρώτη από αυτές γενικεύει την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.

Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. *Έστω* $x_1, \ldots, x_n$ *και* $r_1, \ldots, r_n$ *θετικοί πραγματικοί αριθμοί με* $r_1 + \cdots + r_n = 1$. *Τότε,*

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{r_i} \leq \sum_{i=1}^{n} r_i x_i. \tag{7.4.6}$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $x \mapsto \log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$. Αφού $r_i > 0$ και $r_1 + \cdots + r_n = 1$, η ανισότητα του Jensen (για την κυρτή συνάρτηση $-\log$) δείχνει ότι

$$r_1 \log x_1 + \cdots + r_n \log x_n \leq \log(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n). \tag{7.4.7}$$

Δηλαδή,

$$\log(x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}) \leq \log(r_1 x_1 + \cdots + r_n x_n). \tag{7.4.8}$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι η εκθετική συνάρτηση $x \mapsto e^x$ είναι αύξουσα. □

Ειδικές περιπτώσεις της προηγούμενης ανισότητας είναι οι εξής:

(α) Η κλασική ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \tag{7.4.9}$$

όπου $x_1, \ldots, x_n > 0$, η οποία προκύπτει από την (7.4.6) αν πάρουμε $r_1 = \cdots = r_n = \frac{1}{n}$.

(β) Η **ανισότητα του Young**: *Αν* $x, y > 0$ *και* $t, s > 0$ *με* $t + s = 1$, *τότε*

$$x^t y^s \leq tx + sy. \tag{7.4.10}$$

Η (7.4.10) εμφανίζεται πολύ συχνά στην εξής μορφή: *αν* $x, y > 0$ *και* $p, q > 1$ *με* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *τότε*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{7.4.11}$$

Πράγματι, αρκεί να πάρουμε τους x^p, y^q στη θέση των x, y και τους $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ στη θέση των t, s. Οι p και q λέγονται *συζυγείς εκθέτες*. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα μπορούμε να δείξουμε την κλασική **ανισότητα του Hölder**: *Έστω* p, q *συζυγείς εκθέτες. Αν* $a_1, \ldots, a_n$ *και* $b_1, \ldots, b_n$ *είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{1/q}. \tag{7.4.12}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$ και $x_i = a_i/A$, $y_i = b_i/B$. Τότε, η ζητούμενη ανισότητα (7.4.12) παίρνει τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq 1. \tag{7.4.13}$$

Από την (7.4.11) έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} y_i^q. \tag{7.4.14}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = \frac{1}{A^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^q = \frac{1}{B^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1. \tag{7.4.15}$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1. \tag{7.4.16}$$

Έπεται η (7.4.12). $\square$.

Επιλέγοντας $p = q = 2$ παίρνουμε την **ανισότητα Cauchy-Schwarz**: *αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2}. \tag{7.4.17}$$

Κεφάλαιο 8

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

8.1 Παράγωγος και μελέτη συναρτήσεων

A. Ερωτήσεις κατανόησης

A1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

1. *Σωστό.* Έστω $x \in (a,b)$. Από την υπόθεση, η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα είναι συνεχής στο x.

2. *Σωστό.* Αφού $f(0) = f'(0) = 0$, έχουμε

$$0 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, αν $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$. Θεωρώντας την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, παίρνουμε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = 0$.

3. *Λάθος.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $f'(0) = -1 \neq 0$.

4. *Σωστό.* Έστω $x > 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[0,x]$: υπάρχει $\xi_x \in (0,x)$ ώστε

$$f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi_x).$$

Αφού $x > 0$ και $f'(\xi) \geq 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geq 0$.

Για $x = 0$, έχουμε $f(x) = f(0) = 0$.

5. *Σωστό.* Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[0,1]$ και $[1,2]$, βρίσκουμε $y_1 \in (0,1)$ με $f'(y_1) = 0$ και $y_2 \in (1,2)$ με $f'(y_2) = 0$. Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα Rolle για την f' στο $[y_1, y_2]$, βρίσκουμε $x_0 \in (y_1, y_2)$ με $f''(x_0) = 0$. Τέλος, $0 < y_1 < x_0 < y_2 < 2$, δηλαδή $x_0 \in (0,2)$.

6. *Σωστό.* Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |y - x_0| < \delta$, τότε $|f'(y) - \ell| < \varepsilon$. Έστω $x \in (a,b)$ με $x_0 < x < x_0 + \delta$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι f είναι συνεχής στο $[x_0, x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, x), οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x]$, βρίσκουμε $y_x \in (x_0, x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y_x)$. Όμως, $0 < |y_x - x_0| < |x - x_0| < \delta$, άρα $|f'(y_x) - \ell| < \varepsilon$. Συνεπώς,

$$(*) \qquad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| = |f'(y_x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in (x_0, x_0+\delta)$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \ell$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το όριο από αριστερά ισούται με ℓ, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και $f'(x_0) = \ell$.

7. *Λάθος.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -x^2$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$, άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$. Όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0: έχουμε

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|x^2|}{|x|} = |x| \to 0 \quad \text{όταν } x \to 0,$$

άρα $f'(0) = 0$.

8*. *Λάθος.* Χρησιμοποιούμε μια παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = x - x^2$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 1 > 0$ (εξηγήστε γιατί). Θα δείξουμε όμως ότι, για κάθε $\delta > 0$, η f δεν είναι αύξουσα στο $(0, \delta)$. Θεωρήστε τυχόντα ρητό $x \in (0, \delta)$. Από την πυκνότητα των αρρήτων στο $\mathbb{R}$, υπάρχει άρρητος y ώστε $x < y < \min\{\delta, x + x^2\}$. Τότε, $y \in (0, \delta)$ και $x < y$, όμως

$$f(y) = y - y^2 < y < x + x^2 = f(x).$$

Άρα, η f δεν είναι αύξουσα στο $(0, \delta)$.

Α2. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$: Θεωρήστε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+1}{3}$ (τη γραμμική συνάρτηση με $f(-1) = 0$ και $f(2) = 1$). Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα, $f'(1) > 0$.

(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$: Θεωρήστε συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ζητάμε: $f(-1) = a - b + c = 0$ και $f(2) = 4a + 2b + c = 1$, άρα $c = \frac{1}{3} - 2a$ και $b = \frac{1}{3} - a$. Επίσης, $f'(x) = 2ax + b$, άρα

$$f'(1) = 2a + b = a + \frac{1}{3} < 0 \quad \text{αν } a < -\frac{1}{3}.$$

Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε: $a = -\frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{3}$. Ελέγξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{5}{3}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 3]$: Το τυπικό παράδειγμα γνησίως αύξουσας παραγωγίσιμης συνάρτησης που η παράγωγός της μηδενίζεται σε ένα σημείο είναι η $g(x) = x^3$. Θεωρήστε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a(x-1)^3 + b$. Ζητάμε: $f(0) = -a + b = 0$, άρα $b = a$. Επίσης, $f(3) = 8a + a = 1$, άρα $a = \frac{1}{9}$. Ελέγξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^3+1}{9}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leq \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = a\sin(\pi x)$. Τότε, $f(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $f'(m) = \pi a \cos(\pi m) = (-1)^m \pi a$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε $a = \frac{1}{\pi}$ ώστε να ικανοποιούνται οι δύο πρώτες συνθήκες. Τότε,

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right| \leq \frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $\pi > 2$. Δηλαδή, ικανοποιείται και η τρίτη συνθήκη.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. (α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Οι ρίζες της παραγώγου είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{4}{3}$. Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-2, 2)$ είναι το x_2. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$f(-2) = 5, \quad f(2) = -11, \quad f(-4/3) = 203/27.$$

Έπεται ότι $\max(f) = 203/27$ και $\min(f) = -11$.

(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, δηλαδή η f δεν έχει κρίσιμα σημεία. Υπολογίζουμε τις τιμές $f(-1) = -1$ και $f(1) = 3$. Έπεται ότι $\max(f) = 3$ και $\min(f) = -1$.

(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος είναι τα $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-1, 2)$ είναι το x_2. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2.$$

Έπεται ότι $\max(f) = 2$ και $\min(f) = -2$.

2. (α) Η εξίσωση $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax - bx - cx$.

Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle βρίσκουμε μια ρίζα της εξίσωσης στο $(0, 1)$.

(β) Η εξίσωση $6x^4 - 7x + 1 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6x^4 - 7x + 1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ (δηλαδή, ότι η εξίσωση έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, βρίσκουμε $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$ ώστε $f'(y_1) = f'(y_2) = 0$. Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο (διαφορετικές) πραγματικές ρίζες. Όμως, $f'(x) = 24x^3 - 7 = 0$ αν και μόνο αν $x = \sqrt[3]{7/24}$, δηλαδή η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η αρχική εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

(γ) Η εξίσωση $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 9x^2 + 33x - 8$. Αφού $f(0) = -8 < 0$ και $f(1) = 35 > 0$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Αν υποθέσουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα (θεώρημα Rolle). Όμως, $f'(x) = 3x^2 + 18x + 33 = 3(x^2 + 6x + 11) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ελέγξτε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική). Αυτό είναι άτοπο, άρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

Από τα παραπάνω, η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

3. Θεωρούμε την $f(x) = x^n + ax + b$ και υποθέτουμε πρώτα ότι ο $n \geq 4$ είναι άρτιος (για $n = 2$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Έστω ότι η $f(x) = 0$ έχει τρείς διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Από το θεώρημα Rolle, η $f'(x) = nx^{n-1} + a = 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Αυτό είναι άτοπο: ο $n - 1$ είναι περιττός, άρα $nx^{n-1} + a = 0$ αν και μόνο αν $x = \sqrt[n-1]{-a/n}$ (μοναδική πραγματική ρίζα).

Έστω τώρα ότι ο $n \geq 3$ είναι περιττός. Τότε, ο $n - 1$ είναι άρτιος και η $nx^{n-1} + a = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες: τις $\pm \sqrt[n-1]{-a/n}$ αν $a < 0$, την $x = 0$ αν $a = 0$, καμία αν $a > 0$. Άρα, η $f(x) = 0$ έχει το πολύ τρείς πραγματικές ρίζες (εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle).

4. Αν υποθέσουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle βλέπουμε ότι η $f''(x) = 0$ έχει $n-1$ διαφορετικές πραγματικές ρίζες, και, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ότι η $f^{(n)}(x) = 0$ έχει (τουλάχιστον) μία πραγματική ρίζα. Όμως, $f^{(n)}(x) = n! \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει το πολύ $(n - 1)$ πραγματικές ρίζες. Παρατηρούμε τώρα ότι: για κάθε $i = 1, \ldots, n - 1$ έχουμε $f(a_i) = f(a_{i+1}) = 0$, οπότε το θεώρημα Rolle δείχνει ότι υπάρχει $y_i \in (a_i, a_{i+1})$ ώστε $f'(y_i) = 0$. Τα $y_1, \ldots, y_{n-1}$ είναι διαφορετικά ανά δύο γιατί τα (a_i, a_{i+1}) είναι ξένα ανά δύο (διαδοχικά) διαστήματα. Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον $n - 1$ πραγματικές ρίζες.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ πραγματικές ρίζες.

