ΣΥΝΕΧΕΙΑ, ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΟΡΙΩΝ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Θεώρημα. *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x_0 \in I$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\sup_{t\in I} \left| f_{n_0}(t) - f(t) \right| < \varepsilon$. Αφού f_{n_0} συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $\left| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \right| < \varepsilon$. Επομένως για κάθε τέτοιο x έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \le \left| f(x) - f_{n_0}(x) \right| + \left| f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) \right| + \left| f_{n_0}(x_0) - f(x_0) \right| < 3\varepsilon.$$

□

Παρατήρηση. Η υπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Πράγματι, η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει κατά σημείο στην ασυνεχή συνάρτηση $\chi_{\{0\}}$, άρα η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα. *Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία (Riemann) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\sup_{a\le t\le b} \left| f_{n_0}(t) - f(t) \right| < \varepsilon$. Αφού η f_{n_0} είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση $\mathscr{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}(f_{n_0}, \mathscr{P}) - \mathcal{L}(f_{n_0}, \mathscr{P}) < \varepsilon.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f, \mathscr{P}) - \mathcal{L}(f, \mathscr{P}) &= \left(\mathcal{U}(f, \mathscr{P}) - \mathcal{U}(f_{n_0}, \mathscr{P})\right) + \left(\mathcal{U}(f_{n_0}, \mathscr{P}) - \mathcal{L}(f_{n_0}, \mathscr{P})\right) + \left(\mathcal{L}(f_{n_0}, \mathscr{P}) - \mathcal{L}(f, \mathscr{P})\right) \\
&\le \sum_{k=1}^N \left(\sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} f(t) - \sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} f_{n_0}(t) \right)(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon + \sum_{k=1}^N \left(\inf_{t_{k-1}\le t\le t_k} f(t) - \inf_{t_{k-1}\le t\le t_k} f_{n_0}(t) \right)(t_k - t_{k-1}) \\
&\le \sum_{k=1}^N \sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} \left| f(t) - f_{n_0}(t) \right| (t_k - t_{k-1}) + \varepsilon + \sum_{k=1}^N \sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} \left| f(t) - f_{n_0}(t) \right| (t_k - t_{k-1}) \\
&\le 2 \sup_{a\le t\le b} \left| f_{n_0}(t) - f(t) \right| \sum_{k=1}^N (t_k - t_{k-1}) + \varepsilon < \varepsilon\left(2(b-a) + 1\right).
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης έχουμε

$$\left| \int_a^b f_n(t) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, dt \le \sup_{a\le t\le b} |f_n(t) - f(t)|\,(b-a) \to 0.$$

□

Παρατήρηση. Η υπόθεση της ομοιόμορφης σύγκλισης είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Πράγματι, έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών στο $[0, 1]$. Τότε η $f_n = \chi_{\{q_1,\dots,q_n\}}$ είναι μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ακολουθία $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$. Η f_n είναι μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση. Αλλά

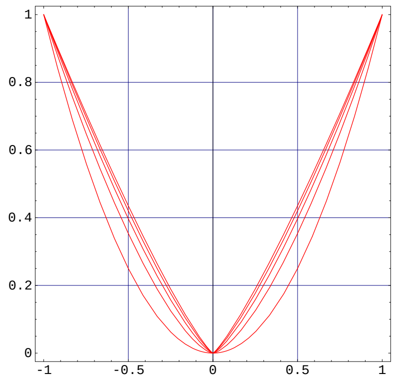
$$\int_0^1 f_n(t)\, dt = 1 \nrightarrow 0.$$

Είδαμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση διατηρεί τη συνέχεια και την ολοκληρωσιμότητα. Η ομοιόμορφη σύγκλιση, γενικά, ΔΕΝ διατηρεί τη διαφορισιμότητα.

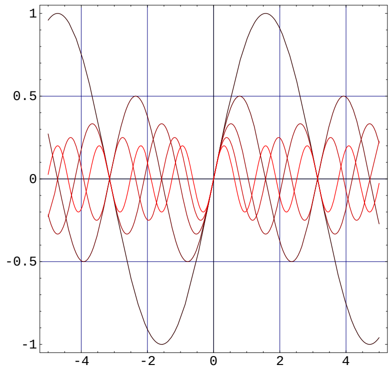
Παραδείγματα.

(1) Η ακολουθία $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $-1 \le x \le 1$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην μη διαφορίσιμη συνάρτηση $|x|$.

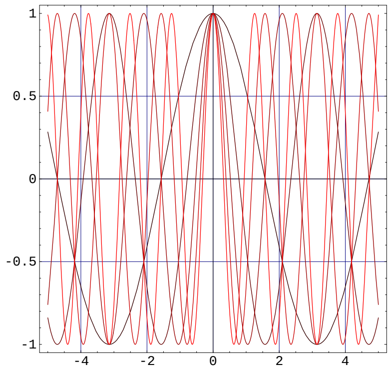
(2) Η ακολουθία $g_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση. Αλλά η ακολουθία των παραγώγων $g_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει ούτε κατά σημείο.



(α') $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$



(β') $g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$



(γ') $g_n'(x) = \cos(nx)$