

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ - ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Ορισμός. Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζευγάρι (X, d) , όπου X ένα σύνολο και d μια συνάρτηση (η μετρική) $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y, z \in X$ έχουμε

- (1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (τριγωνική ανισότητα).

Παραδείγματα.

- (1) Έστω X ένα σύνολο. Ορίζουμε $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ με

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}.$$

Τότε η d είναι μια μετρική (η διακριτή μετρική). Αυτή είναι η πιο «χονδροειδής» απόσταση που μπορεί να ορίσει κανείς: δυο οποιαδήποτε διακεκριμένα σημεία έχουν απόσταση 1. Επαληθεύουμε την τριγωνική ανισότητα. Αν $x = y$ τότε $d(x, y) = 0 \leq d(x, z) + d(z, y)$. Αν $x \neq y$ τότε δεν μπορεί $d(x, z) = d(y, z) = 0$ γιατί θα είχαμε $x = y = z$. Επομένως κάποιο από τα $d(x, z)$, $d(z, y)$ είναι ίσο με 1, από το οποίο συνεπάγεται ότι $d(x, y) = 1 \leq d(x, z) + d(z, y)$.

- (2) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ θέτουμε $d(x, y) = |x - y|$. Τότε η d είναι μια μετρική (η συνηθισμένη μετρική στο $\mathbb{R}$).
- (3) Για κάθε $x = (x(1), x(2), \dots, x(N))$, $y = (y(1), y(2), \dots, y(N)) \in \mathbb{R}^N$ ορίζουμε

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Τότε η d_2 είναι η συνηθισμένη μετρική στον $\mathbb{R}^N$, δηλαδή η Ευκλείδεια απόσταση. Η τριγωνική ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Minkowski:

$$\left(\sum_{k=1}^N (a_k + b_k)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 \right)^{1/2},$$

η οποία με τη σειρά της προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\sum_{k=1}^N a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^N a_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 \right)^{1/2}.$$

- (4) Για κάθε $x = (x(1), x(2), \dots, x(N))$, $y = (y(1), y(2), \dots, y(N)) \in \mathbb{R}^N$ ορίζουμε

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|, \quad d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq N} |x(k) - y(k)|.$$

Τότε οι d_1 και d_∞ είναι μετρικές στον $\mathbb{R}^N$.

- (5) Θέτουμε $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$ (το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων στο $[a, b]$), και για κάθε $f, g \in C([a, b])$ έστω

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

και

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f - g|.$$

Τότε οι d_∞ και d_1 είναι μετρικές (χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με το προηγούμενο παράδειγμα για να τονίσουμε την αναλογία. Παρατηρήστε ότι το άθροισμα γίνεται ολοκλήρωμα). Η d_∞ είναι η συνηθισμένη απόσταση δυο συναρτήσεων, όπως την συναντήσαμε στον ορισμό της ομοιόμορφης σύγκλισης. Εκεί είχαμε το συμβολισμό $\rho(f, g)$. Προσέξτε ότι για να δείξουμε ότι η d_1 είναι μετρική πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι αν το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης είναι μηδέν, τότε η συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Έτσι, ανάμεσα σε όλα αυτά τα παραδείγματα, μόνο στην περίπτωση της d_1 η επαλήθευση της ιδιότητας $d_1(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ δεν είναι τετριμμένη.

Ορισμός. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$D(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

Το σύνολο $D(x, \varepsilon)$ ονομάζεται (ανοιχτός) δίσκος με κέντρο x και ακτίνα ε ή ε -περιοχή του x .

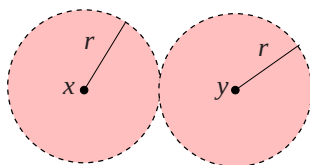
Παραδείγματα.

- (1) Στον $C([a, b])$ με την μετρική d_∞ , η ε -περιοχή μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων η γραφική παράσταση των οποίων βρίσκεται σε μια ανοιχτή λωρίδα πλάτους 2ε γύρω από τη γραφική παράσταση της f .
- (2) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική, η ε -περιοχή ενός σημείου x είναι όλα τα σημεία τα οποία απέχουν από το x Ευκλείδεια απόσταση μικρότερη από ε . Είναι επομένως ένας ανοιχτός δίσκος (με τη συνηθισμένη έννοια) κέντρου x και ακτίνας ε .
- (3) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη μετρική d_∞ , η ε -περιοχή ενός σημείου x είναι ένα ανοιχτό τετράγωνο με κέντρο x και μήκος πλευράς 2ε .
- (4) Σ' ένα χώρο με τη διακριτή μετρική, ο δίσκος με κέντρο κάποιο σημείο και ακτίνα 0.9999 είναι το ίδιο το σημείο. Ένας δίσκος με ακτίνα 1.0001 είναι ολόκληρος ο χώρος.