6. (α) Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα ab με την υπόθεση $a^2+b^2=d^2$, όπου $d>0$ (εξηγήστε γιατί). Παρατηρήστε ότι

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{d^2}{2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $a=b\ (=d/\sqrt{2})$.

Άλλος τρόπος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f:[0,d]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=a\sqrt{d^2-a^2}$ ή, ισοδύναμα, την $g=f^2:[0,d]\to\mathbb{R}$ με $g(a)=a^2(d^2-a^2)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\max(g)=f(d/\sqrt{2})$ (εξηγήστε γιατί). Παραγωγιζοντας, έχουμε $g'(a)=2ad^2-4a^3=2a(d^2-2a^2)$. Έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,d/\sqrt{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[d/\sqrt{2},d]$, άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν και μόνο αν $a=d/\sqrt{2}$.

(β) Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα ab με την υπόθεση $a+b=d$, όπου $d>0$ (εξηγήστε γιατί). Παρατηρήστε ότι

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{d^2}{4}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $a=b\ (=d/2)$.

Άλλος τρόπος. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g:[0,d]\to\mathbb{R}$ με $g(a)=a(d-a)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\max(g)=f(d/2)$ (εξηγήστε γιατί). Παραγωγιζοντας, έχουμε $g'(a)=d-2a$. Έπεται ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,d/2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[d/2,d]$, άρα παίρνει τη μέγιστη τιμή της αν και μόνο αν $a=d/2$.

7. Έστω (x,y) ένα σημείο της υπερβολής $x^2-y^2=1$. Το τετράγωνο της απόστασης του (x,y) από το $(0,1)$ ισούται με $x^2+(y-1)^2=1+y^2+(y-1)^2=2y^2-2y+2$. Παρατηρήστε ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ υπάρχουν δύο τιμές του x (οι $\pm\sqrt{1+y^2}$) ώστε το (x,y) να ανήκει στην υπερβολή. Αρκεί λοιπόν (εξηγήστε γιατί) να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(y)=2y^2-2y+2$. Παραγωγίζοντας, βλέπουμε ότι το $\min(g)$ πιάνεται όταν $y=1/2$, οπότε παίρνουμε δύο σημεία, τα $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2},\frac{1}{2}\right)$.

8. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A=(1,0)$ και $B=(-1,0)$. Αρκεί να θεωρήσουμε σημεία Γ της μορφής $(\cos x,\sin x)$, όπου $0\leq x\leq\pi$. Αυτά είναι τα σημεία του άνω ημικυκλίου, για το κάτω ημικύκλιο εργαζόμαστε ανάλογα. Παρατηρήστε ότι το μήκος του $A\Gamma$ είναι $2\sin\frac{x}{2}$ και το μήκος του $B\Gamma$ είναι $2\sin\frac{\pi-x}{2}=2\cos\frac{x}{2}$. Αρκεί λοιπόν να μεγιστοποιήσουμε την $g:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$ (εξηγήστε γιατί). Αφού $g'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, συμπεραίνουμε ότι η g παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}$, δηλαδή $x=\pi/2$. Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $\Gamma_1=(0,1)$ και $\Gamma_2=(-1,0)$.

9. Παρατηρήστε ότι

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(x^2-2a_kx+a_k^2)=nx^2-2(a_1+\cdots+a_n)x+(a_1^2+\cdots+a_n^2).$$

Η παράγωγος της f είναι η

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1 + \cdots + a_n).$$

Έπεται ότι η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$. Η ελάχιστη τιμή είναι ίση με $\min(f) = (a_1^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)^2$.

10. Μελετήστε την f χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, a]$ και $[a, +\infty)$ (ώστε να «διώξετε» τις απόλυτες τιμές). Παραγωγίζοντας, ελέγξτε ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, φθίνουσα στο $[a, +\infty)$, ενώ στο $[0, a]$ έχουμε ότι η f είναι φθίνουσα στο $[0, a/2]$ και αύξουσα στο $[a/2, a]$.

Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της f είναι μία από τις $f(0)$ και $f(a)$. Παρατηρήστε ότι $f(0) = 1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a} = f(a)$. Συνεπώς, $\max(f) = \frac{2+a}{1+a}$.

11. Έχουμε $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0$, βλέπουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $x \in (a, b)$ και

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Κατόπιν, διακρίνουμε τις περιπτώσεις $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ και $x \in (x_0 - \delta, x_0)$. Για παράδειγμα, αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) > 0, \quad \text{άρα } f(x) > f(x_0).$$

12. (α) Αφού η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0, έχουμε $f'(x_0) = 0$ (το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της f). Αν είχαμε $f''(x_0) < 0$, τότε η f θα είχε τοπικό μέγιστο στο x_0, και μάλιστα γνήσιο, με την εξής έννοια: θα υπήρχε $\delta > 0$ ώστε $f(x) < f(x_0)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ (έχει αποδειχθεί στη θεωρία). Αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. Άρα, $f''(x_0) \geq 0$.

(β) Με τον ίδιο τρόπο (απαγωγή σε άτοπο).

13. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in (a, b)$ ώστε $f'(x) = g'(x)$ (αυτό σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αφού $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$, έχουμε $h(a) = h(b) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle, βρίσκουμε $x \in (a, b)$ ώστε $h'(x) = 0$, δηλαδή, $f'(x) - g'(x) = 0$.

14. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a, b) ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, και ότι η g δεν μηδενίζεται στο (x_1, x_2) (απαγωγή σε άτοπο). Εφαρμόζοντας την υπόθεση $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ στα x_1 και x_2, βλέπουμε ότι $f'(x_1)g(x_1) \neq 0$ και $f'(x_2)g(x_2) \neq 0$, άρα η g δεν μηδενίζεται στα x_1, x_2. Με άλλα λόγια, η g δεν μηδενίζεται στο $[x_1, x_2]$.

Τότε, μπορούμε να ορίσουμε την $h := \frac{f}{g} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), και $h(x_1) = h(x_2) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο: αφού $x \in (a, b)$, έχουμε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$, άρα $h'(x) \neq 0$.

15. Θέτουμε $\gamma = \frac{a+b}{2}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$ βρίσκουμε $x_1 \in (a, \gamma)$ και $x_2 \in (\gamma, b)$ που ικανοποιούν τις

$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} \quad \text{και} \quad f'(x_2) = \frac{f(b) - f(\gamma)}{b - \gamma}.$$

Χρησιμοποιώντας την $\gamma - a = \frac{b-a}{2} = b - \gamma$ και την $f(a) = f(b)$, ελέγξτε ότι $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

16. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{y \to +\infty} f'(y) = 0$, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y > M$ ισχύει $|f'(y)| < \varepsilon$. Έστω $x > M$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$: υπάρχει $y_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) - f(x) = f'(y_x)((x+1) - x) = f'(y_x).$$

Όμως $y_x > x > M$, άρα $|f'(y_x)| < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.

17. Έστω $x > 1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+\sqrt{x}]$: υπάρχει $y_x \in (x, x+\sqrt{x})$ ώστε

$$f(x+\sqrt{x}) - f(x) = f'(y_x)\sqrt{x}.$$

Όμως $y_x > x > 1$, άρα $|f'(y_x)| \leq \frac{1}{y_x} < \frac{1}{x}$. Δηλαδή,

$$|f(x+\sqrt{x}) - f(x)| < \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι $\lim_{x \to +\infty} (f(x+\sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

18. (α) Η παράγωγος της $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $x \in (0, a)$ ισούται με

$$h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x]$ για την f, βρίσκουμε $\xi \in (0, x)$ ώστε

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x.$$

Όμως η f' είναι αύξουσα και $\xi < x$, άρα $f'(\xi) \leq f'(x)$. Συνεπώς, $f(x) \leq f'(x)x$. Έπεται ότι $h' \geq 0$ στο $(0, a)$, άρα η h είναι αύξουσα.

(β) Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι καλά ορισμένη στο $(0, a)$. Πράγματι, παρατηρήστε ότι η $\frac{f'}{g'}$ ορίζεται καλά στο $(0, a)$ και ότι $g' > 0$ (από την υπόθεση). Αυτό έχει σαν συνέπεια και την $g(x) > 0$ στο $(0, a)$ (δείτε την ερώτηση κατανόησης 4). Έχουμε

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x]$ για την $z_x(t) = f(t)g(x) - g(t)f(x)$, βρίσκουμε $\xi \in (0, x)$ ώστε

$$0 = z_x(x) - z_x(0) = f'(\xi)g(x) - g'(\xi)f(x).$$

Αφού η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα και $\xi < x$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leq \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Συνεπώς, $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \geq 0$. Έπεται ότι $h' \geq 0$ στο $(0, a)$, άρα η h είναι αύξουσα.

Γ. Ασκήσεις*

1. Μελετήστε την g χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ και $[a_n, +\infty)$ (για να «διώξετε» τις απόλυτες τιμές). Θα χρειαστεί να διακρίνετε τις περιπτώσεις n περιττός και n άρτιος.

(α) Αν $n = 2s - 1$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι η g είναι φθίνουσα στο $(-\infty, a_s]$ και αύξουσα στο $[a_s, +\infty)$. Συνεπώς,

$$\min(g) = \sum_{k=1}^{2s-1} |a_s - a_k| = \sum_{k=s+1}^{2s-1} a_k - \sum_{k=1}^{s-1} a_k.$$

(β) Αν $n = 2s$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι η g είναι φθίνουσα στο $(-\infty, a_s]$, σταθερή στο $[a_s, a_{s+1}]$, και αύξουσα στο $[a_{s+1}, +\infty)$. Συνεπώς,

$$\min(g) = \sum_{k=1}^{2s} |a_s - a_k| = \sum_{k=1}^{2s} |a_{s+1} - a_k| = \sum_{k=s+1}^{2s} a_k - \sum_{k=1}^{s} a_k.$$

2. Έστω $n < m$ στο $\mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $\left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right]$ βρίσκουμε $\xi_{nm} \in \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$ ώστε

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{m}\right) \right| = |f'(\xi_{nm})| \cdot \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|.$$

Από την υπόθεση έχουμε $|f'(\xi_{nm})| \leq 1$, άρα

$$|a_m - a_n| \leq \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy.

3. (α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle δείξτε επαγωγικά το εξής: για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, η εξίσωση $f^{(k)}(x) = 0$ έχει k διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(-1, 1)$ και $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει n διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(-1, 1)$.

(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει το πολύ n διαφορετικές λύσεις. [*Υπόδειξη:* Αν η $f^{(n)}(x) = 0$ είχε $n+1$ διαφορετικές λύσεις, τότε η $f^{(2n)}(x) = 0$ θα είχε λύση.]

