

ΚΑΤΑ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σε όλες τις ενότητες που ακολουθούν και αφορούν ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων, με I θα συμβολίζουμε κάποιο διάστημα του $\mathbb{R}$ (οποιοδήποτε τύπου). Επίσης, αν $A \subset \mathbb{R}$ τότε με χ_A θα συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του A δηλαδή τη συνάρτηση

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}.$$

Ορισμός. Έστω $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

Η ποσότητα αυτή (μπορεί να είναι άπειρη) ονομάζεται απόσταση των f και g .

Παραδείγματα.

(1) Αν $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $\rho(f, g) = 1$.

(2) Αν $f(x) = 1/x$, $g(x) = 0$, $x > 0$, τότε $\rho(f, g) = +\infty$.

Ορισμός. Έστω f_n μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

(1) Λέμε ότι η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f ($f_n \rightarrow f$ κατά σημείο), αν για κάθε $x \in I$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Ισοδύναμα:

Για κάθε $x \in I$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(2) Λέμε ότι η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f ($f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα), αν $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0$. Ισοδύναμα:

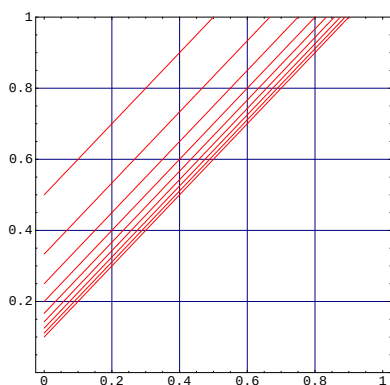
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις.

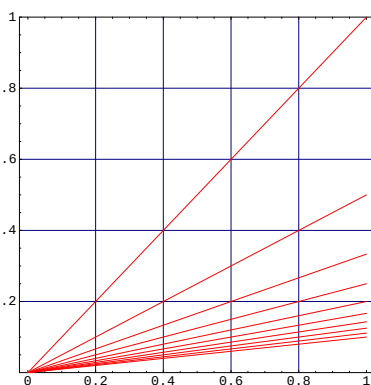
- (1) Η διαφορά ανάμεσα στους δύο ορισμούς είναι η εξής: Στην κατά σημείο σύγκλιση το n_0 εξαρτάται και από το ε και από το x . Στην ομοιόμορφη σύγκλιση το n_0 εξαρτάται μόνο από το ε . Έτσι η απαίτηση να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την απαίτηση να έχουμε κατά σημείο σύγκλιση.
- (2) Γεωμετρικά, η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ η γραφική παράσταση της f_n βρίσκεται σε μια λωρίδα πλάτους 2ε γύρω από τη γραφική παράσταση της f .

Παραδείγματα.

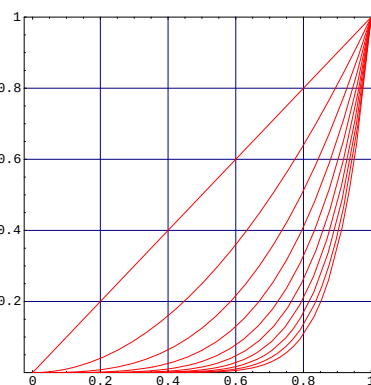
- (1) Η ακολουθία $f_n(x) = x + 1/n$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο και ομοιόμορφα στην $f(x) = x$.
- (2) Η ακολουθία $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση. Δεν συγκλίνει ομοιόμορφα διότι $\rho(f_n, 0) = +\infty$. Αν όμως περιορίσουμε το πεδίο ορισμού των f_n στο διάστημα $[0, 1]$, τότε έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση διότι $\rho(f_n, 0) = 1/n \rightarrow 0$.
- (3) Η ακολουθία f_n με $f_n(x) = x^n$, $x \in (0, 1)$, συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση διότι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Η ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα διότι $\rho(f_n, 0) = 1 \rightarrow 0$.



