ΚΛΕΙΣΤΟΤΗΤΑ, ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΣΣΩΡΕΥΣΗΣ, ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΟ

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$\overline{A} = \{x \in X : \textit{Υπάρχει ακολουθία } x_n \in A \textit{ τέτοια ώστε } x_n \to x\}.$$

Το $\overline{A}$ ονομάζεται κλειστότητα του A και τα σημεία του οριακά σημεία του A.

Διαισθητικά, η κλειστότητα ενός συνόλου αποτελείται από όλα τα σημεία που απέχουν «μηδενική απόσταση» από το σύνολο.

Παρατήρηση. Κάθε σημείο x του A είναι προφανώς το όριο της σταθερής ακολουθίας $x_n = x$, άρα κάθε σημείο του A είναι οριακό σημείο του A. Δηλαδή, $A \subset \overline{A}$.

Θεώρημα. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$.*

(1) *Ένα σημείο x ανήκει στο $\overline{A}$ αν και μόνο αν κάθε περιοχή του σημείου τέμνει το A.*
(2) *Το $\overline{A}$ είναι κλειστό.*
(3) *Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.*

Απόδειξη.

(1) Έστω ότι $x \in \overline{A}$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του $\overline{A}$, υπάρχει $x_n \in A$ με $x_n \to x$. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in D(x, \varepsilon)$. Αντίστροφα, αν κάθε περιοχή του x τέμνει το A, τότε για κάθε n μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in A \cap D(x, 1/n)$. Από αυτό συνεπάγεται ότι $d(x_n, x) < 1/n \to 0$, άρα $x_n \to x$, συνεπώς $x \in \overline{A}$.
(2) Αρκεί να δείξουμε ότι αν x_n είναι μια ακολουθία σημείων του $\overline{A}$ με $x_n \to x$, τότε $x \in \overline{A}$. Αφού $x_1 \in \overline{A}$, το x_1 είναι όριο κάποιας ακολουθίας σημείων του A, άρα υπάρχει $y_1 \in A$ τέτοιο ώστε $d(x_1, y_1) < 1$. Ομοίως, αφού το x_2 είναι όριο ακολουθίας σημείων του A, υπάρχει $y_2 \in A$ τέτοιο ώστε $d(x_2, y_2) < 1/2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία $y_n \in A$ τέτοια ώστε $d(x_n, y_n) < 1/n$. Αλλά τότε $d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) < 1/n + d(x_n, x) \to 0$. Δηλαδή $y_n \to x$, άρα $x \in \overline{A}$.
(3) Έστω ότι το A είναι κλειστό και $x \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει $x_n \in A$ με $x_n \to x$. Αφού το A είναι κλειστό έχουμε ότι $x \in A$. Δηλαδή $\overline{A} \subset A$, άρα $A = \overline{A}$, γιατί η σχέση $A \subset \overline{A}$ ισχύει πάντα. Αντίστροφα, αν $A = \overline{A}$, τότε το A είναι κλειστό από το (1).

□

Παρατήρηση. Η κλειστότητα του A είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του A. Πράγματι αν $F \subset X$ κλειστό με $F \supset A$ και $x \in \overline{A}$, τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Αλλά $x_n \in F$ αφού το A είναι υποσύνολο του F. Συνεπώς $x \in F$ διότι το F είναι κλειστό.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική
$$\overline{(0,1)} = \overline{(0,1]} = \overline{[0,1)} = \overline{[0,1]} = [0,1], \quad \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \overline{\{1/n : n \in \mathbb{N}\}} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$
(2) Στο $\mathbb{R}^N$ με τη συνηθισμένη μετρική, $\overline{D(x,r)} = \{y \in \mathbb{R}^N : d_2(x,y) \leq r\}$. Δηλαδή η κλειστότητα του ανοιχτού δίσκου είναι ο κλειστός δίσκος. Αυτό δεν ισχύει γενικά. Για παράδειγμα, σ' ένα διακριτό χώρο με περισσότερα από ένα σημεία, έχουμε
$$\overline{D(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \neq X = \{y \in X : d(x,y) \leq 1\}.$$

Ορισμός. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$A' = \{x \in X : \textit{Για κάθε } \varepsilon > 0 \textit{ σύνολο } D(x,\varepsilon) \cap A \textit{ είναι άπειρο}\}.$$

Το A' ονομάζεται παράγωγο σύνολο του A και τα σημεία του σημεία συσσώρευσης του A.

Παρατήρηση. Κάθε σημείο συσσώρευσης είναι προφανώς οριακό σημείο.

Θεώρημα. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$.*

(1) *Το A' είναι κλειστό.*
(2) $\overline{A} = A \cup A'$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $x_n \in A'$ με $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in D(x, \varepsilon)$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(x_{n_0}, r) \subset D(x, \varepsilon)$. Αλλά το x_{n_0} είναι σημείο συσσώρευσης του A, άρα το $D(x_{n_0}, r) \cap A$ είναι άπειρο, συνεπώς και το $D(x, \varepsilon) \cap A$ είναι άπειρο.

(2) Προφανώς $A \cup A' \subset \overline{A}$. Ας υποθέσουμε ότι $A \cup A' \subsetneq \overline{A}$. Τότε υπάρχει ένα οριακό σημείο x το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης και δεν ανήκει στο A. Άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε το σύνολο $D(x,r) \cap A$ είναι πεπερασμένο. Θέτουμε $\varepsilon = \min\{d(x,y) : y \in D(x,r) \cap A\} > 0$. Τότε $D(x,\varepsilon) \cap A = \emptyset$, άτοπο.

$\square$

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε μετρικό χώρο, ένα πεπερασμένο σύνολο δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
(2) Σ' ένα διακριτό χώρο, κανένα σύνολο δεν έχει σημεία συσσώρευσης.
(3) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$(0,1)' = (0,1]' = [0,1)' = [0,1]' = ((0,1) \cup \{3\})' = [0,1], \quad \mathbb{Z}' = \emptyset, \quad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}, \quad \{1/n : n \in \mathbb{N}\}' = \{0\}.$$

Ορισμός. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$A^\circ = \{x \in A : \textit{Υπάρχει } \varepsilon > 0 \textit{ τέτοιο ώστε } D(x,\varepsilon) \subset A\}.$$

Το A° ονομάζεται εσωτερικό του A και τα σημεία του εσωτερικά σημεία του A.

Παρατηρήσεις.

(1) Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του A.
(2) Ένα σύνολο είναι ανοιχτό αν και μόνο αν είναι ίσο με το εσωτερικό του.

Παραδείγματα. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$(0,1)^\circ = (0,1]^\circ = [0,1)^\circ = [0,1]^\circ = ((0,1) \cup \{3\})^\circ = (0,1), \quad \mathbb{Z}^\circ = \emptyset, \quad \mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \{1/n : n \in \mathbb{N}\}^\circ = \emptyset.$$

Ορισμός. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Θέτουμε*

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Το ∂A ονομάζεται σύνορο του A και τα σημεία του συνοριακά σημεία του A.

Παραδείγματα.

(1) Σ' ένα διακριτό χώρο, το σύνορο οποιουδήποτε συνόλου είναι κενό.
(2) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική

$$\partial(0,1) = \partial(0,1] = \partial[0,1) = \partial[0,1] = \{0,1\}, \quad \partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}, \quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

(3) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική, το συνόρο ενός δίσκου είναι η περιφέρειά του.