4. Έστω $a > 0$. Υποθέστε ότι υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$ και $f'(x) \geq a$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

(α) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[0, x]$ δείξτε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geq a.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x}$, μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

5. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι για κάποιο $x_0 \in (a, b)$ ισχύει
$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell > f'(x_0),$$
και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

(α) Θεωρούμε $m \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί την $\ell > m > f'(x_0)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ και $f'(x) > m$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$.

(β) Δείξτε ότι η f' δεν έχει την ιδιότητα Darboux στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και καταλήξτε έτσι σε άτοπο.

6. Υποθέτουμε ότι $-\infty \leq \lim\limits_{x \to b^-} f'(x) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\ell \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f'(y) \leq \ell$ για κάθε $y \in (x_0, b)$.

(β) Θεωρήστε $x \in (x_0, b)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x]$ δείξτε ότι
$$f(x) \leq f(x_0) + \ell(x - x_0) \leq f(x_0) + \ell(b - a).$$

(γ) Από το (β) η f είναι άνω φραγμένη στο $[x_0, b)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

7. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να έχουμε $|f'(x)| > \frac{|\ell|}{2}$.

(β) Θεωρήστε $x > M$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[M, x]$ δείξτε ότι
$$|f(x) - f(M)| \geq \frac{|\ell|(x-M)}{2}.$$
(γ) Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x) - f(M)| = |L - f(M)|$. Από την άλλη πλευρά, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|\ell|(x-M)}{2} = +\infty$. Από το (β) μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

(δ) Υποθέτοντας ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \pm\infty$, μπορείτε πάλι να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να έχουμε $|f'(x)| > 1$. Συνεπώς, επαναλαμβάνοντας τα βήματα (β) και (γ), καταλήγετε σε άτοπο.

8.2 Σειρές πραγματικών αριθμών

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

1. *Λάθος*. Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k} \to 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

2. *Λάθος*. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $a_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $a_k \not\to 0$.

3. *Λάθος*. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$ και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, δηλαδή η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει απολύτως.

4. *Σωστό*. Αποδείξαμε (στη θεωρία) ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

5. *Λάθος*. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

6. *Λάθος*. Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

7. *Σωστό*. Αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$ για κάθε $k \geq N$. Αφού η (a_k) έχει θετικούς όρους, συμπεραίνουμε ότι $0 < a_N \leq a_{N+1} \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Συνεπώς, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

8. *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $a_k \to 0$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

9. *Λάθος.* Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{a_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

10. *Λάθος.* Από το κριτήριο του Dirichlet, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει.

11. *Σωστό.* Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$, $0 \leq a_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq a_k^2 \leq a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k^2$ συγκλίνει.

12. *Λάθος.* Θέτουμε $a_k = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$. Τότε, $a_k > 0$ και

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2k+2)]k!}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)](k+1)!} = \frac{2k+2}{k+1} = 2 \to 2 > 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ αποκλίνει.

13. *Σωστό.* Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k(1+k^2)^p}{k^{2p+1}} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^p = 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{-(2p+1)}}$ συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $-(2p+1) > 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $p < -1$.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς ισούται με

$$s_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$$

Αφού $\lim\limits_{k\to\infty}b_k = b$, βλέπουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}s_n = b_1 - b$. Συνεπώς, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b$.

2. (α) Θέτουμε $b_k = \frac{1}{2k-1}$. Παρατηρούμε ότι

$$b_k - b_{k+1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Έχουμε $b_1 = 1$ και $b_k \to 0$. Από την Άσκηση 1,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}(b_1 - b) = \frac{1}{2}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι αν $0 < x < 1$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/3}{1-(1/3)} + \frac{1/2}{1-(1/2)} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(γ) Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - 0 = 1,$$

χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1 για την $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$.

3. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} = \frac{2(k+1)}{2k(k+2)(k+1)^2} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 1 για την $b_k = \frac{1}{2k(k+1)} \to 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = b_1 = \frac{1}{4}.$$

4. Παρατηρούμε ότι: αν $|x| < 1$ τότε $\frac{1}{1+x^k} \to 1 \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = 1$, τότε $\frac{1}{1+x^k} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$, άρα η σειρά αποκλίνει. Αν $x = -1$, ο k-οστός όρος δεν ορίζεται στην περίπτωση που ο k είναι περιττός, άρα δεν έχει νόημα να εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $|x| > 1$. Τότε, συγκρίνοντας με την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x|^k}$ (η οποία συγκλίνει ως γεωμετρική σειρά με λόγο $\frac{1}{|x|} < 1$) βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{|1+x^k|} \leq \frac{1}{|x|^k - 1} \leq \frac{|x|}{|x|-1}\frac{1}{|x|^k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (ελέγξτε το, χρησιμοποιώντας την $|x| > 1$). Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}$ συγκλίνει απολύτως.

5. Εξετάζουμε μερικές από αυτές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{(k+1)^{k+1}|x|^{k+1}}{k^k|x|^k} = (k+1)\left(1+\frac{1}{k}\right)^k |x| \to +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά αποκλίνει. Η σειρά συγκλίνει μόνο αν $x = 0$.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγατε αν χρησιμοποιούσατε το κριτήριο της ρίζας: παρατηρήστε ότι $\sqrt[k]{k^k|x|^k} = k|x| \to +\infty$ αν $x \neq 0$.

(β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 < 1.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)^2}{2^k|x|^k/k^2} = 2|x|\frac{k^2}{(k+1)^2} \to 2|x|.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως αν $|x| < 1/2$ και αποκλίνει αν $|x| > 1/2$. Εξετάζουμε τη σύγκλιση χωριστά στις περιπτώσεις $x = \pm 1/2$. Παρατηρώντας ότι οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνουν, συμπεραίνουμε τελικά ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|x| \leq 1/2$.

6. (α) Παρατηρήστε ότι το $(2n)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

ισούται με

$$s_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους και $s_{2n} \leq \frac{3}{2}$ για κάθε n, έπεται ότι η σειρά συγκλίνει (εξηγήστε γιατί).

(β) Παρατηρήστε ότι το $(2n)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\cdots$$

ισούται με

$$s_{2n} = \sum_{k=0}^{2n-1}\frac{1}{2^k} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2.$$

Αφού η σειρά έχει θετικούς όρους και $s_{2n} \leq 2$ για κάθε n, έπεται ότι η σειρά συγκλίνει.

7. (α) Αν $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, τότε $s_n = a_1 + \cdots + a_n = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(β) Έχουμε $a_k = \sqrt{1+k^2} - k = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}+k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}+k} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(γ) Έχουμε $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k} = \frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k^{3/2}} \to \frac{1}{2} > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(δ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0 < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

8. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$: παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_k}{1/k^2} = \frac{k^3 + k^2\sqrt{k}}{2k^3 - 1} \to \frac{1}{2} > 0.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$: θέτουμε $\theta_k = \sqrt[k]{k} - 1 \geq 0$. Τότε, $k = (1+\theta_k)^k$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \geq 3$,

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < 3 \leq k = (1+\theta_k)^k.$$

Άρα, $\theta_k > \frac{1}{k}$ για κάθε $k \geq 3$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta_k$ αποκλίνει κι αυτή.

(γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}$: παρατηρούμε ότι $|a_k| \leq \frac{1}{k^2}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} < 1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

9. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Έχουμε $\sqrt[k]{a_k} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} \to \frac{1}{e} < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = p\frac{(k+1)^p}{k^p} \to p,$$

άρα η σειρά συγκλίνει αν $0 < p < 1$ και αποκλίνει αν $p > 1$. Για $p = 1$ παίρνουμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$, η οποία αποκλίνει ($k \not\to 0$ όταν $k \to \infty$!).

(γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$: θεωρούμε την $b_k = 1/k^p$. Αφού $q < p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1-k^{-(p-q)}} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 1$ (και $0 < q < p$).

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$: θεωρούμε την $b_k = 1/k$. Έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{k\sqrt[k]{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει).

(ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$: θεωρούμε την $b_k = 1/p^k$. Αφού $0 < q < p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{1-(q/p)^k} \to 1 > 0$ (διότι $(p/q)^k \to 0$ αφού $0 < p/q < 1$). Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p > 1$ (και $0 < q < p$).

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$: παρατηρούμε ότι $0 < a_k \leq \frac{3}{2^k}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$a_k = k^p \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}.$$

Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^{3/2}}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2} > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(3/2)-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $\frac{3}{2} - p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < \frac{1}{2}$.

(η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} + \sqrt{k-1}\right)$: παρατηρούμε ότι, για $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} a_k &= k^p(\sqrt{k+1} - \sqrt{k} + \sqrt{k-1} - \sqrt{k}) \\ &= k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}}\right) \\ &= -2k^{p-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{k-1}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, η $(a_k)_{k\geq 2}$ έχει αρνητικούς όρους. Άρα, συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-a_k)$ συγκλίνει (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^2}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $2-p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < 1$.

10. Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{a_k}{1+k^2 a_k} \leq \frac{1}{k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυτό είναι φανερό αν $a_k = 0$, ενώ αν $a_k > 0$ μπορείτε να γράψετε

$$0 < \frac{a_k}{1+k^2 a_k} < \frac{a_k}{k^2 a_k} = \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, το συμπέρασμα προκύπτει από το κριτήριο σύγκρισης.

11. Η σειρά έχει θετικούς όρους. Αρκεί να δείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρήστε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{m^2} = \sum_{k=1}^{m^2} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_{k^2} + \sum_{\substack{k \leq m^2 \\ k \neq s^2}} a_k \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \leq s_{n^2} \leq M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη.

12. Αν $p > 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει από το κριτήριο του Dirichlet. Αν $p \leq 0$, τότε $(-1)^k \frac{1}{k^p} \not\to 0$, άρα η σειρά αποκλίνει.

13. Γράφουμε $(-1)^n(s-s_n) = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+k-1} a_k$. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_k = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) \geq 0,$$

άρα

$$(-1)^n(s-s_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_n \geq 0.$$

Επίσης,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m+1} (-1)^{n+k-1} a_k = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2m} - a_{n+2m+1}) \leq a_{n+1},$$

άρα

$$(-1)^n(s-s_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m+1} (-1)^{n+k-1} a_n \leq a_{n+1}.$$

14. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$a_{m+1} + \cdots + a_n = |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n \geq 2n_0$, παίρνοντας $m = n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2} > a_{n_0+1} + \cdots + a_n \geq (n-n_0)a_n \geq \frac{na_n}{2},$$

διότι $n - n_0 \geq \frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n \geq 2n_0$ έχουμε $na_n < \varepsilon$. Έπεται ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(na_n) = 0$.