(α) $f_n(x) = x + 1/n$

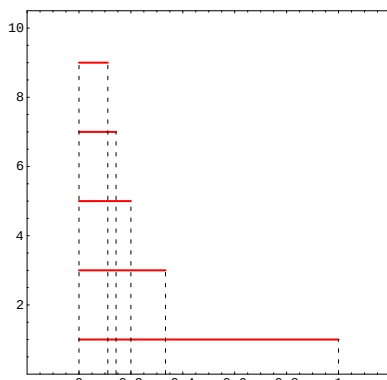


(β) $f_n(x) = x/n$

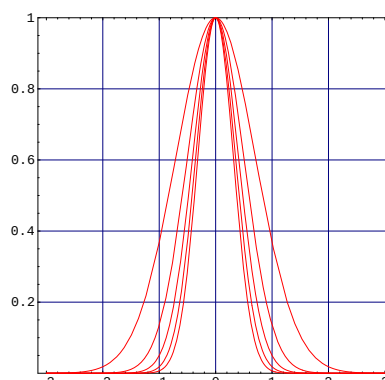


(γ) $f_n(x) = x^n$

- (4) Η ακολουθία f_n με $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$ συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 0$. Η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση διότι $\rho(f_n, 0) = n \rightarrow 0$.
- (5) Η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο στην ασυνεχή συνάρτηση $\chi_{\{0\}}$ (παντού μηδέν εκτός από το σημείο 0 στο οποίο παίρνει την τιμή 1). Θα δούμε παρακάτω ότι όταν συμβαίνει αυτό η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.



(α) $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$



(β) $f_n(x) = e^{-nx^2}$

Θεώρημα. Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε $f_n \rightarrow f$ κατά σημείο.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος, όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, ΔΕΝ ισχύει.

Θεώρημα. Έστω $f_n, g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθίες συναρτήσεων. Έστω επίσης $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ κατά σημείο τότε $af_n + bg_n \rightarrow af + bg$ και $f_n g_n \rightarrow fg$ κατά σημείο.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in I$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} (af_n(x) + bg_n(x)) = af(x) + bg(x)$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)g_n(x) = f(x)g(x)$. □

Θεώρημα. Έστω $f_n, g_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ακολουθίες συναρτήσεων. Έστω επίσης $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) Αν $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα τότε $af_n + bg_n \rightarrow af + bg$.

(2) Αν $f_n \rightarrow f$ και $g_n \rightarrow g$ ομοιόμορφα και επιπλέον οι f, g είναι φραγμένες, τότε $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα.

Απόδειξη.

(1) Έχουμε

$$|(af_n(x) + bg_n(x)) - (af(x) + bg(x))| \leq |a||f_n(x) - f(x)| + |b||g_n(x) - g(x)|$$

για κάθε $x \in I$. Επομένως

$$\sup_{x \in I} |(af_n(x) + bg_n(x)) - (af(x) + bg(x))| \leq |a| \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| + |b| \sup_{x \in I} |g_n(x) - g(x)| \rightarrow 0.$$

Άρα $af_n + bg_n \rightarrow af + bg$ ομοιόμορφα.

(2) Ας υποθέσουμε τώρα επιπλέον ότι οι f και g είναι φραγμένες, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in I$ έχουμε $|f(x)| \leq M$ και $|g(x)| \leq M$. Εφόσον $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε n με $n \geq n_0$ και κάθε $x \in I$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < M$ και άρα $|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \leq 2M$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f_n(x)g(x) + f_n(x)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f_n(x)||g_n(x) - g(x)| + |g(x)||f_n(x) - f(x)| \\ &\leq 2M|g_n(x) - g(x)| + M|f_n(x) - f(x)| \end{aligned}$$

για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για $n \geq n_0$ έχουμε

$$\sup_{x \in I} |f_n(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \leq 2M \sup_{x \in I} |g_n(x) - g(x)| + M \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0.$$

Άρα $f_n g_n \rightarrow fg$ ομοιόμορφα.

□

Παρατήρηση. Στο (2) του προηγούμενου θεωρήματος, η υπόθεση ότι οι f και g είναι φραγμένες είναι απαραίτητη. Πράγματι, η ακολουθία $f_n(x) = x + 1/n$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = x$ διότι $\rho(f_n, f) = 1/n \rightarrow 0$, αλλά η f_n^2 δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f^2 διότι $\rho(f_n^2, f^2) = +\infty$.

