ΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΥΚΝΩΣΗΣ

Θεώρημα (Κριτήριο ολοκληρώματος). *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, φθίνουσα, μη αρνητική. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία x_n με $x_n = \int_1^n f(x)dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Αφού η f είναι φθίνουσα έχουμε $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$. Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le \int_k^{k+1} f(k)dx.$$

Άρα

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(x)dx \le f(k).$$

Αθροίζοντας για k από 1 ως n έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \le \int_1^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Ισοδύναμα

$$s_{n+1} - f(1) \le x_{n+1} \le s_n.$$

Από την τελευταία σχέση συνεπάγονται τα εξής:

- Αν η σειρά συγκλίνει τότε η s_n είναι φραγμένη. Άρα και η x_n είναι φραγμένη, επομένως συγκλίνει διότι είναι αύξουσα.
- Αν η x_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη, άρα και η s_n είναι φραγμένη, επομένως η σειρά συγκλίνει.

□

Παράδειγμα. Έχουμε $\int_1^n \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \to +\infty$. Άρα από κριτήριο ολοκληρώματος $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = +\infty$.

Θεώρημα (Κριτήριο συμπύκνωσης του Cauchy). *Έστω a_n μια φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n, t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} = t_n. \end{aligned}$$

Δηλαδή $s_{2^{n+1}-1} \le t_n$ $(*)$. Απ'την άλλη

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}}) \\ &\ge a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^n a_{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}(2a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}(a_1 + t_{n+1}). \end{aligned}$$

Δηλαδή $t_{n+1} \le 2s_{2^{n+1}} - a_1$ $(**)$. Αν η $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει, τότε η t_n είναι φραγμένη, άρα και η $s_{2^{n+1}-1}$ είναι φραγμένη από την $(*)$. Επομένως η s_n είναι φραγμένη, συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η s_n είναι φραγμένη, άρα και η $2s_{2^{n+1}} - a_1$ είναι φραγμένη, επομένως η t_{n+1} είναι φραγμένη από την (∗∗). Συνεπώς η $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα. Έστω $p > 0$. Τότε $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} = +\infty$. Πράγματι, από κριτήριο συμπύκνωσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ όπου $a_n = \frac{2^n}{(\ln 2^n)^p}$. Αλλά $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^p \to 2 > 1$. Άρα από κριτήριο λόγου $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.