15. (α) Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geq m$, $0 \leq a_k \leq 1$. Τότε, για κάθε $k \geq m$ έχουμε $0 \leq a_k^2 \leq a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{a_k}{1+a_k} \leq a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0 \leq \frac{a_k^2}{1+a_k^2} \leq a_k^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

16. Παρατηρήστε ότι $0 \leq \sqrt{a_k a_{k+1}} \leq \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

Με την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, παρατηρήστε ότι $0 \leq a_{k+1} \leq \sqrt{a_k a_{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

17. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \leq \sqrt{M_1 M_2},$$

όπου

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \quad \text{και} \quad M_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

18. Αν $b_0 = 1$ και

$$b_k = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$

για $k \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_{k-1} - b_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_0 - b_n = 1 - b_n.$$

Παρατηρώντας ότι

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > a_1 + \cdots + a_n \to +\infty$$

δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - b_n \to 1.$$

Γ. Ασκήσεις*

1. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\}$ συγκλίνει. Αφού η (a_k) φθίνει προς το 0, το ίδιο ισχύει για την $\left(\min\{a_k, \frac{1}{k}\}\right)$ (εξηγήστε γιατί). Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \min\left\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\}$$

συγκλίνει. Ειδικότερα, $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} \to 0$, άρα τελικά έχουμε $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} = 2^k a_{2^k}$ (εξηγήστε γιατί).

Έπεται ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας ξανά το κριτήριο συμπύκνωσης, αυτή τη φορά για τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, βλέπουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

2. (α) Έστω ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει. Τότε,

$$\frac{a_k}{1+a_k} \to 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{a_k}{1+a_k} \to 1 \quad \Rightarrow 1 + a_k \to 1.$$

Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: $1 + a_k < \frac{3}{2}$ για κάθε $k \geq m$. Έπεται ότι $0 \leq a_k \leq \frac{3}{2}\frac{a_k}{1+a_k}$ για κάθε $k \geq m$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Άρα, αν $1 \leq m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} &\geq \frac{a_{m+1}}{s_n} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_{m+1} + \cdots + a_n}{s_n} \\ &= \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geq n_0$ τότε

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} < \frac{1}{2},$$

δηλαδή

$$1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_m}{s_n} > \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιήστε $m \geq n_0$ και αφήστε το $n \to \infty$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, έχουμε $s_n \to \infty$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_m}{s_n} = 0$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{a_n}{s_n^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} \leq \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$

Αν t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$, τότε

$$t_n = \frac{a_1}{s_1^2} + \frac{a_2}{s_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{s_n^2} \leq \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) \leq \frac{2}{s_1}.$$

Η (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

3. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $r_n \to 0$. Παρατηρήστε επίσης ότι η (r_n) είναι φθίνουσα.

(α) Αν $1 \leq m < n$,

$$\begin{aligned} \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} &\geq \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_m} \geq \frac{a_m + \cdots + a_n}{r_m} \\ &= \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m} \geq 1 - \frac{r_n}{r_m}. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geq n_0$,

$$1 - \frac{r_n}{r_m} \leq \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} < \frac{1}{2}.$$

Σταθεροποιώντας $m \geq n_0$ και αφήνοντας το $n \to \infty$ καταλήξτε σε άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι

$$\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \geq \frac{a_n}{2\sqrt{r_n}}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \leq 2\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \cdots + \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leq 2\sqrt{r_1}.$$

Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ συγκλίνει.

4. Θέτουμε $b_k = ka_k$. Τότε, θέλουμε να δείξουμε ότι: αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει.

Παρατηρήστε ότι αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Αφού η $\frac{1}{k}$ φθίνει προς το 0, το κριτήριο Dirichlet δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k}$ συγκλίνει, το οποίο είναι άτοπο.

5. Έστω s_n και t_n τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ αντίστοιχα. Θα συγκρίνουμε τα s_{2n} και t_n. Έχουμε

$$t_n = b_1+b_2+\cdots+b_n = a_2+\frac{1}{2}(a_3+a_4)+\frac{1}{3}(a_4+a_5+a_6)+\cdots+\frac{1}{n}(a_{n+1}+\cdots+a_{2n}).$$

Δείξτε ότι στο t_n εμφανίζονται μόνο οι $a_2, \ldots, a_{2n}$ και ότι ο συντελεστής καθενός a_k στο t_n είναι μικρότερος ή ίσος του 1. Έπεται ότι $t_n \leq s_{2n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει.

Από την άλλη πλευρά, θεωρήστε το μερικό άθροισμα t_{2n}, και δείξτε ότι κάθε a_k, $2 \leq k \leq n$, εμφανίζεται εκεί με συντελεστή $\sigma_k = \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{2m-1}$ αν ο k είναι άρτιος, και συντελεστή $\sigma_k = \frac{1}{m+1} + \cdots + \frac{1}{2m}$ αν ο k είναι περιττός. Σε κάθε περίπτωση, $\sigma_k \geq \frac{1}{2}$. Άρα,

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + 2t_{2n}.$$

Έπεται ότι, αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει τότε η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

6. Αφού $a_k \to 0$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $k \geq m$ τότε

$$a_k < \beta - \alpha.$$

Αφού $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$, υπάρχει ελάχιστος φυσικός $\ell \geq m$ ώστε

$$a_m + \cdots + a_\ell \geq \beta.$$

(α) Δείξτε ότι $\ell > m$.

(β) Αν $n = \ell - 1$, παρατηρήστε ότι $n \geq m$ και

$$a_m + \cdots + a_n < \beta,$$

ενώ

$$a_m + \cdots + a_n \geq \beta - a_\ell > \beta - (\beta - \alpha) = \alpha.$$

7. Εφαρμόστε την προηγούμενη άσκηση για την $a_k = \frac{1}{k}$.

8.3 Ομοιόμορφη συνέχεια

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Λάθος*. Αν μια συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$ έχουμε $f(x)\to +\infty$ όταν $x\to 0^+$.

2. *Λάθος*. Αν μια συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Για την $f(x)=\frac{1}{x-1}$ έχουμε $f(x)\to -\infty$ όταν $x\to 1^-$.

3. *Σωστό*. Έστω ότι η συνάρτηση $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ (και είναι πραγματικοί αριθμοί). Έπεται (δείτε την Άσκηση 12) ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\tilde{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ ώστε $\tilde{f}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in(0,1)$. Η $\tilde{f}$ είναι φραγμένη (ως συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα). Συνεπώς, η f είναι επίσης φραγμένη (ως περιορισμός φραγμένης συνάρτησης).

4. *Σωστό*. Αποδείχθηκε στη θεωρία.

5. *Σωστό*. Η ακολουθία $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 2}$ είναι ακολουθία Cauchy στο $(0,1)$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η ακολουθία $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ είναι ακολουθία Cauchy (από το προηγούμενο ερώτημα). Συνεπώς, η $\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ συγκλίνει.

6. *Σωστό*. Οι f και g έχουν φραγμένη παράγωγο, άρα είναι Lipschitz συνεχείς (με σταθερά 1, εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Όμως, η $(fg)(x)=x\sin x$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$: δείτε την Άσκηση 13(ζ).

7. *Σωστό*. Η f εχει φραγμένη παράγωγο (ίση με 1) στο $(0,+\infty)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Ομοίως, η f έχει φραγμένη παράγωγο (ίση με 2) στο $(-\infty,0)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,0]$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Άσκησης 7, μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

8. *Λάθος*. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\cos(x^2)$ είναι φραγμένη και συνεχής, όμως δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για τις ακολουθίες $x_n=\sqrt{\pi n+\pi}$ και $y_n=\sqrt{\pi n}$ έχουμε $x_n-y_n\to 0$, αλλά $|f(x_n)-f(y_n)|=2\to 2\neq 0$ όταν $n\to\infty$.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Αν $x, y \in X$ και $|x-y| < \delta$, τότε

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x-y| < M\delta = \varepsilon.$$

Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(β) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Όμως, η f δεν ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[0,1]$. Θα υπήρχε $M > 0$ ώστε: για κάθε $0 < x < 1$ να ισχύει

$$|\sqrt{x} - 0| \leq M|x - 0|, \quad \text{δηλαδή} \quad 1 \leq M\sqrt{x}.$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο όταν $x \to 0^+$.

2. Έστω ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ για κάθε $x, y \in [a,b]$. Θεωρούμε $x_0 \in (a,b)$. Τότε, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Όμως, αν $x \neq x_0$ στο (a,b), έχουμε

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M \quad \text{άρα} \quad |f'(x_0)| = \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq M.$$

Δηλαδή, η f' είναι φραγμένη.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(\xi)| \leq M$ για κάθε $\xi \in (a,b)$. Έστω $x < y$ στο $[a,b]$. Από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (x,y)$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x-y| \leq M \cdot |x-y|.$$

Δηλαδή, η f είναιLipschitz συνεχής.

3. Δείτε την Άσκηση 1(β).

4. Από την Άσκηση 2 αρκεί να εξετάσετε αν καθεμία από τις f και g έχει φραγμένη παράγωγο στο $(0,1)$.

5. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\zeta = \zeta(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $u, v \in [m, M]$ και $|u - v| < \zeta$ τότε $|g(u) - g(v)| < \varepsilon$.

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta = \delta(\zeta) > 0$ ώστε αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \zeta$. Παρατηρήστε ότι το δ εξαρτάται μόνο από το ε, αφού το ζ εξαρτάται μόνο από το ε.

Θεωρήστε $x, y \in [a,b]$ με $|x-y| < \delta$. Τότε, τα $u = f(x)$ και $v = f(y)$ ανήκουν στο $[m, M]$ και $|u - v| = |f(x) - f(y)| < \zeta$. Άρα,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y)| = |g(u) - g(v)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι η $g \circ f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

6. (α) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x-y| < \delta_1$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ομοίως, αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I, υπάρχει $\delta_2 > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x-y| < \delta_2$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x-y| < \delta$, έχουμε

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |(f(x)-f(y)) + (g(x)-g(y))| \\ &\leq |f(x)-f(y)| + |g(x)-g(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η $f+g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) Αν οι f, g είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο I τότε η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I: θεωρήστε τις $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = g(x) = x$. Αυτές είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $[0, +\infty)$, όμως η $(f \cdot g)(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Αν όμως οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις $f, g : I \to \mathbb{R}$ υποτεθούν και φραγμένες, τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I. Υπάρχουν $M, N > 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq N$ για κάθε $x \in I$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια των f και g μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in I$ και $|x-y| < \delta$ τότε

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{M+N} \quad \text{και} \quad |g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{M+N}.$$

Τότε, αν $x, y \in I$ και $|x-y| < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)| \cdot |g(x)-g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x)-f(y)| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{M+N} + N \cdot \frac{\varepsilon}{M+N} = \varepsilon. \end{aligned}$$

7. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση, υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geq M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon/3$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$. Άρα, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με $\delta < M$, ώστε αν $x, y \in [-M, M]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/3$.

Θα δείξουμε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(i) $x, y \in (-\infty, M]$: τότε, $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(ii) $x, y \in [M, +\infty)$: τότε, $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iii) $x, y \in [-M, M]$: τότε, από την επιλογή του δ έχουμε $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$.

(iv) $x < M < y$: τότε, $x \in [-M, M]$ (διότι $\delta < M$) και $|x-M| < |x-y| < \delta$, άρα $|f(x)-f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Επίσης, $M, y \geq M$ άρα $|f(M)| < \frac{\varepsilon}{3}$ και $|f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &\leq |f(x)-f(M)| + |f(M)-f(y)| \\ &\leq |f(x)-f(M)| + |f(M)| + |f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(v) $x < -M < y$: όμοια με την προηγούμενη περίπτωση.

