ΑΝΑΔΙΑΤΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΣΕΙΡΩΝ

Ορισμός. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά πραγματικών αριθμών και* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *μια 1-1 και επί συνάρτηση. Τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *ονομάζεται αναδιάταξη της* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Παραδείγματα.

(1) Η σειρά

$$(*)\ \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \cdots$$

είναι μια αναδιάταξη της αρμονικής σειράς

$$(**)\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots.$$

Παρατηρούμε ότι η $(**)$ αποκλίνει. Πράγματι, αν s_n και t_n είναι οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $(*)$ και $(**)$ αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) = t_{2n} \to +\infty. \end{aligned}$$

Άρα $s_n \to +\infty$ διότι η s_n είναι αύξουσα.

(2) Υπάρχει αναδιάταξη της

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

η οποία αποκλίνει. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$ μπορούμε να επιλέξουμε

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

έτσι ώστε

$$-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n_1+1} > 1 \tag{1}$$

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{2n_1+3} + \frac{1}{2n_1+5} + \cdots + \frac{1}{2n_2+1} > 1 \tag{2}$$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{2n_2+3} + \frac{1}{2n_2+5} + \cdots + \frac{1}{2n_3+1} > 1 \tag{3}$$

$$\cdots \tag{4}$$

$$-\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2n_k+3} + \frac{1}{2n_k+5} + \cdots + \frac{1}{2n_k+1} > 1 \tag{5}$$

$$\cdots \tag{6}$$

Τότε η ανάδιάταξη

$$\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n_1+1}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2n_1+3} + \frac{1}{2n_1+5} + \cdots + \frac{1}{2n_2+1}\right) + \cdots$$

αποκλίνει διότι το άθροισμα n διαδοχικών παρενθέσεων είναι μεγαλύτερο από n.

Στην πραγματικότητα ισχύει το ακόλουθο πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα του οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα (Riemann). *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε για κάθε* $s \in \mathbb{R}$ *υπάρχει αναδιάταξη τέτοια ώστε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = s$.

Απ' την άλλη, έχουμε το εξής:

Θεώρημα. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια απόλυτα συγκλίνουσα σειρά και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *τυχούσα αναδιάταξη. Τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *συγκλίνει απόλυτα και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Απόδειξη. Για κάθε n έχουμε $\sum_{k=1}^{n} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ άρα η αναδιάταξη συγκλίνει απόλυτα. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε

$$\{1, 2, \ldots, n_1\} \subset \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n_0)\}.$$

Τότε για κάθε n με $n > n_0$ θέτουμε

$$I_n = \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)\} \setminus \{1, 2, \ldots, n_1\}$$

και έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_1} a_k\right| + \left|\sum_{k=1}^{n_1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k\in I_n} a_k\right| + \left|\sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k\right| \leq 2 \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon.$$

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Ορισμός. *Έστω* a_n, b_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Θέτουμε*

$$a_n * b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Η ακολουθία $a_n * b_n$ *λέγεται συνέλιξη ή γινόμενο Cauchy των* a_n *και* b_n.

Θεώρημα. *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *δυο απόλυτα συγκλίνουσες σειρές. Θέτουμε* $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. *Τότε η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n * b_n$ *συγκλίνει απόλυτα και* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n * b_n = ab$.

Απόδειξη. Θέτουμε $c_n = a_n * b_n$. Για κάθε n έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} |a_{k-j}||b_j| = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} |a_{k-j}||b_j| = \sum_{j=0}^{n} |b_j| \sum_{k=j}^{n} |a_{k-j}| = \sum_{j=0}^{n} |b_j| \sum_{k=0}^{n-j} |a_k| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ είναι φραγμένη, άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Θα δείξουμε τώρα ότι $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$. Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{k=j}^{n} a_{k-j} = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{k=0}^{n-j} a_k = \sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right) + a \sum_{j=0}^{n} b_j.$$

Προφανώς $\lim_{n\to\infty} a \sum_{j=0}^{n} b_j = ab$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$ συγκλίνει, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\sum_{j=n_1+1}^{\infty} |b_j| < \varepsilon$. Επίσης, αφού $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε για κάθε n με $n \geq n_2$ έχουμε $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - a\right| < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε n με $n > 2n_0$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{n_0} |b_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right| + \sum_{j=n_0+1}^{n} |b_j| \left|\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right| \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{n_0} |b_j| + \sum_{j=n_0+1}^{n} |b_j| \left(\sum_{k=0}^{n-j} |a_k| + |a|\right)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} |b_j| \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |a| \right) \leq \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| + \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |a| \right)$$
$$= \varepsilon \left(\sum_{j=0}^{\infty} |b_j| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| + |a| \right).$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a \right) = 0.$ □

Παράδειγμα. Η συνέλιξη της $\frac{1}{n!}$ με τον εαυτό της είναι η ακολουθία $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$