ΣΕΙΡΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

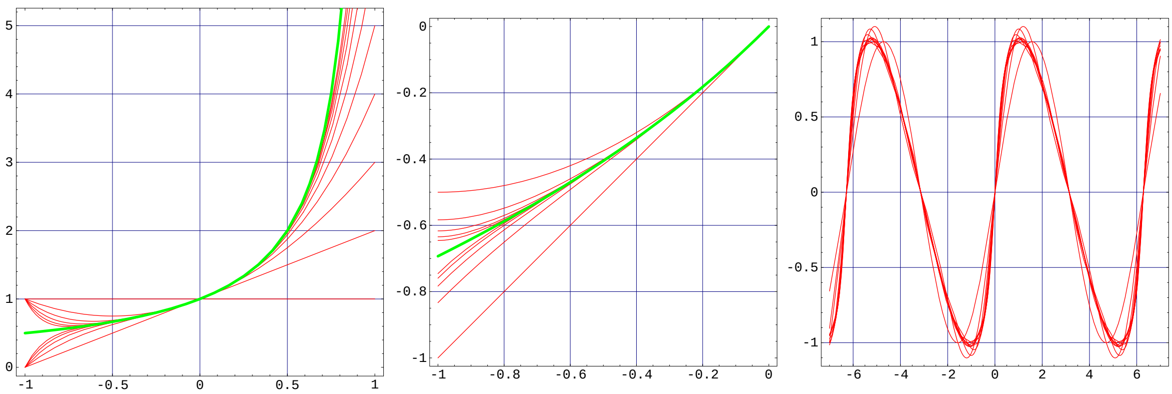
Ορισμός. *Έστω* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *μια ακολουθία συναρτήσεων και* $f : I \to \mathbb{R}$. *Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* s_n *με* $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$.

Αν $s_n \to f$ *κατά σημείο τότε λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει κατά σημείο στην* f *και γράφουμε:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{κατά σημείο.}$$

Αν $s_n \to f$ *ομοιόμορφα τότε λέμε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην* f *και γράφουμε:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{ομοιόμορφα.}$$



(α') $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ (β') $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ (γ') $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$

Παραδείγματα.

(1) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Πράγματι, αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, τότε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} = f(x) \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

$$\rho(s_n, f) = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = +\infty.$$

Η σειρά δεν συγκλίνει για κανένα x έξω από το διάστημα $(-1, 1)$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, $x \in [-1, 0]$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = -\ln(1-x)$. Πράγματι, σταθεροποιούμε τυχόν $x \in [-1, 0]$, ολοκληρώνουμε τη σχέση

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

από x ως 0 και παίρνουμε

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \ln(1-x) - \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Επομένως, αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς, τότε

$$|s_n(x) - f(x)| = \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| \le \int_x^0 \frac{|t|^n}{|1-t|} dt \le \int_x^0 |t|^n dt = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Παίρνοντας sup ως προς x έχουμε $\rho(s_n, f) \le 1/n \to 0$, άρα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Παρατηρήστε ότι για $x = -1$ έχουμε

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = -f(-1) = \ln 2,$$

δηλαδή υπολογίσαμε το όριο της εναλλάσουσας σειράς.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν οι f_n είναι συνεχείς και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι συνεχής γιατί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις.

(2) Αν οι $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη διότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αποτελείται από ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Επίσης

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right) dt = \lim_n \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right) dt = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt.$$

Θεώρημα (Κριτήριο Weierstrass). *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία M_n μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει και $|f_n(x)| \le M_n$ για κάθε $x \in I$ και κάθε n. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο I.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα από κριτήριο σύγκρισης. Θέτουμε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Θα δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα. Για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Άρα $\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Επομένως $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$ ομοιόμορφα. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι $|f_n(x)| \le M_n$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \ge n_0$, όπου n_0 δεδομένος φυσικός αριθμός.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ διότι $\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2}$ για κάθε x, και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Στο σχήμα (γ') φαίνονται οι 10 πρώτοι όροι της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της σειράς.