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

8. Έστω $\ell := \lim_{x\to+\infty} f(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - \ell$. Τότε, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > a$ ώστε αν $x \geq M$ τότε $|g(x)| < \varepsilon$. Το επιχείρημα της Άσκησης 9 δείχνει ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αφού η σταθερή συνάρτηση $h(x) = \ell$ είναι επίσης ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, έπεται ότι η $f = g+h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$.

9. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, για $\varepsilon = 1$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < 1$.

Έστω $x > 0$. Θεωρούμε τον ελάχιστο φυσικό $n = n_x$ για τον οποίο $n_x \frac{\delta}{2} > x$ (αυτός υπάρχει, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα και από την αρχή του ελαχίστου). Τότε,

$$(*) \qquad (n_x - 1)\frac{\delta}{2} \leq x < n_x \frac{\delta}{2}.$$

Θεωρούμε τα σημεία: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\delta}{2}, \ldots, x_n = n\frac{\delta}{2}$. Έχουμε $|x_{k+1} - x_k| < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ και $|x - x_n| < \delta$. Άρα,

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(x_n)| + \cdots + |f(x_1) - f(x_0)| < n + 1 = n_x + 1 < \frac{2}{\delta}x + 2$$

από την $(*)$. Δηλαδή, για κάθε $x > 0$.

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta}x + 2 + |f(0)|.$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για $x < 0$ δείξτε ότι

$$|f(x)| \leq \frac{2}{\delta}|x| + 2 + |f(0)|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, το ζητούμενο ισχύει με $A = \frac{2}{\delta}$ και $B = |f(0)| + 2$.

10. Έστω $n > 1$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής. Από την Άσκηση 11 υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $x^n \leq Ax + B$ για κάθε $x > 0$. Τότε,

$$x^{n-1} \leq A + \frac{B}{x}$$

για κάθε $x > 0$. Αφού $n > 1$, έχουμε $\lim_{x\to+\infty} x^{n-1} = +\infty$. Όμως, $\lim_{x\to+\infty} \left(A + \frac{B}{x}\right) = A$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο.

11. (α) Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, a]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, a]$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$ χρησιμοποιώντας την τεχνική της Άσκησης 7(διακρίνοντας περιπτώσεις).

(β) Η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αν $x,y\in[1,+\infty)$, τότε

$$|f(x)-f(y)|=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|=\frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\leq\frac{1}{2}|x-y|,$$

δηλαδή η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz στο $[1,+\infty)$. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[1,+\infty)$. Τώρα, μπορείτε να εφαρμόσετε το (α).

12. Είδαμε (στη θεωρία) ότι αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\ell\quad\text{και}\quad\lim_{x\to b^-}f(x)=m$$

και είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν επεκτείνουμε την f στο $[a,b]$ ορίζοντας $\hat{f}(a)=\ell$, $\hat{f}(b)=m$ και $\hat{f}(x)=f(x)$ για $x\in(a,b)$, τότε η $\hat{f}:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a,b]$.

13. Όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους.

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 3.

(β) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής: είναι Lipschitz συνεχής, αφού

$$|f'(x)|=\frac{1}{x^2}\leq\frac{1}{4}$$

στο $[2,+\infty)$.

(γ) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$. Η f ορίζεται στο ημιανοικτό διάστημα $(0,\pi]$ και

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x=1\cdot 0=0.$$

Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(δ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$. Αφού $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2+4}=0$, η f ικανοποιεί την υπόθεση της Άσκησης 7. Συνεπώς, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ε) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$. Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$, από την Άσκηση 10. Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty,0]$, πάλι από την Άσκηση 8. Έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (χρησιμοποιήστε την τεχνική της Άσκησης 11(α)).

(στ) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ζ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin x$. Η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρατηρούμε ότι η $f'(x)=x\cos x+\sin x$ δεν είναι φραγμένη και ότι παίρνει μεγάλες τιμές στα σημεία της μορφής $2n\pi$ όπου n μεγάλος φυσικός. Ορίζουμε $x_n=2n\pi$ και $y_n=2n\pi+\frac{1}{n}$. Τότε, $y_n-x_n=\frac{1}{n}\to 0$, αλλά

$$f(y_n)-f(x_n)=\big(2n\pi+(1/n)\big)\sin(1/n)=2\pi\frac{\sin(1/n)}{1/n}+\frac{\sin(1/n)}{n}\to 2\pi\cdot 1+0=2\pi\neq 0$$

όταν $n \to \infty$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(η) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$, από την Άσκηση 8.

Γ. Ασκήσεις*

1. Η συνάρτηση $f : (0,1) \cup (1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \in (0,1)$ και $f(x) = 1$ αν $x \in (1,2)$ είναι συνεχής: έστω $x_0 \in (0,1)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \delta(x_0) > 0$ (δεν εξαρτάται από το $\varepsilon > 0$) ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0,1)$. Αν $x \in (0,1)\cup(1,2)$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $x \in (0,1)$. Άρα, $|f(x) - f(x_0)| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$. Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0.

Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (1,2)$. Άρα, η f είναι συνεχής στο $(0,1) \cup (1,2)$.

Όμως, η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θεωρήστε τις ακολουθίες $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ και $y_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Έχουμε $x_n \in (0,1)$, $y_n \in (1,2)$ και $y_n - x_n = \frac{2}{n+1} \to 0$. Όμως, $f(y_n) - f(x_n) = 1 - 0 = 1 \not\to 0$. Από τον χαρακτηρισμό της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών έπεται το συμπέρασμα.

2. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [a,b]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό n ώστε $\frac{b-a}{n} < \delta$ και χωρίζουμε το $[a,b]$ στα διαδοχικά υποδιαστήματα

$$[x_k, x_{k+1}] = \left[a + k\frac{(b-a)}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Αν τα x, y ανήκουν στο ίδιο υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, τότε $|x - y| \leq x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \delta$. Άρα, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

3. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Αφού η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και αύξουσα συνάρτηση, υπάρχουν τα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell = \sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = m = \inf\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, η Άσκηση 8 δείχνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(-\infty, 0]$. Τέλος, μπορείτε να δείξετε την ομοιόμορφη συνέχεια στο $\mathbb{R}$ με την τεχνική της Άσκησης 11(α) (διακρίνοντας περιπτώσεις).

4. Η f είναι συνεχής στο $[0,2T]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,2T]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < T$ ώστε αν $x, y \in [0,2T]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Δείξτε ότι αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$: μπορείτε να υποθέσετε ότι $x < y$. Υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $mT \leq x \leq (m+1)T$. Τότε,

$y < x+\delta < (m+1)T+T = mT+2T$. Παρατηρήστε ότι $x-mT, y-mT \in [0,2T]$ και ότι
$$|f(x)-f(y)| = |f(x-mT)-f(y-mT)|$$
από την περιοδικότητα της f.

5. Υπάρχει κλειστό διάστημα $[a,b]$ ώστε $X \subseteq [a,b]$. Για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in X$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x)-f(y)| < 1$. Επιλέγουμε διαμέριση
$$P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$
του $[a,b]$ ώστε $t_{k+1} - t_k < \delta$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Θέτουμε
$$X_k = [t_k, t_{k+1}] \cap X \quad \text{για κάθε} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$
Αν ορίσουμε $F = \{k : X_k \neq \emptyset\}$, έχουμε
$$X = \bigcup_{k \in F} X_k.$$
Για κάθε $k \in F$ επιλέγουμε τυχόν $x_k \in X_k$ και θέτουμε
$$\alpha = \max\{|f(x_k)| : k \in F\}.$$
Παρατηρήστε ότι αν $x \in X$ τότε υπάρχει $k \in F$ ώστε $x \in X_k$. Τότε, $|x - x_k| \leq t_{k+1} - t_k < \delta$, άρα
$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| < 1 + \alpha.$$
Δηλαδή, $|f(x)| \leq M := 1 + \alpha$ για κάθε $x \in X$.

6. (α) Έστω $x, y \in \mathbb{R}$. Για κάθε $a \in A$ έχουμε $f(x) \leq |x-a|$ και $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$ από την τριγωνική ανισότητα. Άρα,
$$f(x) \leq |x-y| + |y-a|.$$
Αφού
$$f(x) - |x-y| \leq |y-a| \quad \text{για κάθε} \quad a \in A,$$
συμπεραίνουμε ότι
$$f(x) - |x-y| \leq \inf\{|y-a| : a \in A\} = f(y).$$
Δηλαδή,
$$f(x) - f(y) \leq |x-y|.$$
Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $f(y) - f(x) \leq |y-x| = |x-y|$. Έπεται ότι $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$.

(β) Από το (α) η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

8.4 Ολοκλήρωμα Riemann

Α. Ερωτήσεις κατανόησης

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

1. *Σωστό.* Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann: εξετάζουμε αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη μόνο αν η f είναι φραγμένη.

2. *Λάθος.* Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = 1-x$ αν $0 < x \leq 1$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή, είναι όμως ολοκληρώσιμη: για κάθε $0 < b < 1$, η f είναι συνεχής στο $[b,1]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Από την «βασική άσκηση» 1, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

3. *Λάθος.* Η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ είναι φραγμένη, αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη: για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$ έχουμε $U(f,P) = 1$ και $L(f,P) = -1$, άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -1 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx.$$

4. *Λάθος.* Για τη συνάρτηση f του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε $|f(x)| = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Άρα, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

5. *Λάθος.* Η $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in [0,1]$ και $f(x) = -1$ αν $x \in (1,2]$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ (εξηγήστε γιατί). Όμως, δεν υπάρχει $c \in [0,2]$ ώστε $2f(c) = \int_0^2 f(x)\,dx$. Θα είχαμε $f(c) = 0$, ενώ η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[0,2]$.

6. *Σωστό.* Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν $y, z \in [a,b]$ ώστε $f(y) < f(z)$. Θεωρήστε τη διαμέριση $Q = \{a,b\}$ του $[a,b]$ (που περιέχει μόνο τα άκρα a και b του διαστήματος $[a,b]$). Τότε,

$$U(f,Q) - L(f,Q) = (M_0 - m_0)(b-a)$$

όπου

$$m_0 = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq f(y) < f(z) \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M_0.$$

Άρα, $M_0 - m_0 > 0$ οπότε $U(f,Q) - L(f,Q) > 0$. Αυτό είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

Άρα, η f είναι σταθερή: υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, και το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ ισούται με $c(b-a)$.

7. *Σωστό.* Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leq 0 \leq M_k$. Έπεται ότι

$$L(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq 0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f, P).$$

Άρα, $\sup_P L(f, P) \leq 0$ και $\inf_P U(f, P) \geq 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f, P) \leq 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(f, P) \geq 0.$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

8. *Σωστό.* Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$ ώστε $U(f, P) = L(f, P)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f, P) - L(f, P) = 0,$$

και, αφού $m_k \leq M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_0, x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_0) = f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \cdots = m_k = M_k = \cdots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

Έπεται ότι $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή.