Παρατήρηση. Αν ο (X, d) είναι κάποιος μετρικός χώρος και $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε οι δίσκοι $D(x, r)$, $D(y, r)$ με $r = d(x, y)/2$ είναι ξένοι γιατί αν υπήρχε $z \in D(x, r) \cap D(y, r)$, τότε θα είχαμε

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) < 2r = d(x, y),$$

άτοπο.



Ορισμός. Ένα υποσύνολο ενός μετρικού χώρου ονομάζεται φραγμένο αν περιέχεται σε κάποιον ανοιχτό δίσκο.

Παραδείγματα.

- (1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, τα φραγμένα σύνολα είναι αυτά ακριβώς τα οποία είναι φραγμένα με τη συνηθισμένη έννοια. Πράγματι, το A είναι φραγμένο με τη συνηθισμένη έννοια αν και μόνο αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x| < M$ για κάθε $x \in A$. Αλλά αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $A \subset (-M, M) = D(0, M)$.
- (2) Στο $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, όλα τα σύνολα είναι φραγμένα, διότι το ίδιο το $\mathbb{R}$ είναι ο ανοιχτός δίσκος $D(0, 2)$.
- (3) Στο $\mathbb{R}^N$ ένα σύνολο είναι φραγμένο ως προς την d_2 αν και μόνο αν είναι φραγμένο ως προς την d_∞ . Πράγματι, παρατηρούμε ότι $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{N}d_\infty$. Έτσι αν το A βρίσκεται σε κάποιον δίσκο ακτίνας r ως προς την d_∞ τότε βρίσκεται στον δίσκο με το ίδιο κέντρο και ακτίνα $\sqrt{N}r$ ως προς την d_2 . Αντίστροφα, αν το A βρίσκεται σε κάποιον δίσκο ακτίνας r ως προς την d_2 τότε βρίσκεται στον δίσκο με το ίδιο κέντρο και την ίδια ακτίνα ως προς την d_∞ .

Ορισμός. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, x_n μια ακολουθία στο X και $x \in X$. Λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο x και γράφουμε $x_n \rightarrow x$ ή $x_n \xrightarrow{d} x$ (αν θέλουμε να τονίσουμε τη μετρική), αν $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $d(x_n, x) < \varepsilon$ για κάθε n με $n \geq n_0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in D(x, \varepsilon)$ για κάθε n με $n \geq n_0$.

Θεώρημα (Μοναδικότητα του ορίου). Έστω (X, d) μετρικός χώρος, x_n μια ακολουθία στο X και $x, y \in X$. Αν $x_n \rightarrow x$ και $x_n \rightarrow y$, τότε $x = y$.

Απόδειξη. Έχουμε $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Άρα $d(x, y) = 0$, επομένως $x = y$. □

Παραδείγματα.

- (1) Στον $\mathbb{R}^N$ με τη συνηθισμένη μετρική, $x_n \rightarrow x$ αν και μόνο αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k)$$

για κάθε $k = 1, 2, \dots, N$ (δηλαδή η ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη). Πράγματι, αν $x_n \xrightarrow{d_2} x$ τότε για κάθε k έχουμε $|x_n(k) - x(k)| \leq d_2(x_n, x) \rightarrow 0$. Αντίστροφα, αν $x_n(k) \rightarrow x(k)$ για κάθε k , τότε

$$d_2(x_n, x) = \left(\sum_{k=1}^N |x_n(k) - x(k)|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Το ίδιο ισχύει και για τη μετρική d_∞ του 4ου παραδείγματος γιατί η ανισότητα $d_\infty \leq d_2 \leq \sqrt{N}d_\infty$ μας λέει ότι μια ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο x ως προς τη μια μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την άλλη.

- (2) Στον $C([a, b])$ με τη μετρική d_∞ έχουμε ότι $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$ αν και μόνο αν $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.
- (3) Σε οποιονδήποτε μετρικό χώρο, μια ακολουθία η οποία είναι τελικά ίση με x , συγκλίνει στο x (τελικά ίση με x σημαίνει ότι από κάποιο δείκτη και μετά όλοι οι όροι της είναι ίσοι με x).
- (4) Σε ένα σύνολο με τη διακριτή μετρική ισχύει και το αντίστροφο. Αν $x_n \rightarrow x$ τότε η x_n είναι τελικά ίση με x . Πράγματι, σ' ένα σύνολο με τη διακριτή μετρική το $\{x\}$ είναι ανοιχτός δίσκος με κέντρο x (και ακτίνα, ας πούμε, $1/2$), επομένως, από τον ορισμό της σύγκλισης, υπάρχει κάποιο n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in \{x\}$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παρατηρήσεις. Ακριβώς όπως στην περίπτωση των πραγματικών αριθμών, έχουμε ότι:

- (1) Σ' ένα μετρικό χώρο κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
- (2) Μια ακολουθία σ' ένα μετρικό χώρο συγκλίνει στο x αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο x .