Β. Βασικές ασκήσεις

1. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2Ab < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b, 1]$ με την ιδιότητα

$$U(f, Q) - L(f, Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P) - L(f,P) = b(M_0 - m_0) + U(f,Q) - L(f,Q) < b(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \leq A \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{f(x) : 0 \leq x \leq b\} \geq -A.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0 - m_0 \leq 2A$, άρα

$$U(f,P) - L(f,P) < 2Ab + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

2. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και, για κάθε $0 < b < 1$, η $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[b,1]$, άρα ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Από την Άσκηση 1, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]$. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

3. Ακριβώς όπως στην προηγούμενη Άσκηση, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x_0]$ και στο $[x_0,b]$.

Σημείωση. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι αν μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

4. (α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$. Δείξτε ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{f(1) - f(0)}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0,\pi/2]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\pi/(2n)$. Δείξτε ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{\pi(f(\pi/2) - f(0))}{2n} = \frac{\pi}{2n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi/2]$.

5. (α) $f(x) = x + [x]$. Η f είναι αύξουσα στο $[0,2]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Μπορείτε να γράψετε

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xdx + \int_0^2 [x]dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 2 και το δεύτερο ίσο με 1 (εξηγήστε γιατί).

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[b, 2]$.

(iii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 2]$ (από την σημείωση μετά την Άσκηση 3).

(iv) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 2]$ (από την Άσκηση 1).

6. Έστω ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) > 0$. Λόγω συνέχειας, η f παίρνει θετικές τιμές σε μια (αρκετά μικρή) περιοχή του x_0, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a < x_0 < b$ (ότι $x_0 \neq a$ και $x_0 \neq b$).

Επιλέγουμε $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας: μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ (και αν χρειάζεται να το μικρύνουμε) ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και, για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a, b]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \\ &\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + 0 \geq 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0.\end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει προφανώς.

7. Θεωρώντας την $h = f - g$ βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το εξής: αν $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\int_a^b h(x)dx = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $h(x_0) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, είτε $h(x) > 0$ παντού στο $[a, b]$ ή $h(x) < 0$ παντού στο $[a, b]$ (αν η h έπαιρνε και αρνητικές και θετικές τιμές στο $[a, b]$ τότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπήρχε σημείο στο οποίο θα μηδενιζόταν).

Έστω λοιπόν ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Η h παίρνει ελάχιστη θετική τιμή στο $[a, b]$: υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $h(x) \geq h(y) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε,

$$\int_a^b h(x)dx \geq h(y)(b - a) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

8. Από την υπόθεση, για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Η f είναι συνεχής, μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την υπόθεση για την

$g = f$. Τότε, $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Η f^2 είναι συνεχής και μη αρνητική. Από την Άσκηση 6 συμπεραίνουμε ότι $f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

9. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) > 0$. Όπως στην Άσκηση 6, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Ορίζουμε μια συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως εξής: θέτουμε $g(x) = 0$ στα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$, ορίζουμε $g(x_0) = f(x_0)$, και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[x_0 - \delta, x_0]$ και $[x_0, x_0 + \delta]$. Αφού $g(a) = g(b) = 0$, από την υπόθεση πρέπει να ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Όμως,

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)dx$$

και η fg είναι μη αρνητική στο $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Από την Άσκηση 6, έχουμε $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ειδικότερα, $0 = f(x_0)g(x_0) = f^2(x_0)$, το οποίο είναι άτοπο.

10. Θεωρήστε τη συνάρτηση $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$P(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx.$$

Η P ορίζεται καλά: αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, η $tf + g$ (άρα και η $(tf + g)^2$) είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η P είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$P(t) = t^2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) + 2t \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Αφού $P(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα είναι μη αρνητική:

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leq 0.$$

11. Εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για την f και τη σταθερή συνάρτηση $g \equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f(x) \cdot 1\, dx \right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right) \left(\int_0^1 1^2 dx \right) = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ που έχει μήκος μικρότερο ή ίσο του 1 (αν όμως πάρετε σαν $[a,b]$ το $[0,2]$ και σαν f τη σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$, τότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή $4 \leq 2$, άτοπο).

12. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο 0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $0 \leq t < \delta$ τότε $|f(t) - f(0)| < \varepsilon$. Έστω $x \in (0, \delta)$. Τότε,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - f(0) \right| &= \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(0)dt \right| \\ &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - f(0))dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - f(0)|\, dt \\ &\leq \frac{1}{x} \int_0^x \varepsilon\, dt = \frac{\varepsilon x}{x} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = f(0).$$

13. Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $P^{(n)} = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\right\}$ και την επιλογή σημείων $\Xi^{(n)} = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$. Αφού το πλάτος της διαμέρισης $P^{(n)}$ είναι $\|P^{(n)}\| = \frac{1}{n} \to 0$, από τον ορισμό του Riemann έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum \left(f, P^{(n)}, \Xi^{(n)}\right) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

14. Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της προηγούμενης Άσκησης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0, 1]$, παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

15. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(y)| \leq M$ για κάθε $y \in [0, 1]$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $0 \leq y \leq \delta$ τότε

$$|f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M + 1}\right)^n < \delta.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ μπορούμε να γράψουμε (παρατηρήστε ότι αν $0 < x < 1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$)

$$\begin{aligned} |a_n - f(0)| &= \left| \int_0^{1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}} (f(x^n) - f(0))dx + \int_{1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (f(x^n) - f(0))dx \right| \\ &\leq \int_0^{1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}} |f(x^n) - f(0)|\, dx + \int_{1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (|f(x^n)| + |f(0)|)\, dx \\ &\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4M + 1}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M + 1} \cdot 2M \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, $a_n \to f(0)$.

16. Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0,$$

δηλαδή η (γ_n) είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

άρα

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η (γ_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, συγκλίνει.

17. Παρατηρήστε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| dx.$$

Στο διάστημα $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ έχουμε

$$|f(x) - f(k/n)| \leq M \left(\frac{k}{n} - x\right),$$

άρα

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| \leq M \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = M \int_0^{1/n} y\, dy = \frac{M}{2n^2}.$$

Άρα,

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

Γ. Ασκήσεις*

1. Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ ορίζει με φυσιολογικό τρόπο μια διαμέριση του $[f(a), f(b)]$: την

$$Q = \{f(a) = f(x_0) < f(x_1) < \cdots < f(x_k) < f(x_{k+1}) < \cdots < f(x_n) = f(b)\}.$$

Η f είναι αύξουσα, άρα

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Η f^{-1} είναι επίσης αύξουσα, άρα

$$U(f^{-1},Q) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{-1}(f(x_{k+1}))(f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}(f(x_{k+1}) - f(x_k)).$$

Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$(*) \qquad L(f,P) + U(f^{-1},Q) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}f(x_{k+1}) - x_k f(x_k)) = bf(b) - af(a).$$

Οι f και f^{-1} είναι συνεχείς, άρα ολοκληρώσιμες. Από την $(*)$ παίρνουμε

$$bf(b) - af(a) = L(f,P) + U(f^{-1},Q) \geq L(f,P) + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx$$

και, αφού η P ήταν τυχούσα, παίρνοντας supremum ως προς P έχουμε

$$bf(b) - af(a) \geq \int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx.$$

Με ανάλογο τρόπο δείξτε ότι για τις διαμερίσεις P και Q ισχύει

$$(**) \qquad U(f,P) + L(f^{-1},Q) = bf(b) - af(a).$$

Τότε,

$$U(f,P) + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx \geq U(f,P) + L(f^{-1},Q) = bf(b) - af(a),$$

και παίρνοντας infimum ως προς P έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx \geq bf(b) - af(a).$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a).$$

2. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(a) \geq b$. Αν $b = f(y)$ τότε $y \leq a$ (διότι η f είναι αύξουσα) και από την προηγούμενη Άσκηση (θα χρειαστείτε την υπόθεση ότι $f(0) = 0$) έχουμε

$$yb = yf(y) = \int_0^y f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx.$$

Για να δείξουμε ότι

$$ab \leq \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(x)dx$$

αρκεί να ελέγξουμε (εξηγήστε γιατί) ότι

$$b(a-y) \leq \int_y^a f(x)dx.$$

Όμως, η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[y,a]$, άρα

$$\int_y^a f(x)dx \geq f(y)(a-y) = b(a-y)$$

με ισότητα μόνο αν $a = y$, δηλαδή αν $f(a) = b$.

Εξετάστε την περίπτωση $f(a) \leq b$ με τον ίδιο τρόπο.

3. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(t)| \leq A$ για κάθε $t \in [a,b]$. Αυτό δείχνει ότι

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt \leq M \int_a^x A\,dt = MA(x-a)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Εισάγοντας αυτή την εκτίμηση πάλι στην υπόθεση, παίρνουμε

$$|f(x)| \leq M \int_a^x |f(t)|dt \leq M^2 A \int_a^x (t-a)\,dt = \frac{M^2 A}{2}(x-a)^2$$

για κάθε $x \in [a,b]$, και επαγωγικά,

$$|f(x)| \leq \frac{M^n A}{n!}(x-a)^n$$

για κάθε $x \in [a,b]$ και *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^n A}{n!}(x-a)^n = 0,$$

άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

4. Έστω ότι υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

Τότε,

$$\int_0^1 (x-a)^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 f(x)dx - 2a \int_0^1 xf(x)dx + a^2 \int_0^1 f(x)dx = a^2 - 2a \cdot a + a^2 \cdot 1 = 0.$$

Αφού η $(x-a)^2 f(x)$ είναι μη αρνητική και συνεχής, η Άσκηση 6 δείχνει ότι $(x-a)^2 f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως η f είναι παντού θετική, άρα $x = a$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αυτό είναι άτοπο.

5. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leq \left(\int_a^b M^n dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n}$$

και $M(b-a)^{1/n} \to M$ όταν $n \to \infty$, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\gamma_n < M + \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = M$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a,b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$. Επίσης, αφού $\delta^{1/n} \to 1$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_2$,

$$\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq \left(\int_J [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{1/n} > M - \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|\gamma_n - M| = \left|\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} - M\right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\gamma_n \to M$.

6. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1) - L(f,P_1) < b - a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < b - a = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k),$$

υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ώστε $M_k - m_k < 1$. Αν θέσουμε $a_1 = x_k$ και $b_1 = x_{k+1}$, βλέπουμε ότι $a_1 < b_1$, $a_1, b_1 \in [a,b]$, $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} = M_k - m_k < 1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a_1, b_1]$ με $a_1 < c < d < b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c,d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c,d]$ με $U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ ώστε $b_n - a_n < 1/n$ και

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $x_0 \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, έχουμε $x_0 \in (a_n, b_n)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a_n, b_n)$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a, b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c, d] \subset [a, b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c, d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a, b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a, b]$.

7. Από την προηγούμενη Άσκηση, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0) > 0$, υπάρχει διάστημα $J \subseteq [a, b]$ με μήκος $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in J$ ισχύει $f(x) > f(x_0)/2$. Συνεχίστε όπως στην Άσκηση 6.

8.5 Παράγωγος και Ολοκλήρωμα

Α. Βασικές Ασκήσεις

1. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^s f(t)dt - \int_s^b f(t)dt = \int_a^s f(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^s f(t)dt\right) \\ &= 2\int_a^s f(t)dt - \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η g είναι συνεχής. Παρατηρήστε ότι

$$g(a) = -\int_a^b f(t)dt \qquad \text{και} \qquad g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Αφού $g(a)g(b) = -\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq 0$, υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε $g(s) = 0$. Για κάθε τέτοιο s ισχύει η

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b) αν $\int_a^b f(t)dt \neq 0$ (εξηγήστε γιατί). Αν όμως πάρετε την $f(x) = x$ στο $[-1,1]$, τότε τα μόνα σημεία $s \in [-1,1]$ για τα οποία $g(s) = 0$ είναι τα $s = \pm 1$ (σε αυτό το παράδειγμα, το ολοκλήρωμα της f στο $[-1,1]$ ισούται με μηδέν).

2. Θεωρήστε τη συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(t) = \int_0^t f(x)dx$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και θετική, η F είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $\int_0^1 f(x)dx = 1$, έχουμε $F(0) = 0$ και $F(1) = 1$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, για κάθε $k = 1, \dots, n-1$ υπάρχει $t_k \in [0,1]$ ώστε $F(t_k) = \frac{k}{n}$. Θέτουμε $t_0 = 0$ και $t_n = 1$: τότε $F(t_0) = 0 = \frac{0}{n}$ και $F(t_n) = 1 = \frac{n}{n}$. Παρατηρήστε ότι $t_k < t_{k+1}$ για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$. Αν για κάποιο k είχαμε $t_k \geq t_{k+1}$, τότε θα παίρναμε

$$\frac{k}{n} = \int_0^{t_k} f(x)dx = \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx + \int_{t_{k+1}}^{t_k} f(x)dx \geq \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{k+1}{n},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ και

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx - \int_0^{t_k} f(x)dx = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$.

3. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η μη αρνητική συνάρτηση $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $s \in [0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(s)\int_0^1 g(x)dx.$$

Εφαρμόστε το παραπάνω για την $g(x) = x^2$.

4. Από την υπόθεση έπεται ότι

$$2\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δηλαδή, η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ είναι σταθερή. Αφού η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αφού η F είναι σταθερή, έχουμε $F' \equiv 0$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

5. Αφού η h είναι συνεχής, η συνάρτηση $G(y) = \int_0^y h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και $G'(y) = h(y)$. Παρατηρήστε ότι $F(x) = G(f(x)) = (G \circ f)(x)$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x).$$

6. Γράφουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt = \int_0^{x+\delta} f(t)dt - \int_0^{x-\delta} f(t)dt = H_1(x) - H_2(x),$$

όπου

$$H_1(x) = \int_0^{x+\delta} f(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_2(x) = \int_0^{x-\delta} f(t)dt.$$

Το επιχείρημα της προηγούμενης Άσκησης δείχνει ότι οι H_1, H_2 είναι παραγωγίσιμες, $H_1'(x) = f(x+\delta)$ και $H_2'(x) = f(x-\delta)$ (αν $0 > x+\delta$ ή $0 > x-\delta$, το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει: θυμηθείτε τη σύμβαση $\int_b^a f = -\int_a^b f$). Έπεται ότι $g'(x) = f(x+\delta) - f(x-\delta)$.

7. Γράφουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt = \int_0^{g(x)} t^2 dt - \int_0^{h(x)} t^2 dt.$$

Αφού οι g, h είναι παραγωγίσιμες και η $f(t) = t^2$ είναι συνεχής, η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (δείτε τις προηγούμενες δύο Ασκήσεις) και $G'(x) = g^2(x)g'(x) - h^2(x)h'(x)$.

8. Θέτουμε $u = \frac{x}{t}$. Τότε, $dt = -\frac{x}{u^2}du$ και

$$F(x) = \int_x^1 -x\frac{\varphi(u)}{u^2}\, du = \int_1^x x\frac{\varphi(u)}{u^2}\, du = x\int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\, du.$$

Άρα,

$$F'(x) = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\, du + x\frac{\varphi(x)}{x^2} = \int_1^x \frac{\varphi(u)}{u^2}\, du + \frac{\varphi(x)}{x}.$$

9. Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$F(x) = \int_0^x f(u)(x-u)du = x\int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)u\, du$$

και

$$G(x) = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du = \int_0^x R(u)du,$$

όπου

$$R(u) = \int_0^u f(t)dt.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,a]$, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι οι F, G και R είναι παραγωγίσιμες. Επίσης,

$$F'(x) = \int_0^x f(u)du + xf(x) - f(x)x = \int_0^x f(u)du$$

και

$$G'(x) = R(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x f(u)du.$$

Άρα,

$$(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = \int_0^x f(u)du - \int_0^x f(u)du = 0.$$

Έπεται ότι η $G-F$ είναι σταθερή στο $[0,a]$. Παρατηρώντας ότι $F(0)=G(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι $G \equiv F$ στο $[0,a]$. Δηλαδή,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right) du$$

για κάθε $x \in [0,a]$.

10. Για κάθε $k=0,\ldots,n-1$, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\,dx\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\,dx.$$

Άρα,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx.$$

11. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $L, R : [0,+\infty) \to [0,\infty)$ με

$$L(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt \quad \text{και} \quad R(x) = xf(x).$$

Οι L, R είναι παραγωγίσιμες (εξηγήστε γιατί) και $L(0)=0=R(0)$. Παρατηρήστε ότι

$$L'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = f(x) + xf'(x) = R'(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $L(x) = R(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

Β. Ασκήσεις

1. Η f' είναι συνεχής, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Χρησιμοποιώντας την $f(0)=0$, το δεύτερο θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $x \in [0,1]$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |f(x) - f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)| \cdot 1\,dt \\
&\leq \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} = \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \sqrt{x} \\
&\leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

2. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της

$$(*)\qquad f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

παίρνουμε

$$2f(x)f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x > 0$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$. Από την $(*)$ βλέπουμε (θέτοντας $x = 0$) ότι $f(0) = 0$, άρα

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x dt = x$$

για κάθε $x \geq 0$. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Από την $(*)$ και την $f(x) \neq 0$ έχουμε: για κάθε $x > 0$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt > 0$ και

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} \quad ή \quad f(x) = h(x) := -\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0, +\infty)$, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δείχνει ότι είτε $f \equiv g$ στο $[0, +\infty)$ ή $f \equiv h$ στο $[0, +\infty)$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, αφού η h παίρνει αρνητικές τιμές στο $(0, +\infty)$ και $\int_0^x f(t)dt > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα,

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

για κάθε $x \geq 0$. Αφού η f είναι συνεχής, έπεται ότι η g (δηλαδή, η f) είναι παραγωγίσιμη.

3. Θεωρήστε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f στο $[a, b]$. Τότε, το ζητούμενο παίρνει την εξής μορφή: υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$(1)\qquad \int_a^b F'(x)g(x)dx = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)).$$

Η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στο αριστερό μέλος. Έχουμε

$$(2)\qquad \int_a^b F'(x)g(x)dx = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx,$$

αφού $F(a) = 0$. Εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού: η g είναι μονότονη, άρα η g' διατηρεί πρόσημο στο $[a, b]$. Η F είναι συνεχής και η g' ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε

$$(3)\qquad \int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b) - g(a)).$$

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε

$$\int_a^b F'(x)g(x) = F(b)g(b) - F(\xi)(g(b)-g(a)) = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b)-F(\xi)),$$

δηλαδή την (1).

4. Αφού η f' είναι συνεχής, μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)' dx\\ &= \frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

Η f' είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $|f'(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Έπεται ότι

$$\left|\frac{f(b)\sin(nb)-f(a)\sin(na)}{n}\right| \leq \frac{|f(a)|+|f(b)|}{n} \to 0$$

και

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|dx \leq \frac{M(b-a)}{n} \to 0$$

καθώς το $n\to\infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0, \quad \text{και όμοια,} \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

5. Γράφουμε

$$a_n = \int_0^\pi \sin(nx)dx = \int_0^\pi \left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)' dx = \frac{\cos 0 - \cos(n\pi)}{n}.$$

Άρα, $|a_n|\leq 2/n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $a_n\to 0$ καθώς το $n\to\infty$. Για την (b_n) κάνουμε την αντικατάσταση $y=nx$:

$$b_n = \int_0^\pi |\sin(nx)|\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy = \int_0^\pi |\sin y|\,dy$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ (κάντε την αντικατάσταση $y=k\pi+u$). Άρα,

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi|\sin y|\,dy = \int_0^\pi|\sin y|\,dy\\ &= \int_0^\pi \sin y\,dy = \cos(0)-\cos(\pi) = 2\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $b_n \to 2$.

6. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $g, h : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $\max\{g, h\}$ και $\min\{g, h\}$ είναι συνεχείς. Αυτό έπεται από τις

$$\max\{g, h\} = \frac{g + h + |g - h|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{g, h\} = \frac{g + h - |g - h|}{2}.$$

Η $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα οι συναρτήσεις

$$g := \max\{f', 0\} \qquad \text{και} \qquad h := -\min\{f', 0\}$$

είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[0, +\infty)$. Επίσης,

$$g - h = \max\{f', 0\} + \min\{f', 0\} = f'.$$

Ορίζουμε

$$G_1(x) = \int_0^x g(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_1(x) = \int_0^x h(t)dt.$$

Αφού οι g, h είναι συνεχείς και μη αρνητικές, οι G_1, H_1 είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες και $G_1(0) = H_1(0) = 0$. Από τον τρόπο ορισμού τους και από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού βλέπουμε ότι

$$G_1(x) - H_1(x) = \int_0^x (g(t) - h(t))\, dt = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε

$$G(x) = 1 + |f(0)| + G_1(x) \qquad \text{και} \qquad H(x) = 1 + |f(0)| - f(0) + H_1(x).$$

Τότε, οι G, H είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες, θετικές και

$$G(x) - H(x) = G_1(x) - H_1(x) + f(0) = f(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Δηλαδή, η f γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών, αυξουσών και θετικών συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$.

8.6 Βασικές πραγματικές συναρτήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις

1. Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int \cos^n x\, dx &= \int \cos^{n-1} x (\sin x)' dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x\, dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, (1 - \cos^2 x)\, dx \\
&= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x\, dx - (n-1) \int \cos^n x\, dx.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1}x\,\sin x + (n-1)\int \cos^{n-2}x\,dx,$$

άρα

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{\sin x\,\cos^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx.$$

2. Θέτουμε $I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$, $n = 0,1,2,\ldots$. Παρατηρήστε ότι $I_0 = \frac{\pi}{2}$ και $I_1 = 1$. Από την προηγούμενη Άσκηση,

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx = \left[\frac{\sin x\,\cos^{n-1}x}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{n-2}x\,dx = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

για κάθε $n \geq 2$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^{2k}x\,dx = I_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)}I_{2k-4}\\ &= \cdots\\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}I_0\\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^{2k+1}x\,dx = I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1}I_{2k-1} = \frac{(2k)(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)}I_{2k-3}\\ &= \cdots\\ &= \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3}I_1\\ &= \frac{(2k)(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3}.\end{aligned}$$

Δείξτε τις παραπάνω σχέσεις με επαγωγή.

3. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ στο $[0,\pi/2]$. Παρατηρήστε ότι $g(0) = g(\pi/2) = 0$. Επίσης,

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

και

$$g''(x) = -\sin x < 0 \quad \text{στο} \quad (0,\pi/2).$$

Άρα, η g είναι κοίλη. Έπεται ότι: για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$g(x) \geq \frac{2x}{\pi}g(\pi/2) + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)g(0) = 0.$$

Δηλαδή,

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}.$$

4. Η προηγούμενη Άσκηση δείχνει ότι $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$ για κάθε $t \in [0, \pi/2]$. Αφού $\lambda > 0$ και η $x \mapsto e^x$ είναι γνησίως αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι

$$e^{-\lambda \sin t} \leq e^{-2\lambda t/\pi}$$

και η ανισότητα είναι γνήσια αν $t \in (0, \pi/2)$. Συνεπώς,

$$\int_0^{\pi/2} e^{-\lambda \sin t} dt < \int_0^{\pi/2} e^{-2\lambda t/\pi} dt = -\frac{\pi}{2\lambda} e^{-\frac{2\lambda t}{\pi}} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2\lambda}(1 - e^{-\lambda}).$$

5. (α) Αν $x = 1$, τότε η

$$(*) \qquad 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$$

ισχύει ως ισότητα.

(β) Αν $x > 1$, τότε

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \leq \int_1^x 1\, dt = x - 1$$

και

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \geq \int_1^x \frac{1}{x}\, dt = \frac{1}{x}(x - 1) = 1 - \frac{1}{x}.$$

Δηλαδή, ισχύει η $(*)$.

(γ) Αν $0 < x < 1$, εφαρμόζοντας το (β) για τον $\frac{1}{x} > 1$, παίρνουμε

$$1 - x = 1 - \frac{1}{1/x} \leq \log \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1.$$

Αφού $\log \frac{1}{x} = -\log x$, προκύπτει πάλι η $(*)$.

6. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x - 1 - x$. Η παράγωγος $g'(x) = e^x - 1$ της g είναι αρνητική στο $(-\infty, 0)$ και θετική στο $(0, +\infty)$. Άρα, η g έχει ολικό ελάχιστο στο 0. Δηλαδή, $g(x) \geq g(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $x > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα της Άσκησης 5 για τον θετικό αριθμό $\sqrt[n]{x}$, παίρνουμε

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \log(\sqrt[n]{x}) \leq \sqrt[n]{x} - 1,$$

δηλαδή

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{n} \log x \leq \sqrt[n]{x} - 1.$$

Έπεται ότι

$$\log x \leq n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leq \sqrt[n]{x} \log x.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \log x.$$

8. Εφαρμόζοντας την ανισότητα της Άσκησης 5 για τον θετικό αριθμό $1 + \frac{x}{n}$ παίρνουμε

$$\frac{x/n}{1+(x/n)} \leq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x}{n}.$$

Άρα,

$$\frac{x}{1+\frac{x}{n}} \leq n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leq x.$$

Το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = x.$$

9. Από την προηγούμενη Άσκηση έχουμε

$$\log\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \to x$$

όταν το $n \to \infty$. Η $y \mapsto e^y$ είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{\log\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \to e^x$$

όταν το $n \to \infty$.

10. Η παράγωγος της f είναι η

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}.$$

Δηλαδή, $f'(x) > 0$ αν $\log x < 1$ και $f'(x) < 0$ αν $\log x > 1$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$. Αφού $\pi > 3 > e$ έχουμε $f(\pi) < f(e)$, δηλαδή

$$\frac{\log \pi}{\pi} < \frac{\log e}{e}.$$

Έπεται ότι

$$\log(\pi^e) = e\log\pi < \pi\log e = \log(e^\pi).$$

Άρα, $\pi^e < e^\pi$.

Β. Ασκήσεις

11. (α) Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$. Τότε,

$$g' = 2ff' + 2f'f'' = 2f'(f+f'') = 0,$$

δηλαδή η g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = [f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \cos x$ ικανοποιεί τις $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ και $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το (α) έπεται ότι $f(x) - \cos x = g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

12. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f_k : I_k \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \tan x - x$. Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{x\to(k\pi-\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = -\infty \;\text{ και }\; \lim_{x\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = +\infty.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορείτε να δείξετε ότι υπάρχει $a_k \in I_k$ ώστε $f_k(a_k) = \tan a_k - a_k = 0$. Η λύση είναι μοναδική γιατί η $f_k(x) = \tan x - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο I_k: παρατηρήστε ότι $f_k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ αν $x \neq k\pi$ και $= 0$ στο σημείο $k\pi$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x > M$ τότε $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon$.

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $k\pi - \frac{\pi}{2} > M$. Τότε, αν θεωρήσουμε τη λύση a_k της εξίσωσης $\tan x = x$ στο I_k, έχουμε $a_k > M$ και $\arctan a_k = a_k - k\pi$. Άρα,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_k - k\pi) < \varepsilon.$$

Όμοια,

$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_{k+1} - (k+1)\pi) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$|a_{k+1} - a_k - \pi| < \varepsilon.$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k) = \pi$.

13. Στο προηγούμενο Φυλλάδιο είδαμε ότι η ακολουθία $\gamma_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό γ. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty}(\gamma_{2n} - \gamma_n) = 0.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\gamma_{2n} - \gamma_n &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \log(2n) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} - (\log(2n) - \log n) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \log 2 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \log 2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \log 2 \to \log 2$$

όταν το $n \to \infty$.

14. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-cx}$ στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι

$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = e^{-cx}(f'(x) - cf(x)) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = f(x)e^{-cx} = a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

15. Από την υπόθεση προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη: αφού ορίζεται το $\int_0^x f(t)dt$, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα, και αφού

$$(*) \qquad f(x) = \int_0^x f(t)dt,$$

η f είναι συνεχής. Από την $(*)$ και από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από την προηγούμενη Άσκηση, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ae^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως, από την $(*)$ βλέπουμε ότι $f(0) = 0$. Αναγκαστικά, $a = 0$ και $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

16. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)e^{-x}$. Η g είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, a)$, και $g(0) = 1 = g(a)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, a)$ ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(a) - g(0)}{a} = 0.$$

Όμως,

$$g'(\xi) = e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)).$$

Άρα, $f'(\xi) = f(\xi)$.

17. Θεωρήστε τη συνάρτηση $h_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $h_\lambda(x) = e^{\lambda x} f(x)$. Η h_λ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), και $h_\lambda(a) = h_\lambda(b) = 0$. Από το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $h'_\lambda(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, b). Αφού

$$h'_\lambda(x) = e^{\lambda x}(f'(x) + \lambda f(x)) = e^{\lambda x} g_\lambda(x),$$

έπεται ότι η

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b).

18. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$ στο (a, b). Σταθεροποιήστε $c \in (a, b)$. Αφού $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to b^-} e^{-x} = e^{-b} > 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to b^-} g(x) = \lim_{x\to b^-} e^{-x} f(x) = +\infty.$$

Άρα, υπάρχει $d \in (c, b)$ ώστε $g(c) < g(d)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής στο $[c, d]$, υπάρχει $\xi \in (c, d)$ ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(d) - g(c)}{d - c} > 0.$$

Όμως,

$$g'(\xi) = e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)).$$

Άρα, $f'(\xi) > f(\xi)$ (και $\xi \in (a,b)$, αφού $a < c < \xi < d < b$).

19. (α) Αφού η f είναι αύξουσα, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx \\ &\leq f(2)\cdot 1 + f(3)\cdot 1 + \cdots + f(n)\cdot 1 \\ &= f(2) + \cdots + f(n)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)dx &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x)dx \\ &\geq f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + \cdots + f(n-1)\cdot 1 \\ &= f(1) + \cdots + f(n-1).\end{aligned}$$

(β) Εφαρμόζουμε το (α) για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = \log x$. Έχουμε

$$\int_1^n \log x\, dx = (x\log x - x)\Big|_1^n = n\log n - (n-1) = \log\left(\frac{n^n}{e^{n-1}}\right)$$

οπότε

$$\log((n-1)!) = \log 1 + \cdots + \log(n-1) < \log\left(\frac{n^n}{e^{n-1}}\right) < \log 2 + \cdots + \log n = \log(n!).$$

Άρα,

$$\frac{n!}{n} < \frac{n^n}{e^{n-1}} < n!.$$

Έπεται ότι

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} < n! < \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}.$$

(γ) Από το (β) έχουμε

$$\frac{\sqrt[n]{e}}{e} < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{\sqrt[n]{en}}{e}.$$

Αφού $\sqrt[n]{e} \to 1$ και $\sqrt[n]{en} \to 1$ όταν το $n \to \infty$, από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

20. Αν $a = b$ το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a > b$. Γράφουμε

$$\left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2}\right)^n = b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right)^n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\right)^n \to \frac{\sqrt{ab}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Ισοδύναμα, θέτοντας $x = \frac{a}{b}$ και παίρνοντας λογαρίθμους, αρκεί να δείξουμε το εξής: αν $x > 1$ τότε

$$n \log \left(\frac{1 + \sqrt[n]{x}}{2} \right) \to \frac{\log x}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\frac{1+\sqrt[n]{x}}{2} \geq \sqrt[2n]{x}$, άρα

$$n \log \left(\frac{1 + \sqrt[n]{x}}{2} \right) \geq n \log(\sqrt[2n]{x}) = n \cdot \frac{\log x}{2n} = \frac{\log x}{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, από την Άσκηση 5 έχουμε

$$n \log \left(\frac{1 + \sqrt[n]{x}}{2} \right) = n \log \left(1 + \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{2} \right) \leq n \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{2} = \frac{\log x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\log x}{n}} - 1}{\frac{\log x}{n}}.$$

Δηλαδή,

$$(*) \qquad \frac{\log x}{2} \leq n \log \left(\frac{1 + \sqrt[n]{x}}{2} \right) \leq \frac{\log x}{2} \cdot \frac{e^{\frac{\log x}{n}} - 1}{\frac{\log x}{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όμως, $\lim_{h \to 0^+} \frac{e^h - 1}{h} = e^0 = 1$ και $\frac{\log x}{n} \to 0$. Από την αρχή της μεταφοράς,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{\log x}{n}} - 1}{\frac{\log x}{n}} = 1.$$

Τώρα, η $(*)$ και το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνουν ότι

$$\lim_{n \to \infty} n \log \left(\frac{1 + \sqrt[n]{x}}{2} \right) = \frac{\log x}{2}.$$