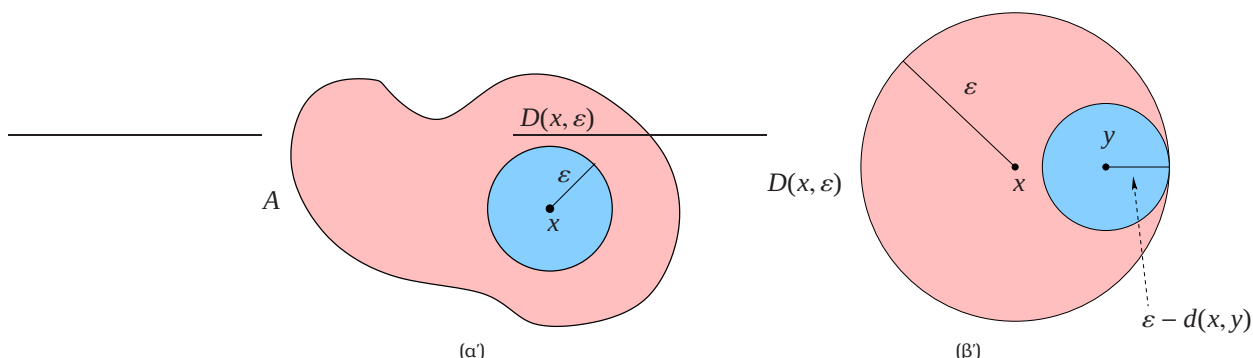


ΑΝΟΙΧΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A λέγεται ανοιχτό, αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subset A$. Το A λέγεται κλειστό αν το $X \setminus A$ είναι ανοιχτό.



Θεώρημα. Κάθε ανοιχτός δίσκος σ'ένα μετρικό χώρο (X, d) είναι ανοιχτό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $D(x, \varepsilon)$ ένας ανοιχτός δίσκος. Τότε για κάθε $y \in D(x, \varepsilon)$ έχουμε $D(y, \varepsilon - d(x, y)) \subset D(x, \varepsilon)$. $\square$

Θεώρημα. Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

- (1) Αν τα $G_i, i \in I$, είναι ανοιχτά, τότε το $\bigcup_{i \in I} G_i$ είναι ανοιχτό.
- (2) Αν τα $G_1, \dots, G_n$ είναι ανοιχτά, τότε το $\bigcap_{k=1}^n G_k$ είναι ανοιχτό.

Απόδειξη.

- (1) Έστω $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$. Τότε $x \in G_{i_0}$ για κάποιο i_0 , άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subset G_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$.
- (2) Έστω $x \in \bigcap_{k=1}^n G_k$. Τότε $x \in G_k$ για κάθε k . Άρα υπάρχουν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n > 0$ τέτοια ώστε $D(x, \varepsilon_k) \subset G_k$ για κάθε k . Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$. Τότε $D(x, \varepsilon) \subset G_k$ για κάθε k . Επομένως $D(x, \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^n G_k$. $\square$

Θεώρημα. Έστω (X, d) μετρικός χώρος.

- (1) Αν $F_i, i \in I$, κλειστά τότε $\bigcap_{i \in I} F_i$ κλειστό.
- (2) Αν $F_1, \dots, F_n$ κλειστά τότε $\bigcup_{k=1}^n F_k$ κλειστό.

Απόδειξη.

- (1) $F_i, i \in I$ κλειστά $\Rightarrow X \setminus F_i, i \in I$ ανοιχτά $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i$ ανοιχτό $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i$ κλειστό.
- (2) Παρόμοια. $\square$

Θεώρημα. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \rightarrow x$ έχουμε $x \in A$.

Απόδειξη. Έστω ότι το A είναι κλειστό και $x_n \in A$ μια ακολουθία με $x_n \rightarrow x$. Ας υποθέσουμε ότι $x \notin A$. Τότε $x \in X \setminus A$. Αλλά το A είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \subset X \setminus A$. Αφού $x_n \rightarrow x$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} \in D(x, \varepsilon)$. Επομένως $x_{n_0} \in X \setminus A$, δηλαδή $x_{n_0} \notin A$, άτοπο. Αντίστροφα, έστω ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σημείων του A συγκλίνει σε κάποιο σημείο του A . Υποθέτουμε ότι το A δεν είναι κλειστό. Τότε το $X \setminus A$ δεν είναι ανοιχτό, άρα υπάρχει $x \in X \setminus A$ τέτοιο ώστε $D(x, \varepsilon) \not\subset X \setminus A$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή $D(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ για κάθε ε . Ιδιαίτερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in D(x, 1/n) \cap A$. Αλλά τότε $d(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0$, άρα η x_n συγκλίνει στο x . Αυτό είναι άτοπο γιατί το x δεν ανήκει στο A ενώ η ακολουθία ανήκει. $\square$

Παραδείγματα.

- (1) Σε κάθε μετρικό χώρο (X, d) , τα μονοσύνολα είναι κλειστά. Πράγματι, έστω $x \in X$ και $y \in X \setminus \{x\}$. Τότε $x \neq y$. Θέτουμε $r = d(x, y) > 0$ και παίρνουμε ότι $x \notin D(y, r)$, άρα $\{x\} \cap D(y, r) = \emptyset$, επομένως $D(y, r) \subset X \setminus \{x\}$. Δηλαδή το $X \setminus \{x\}$ είναι ανοιχτό, επομένως το $\{x\}$ είναι κλειστό.
- (2) Σε κάθε μετρικό χώρο, κάθε πεπερασμένο σύνολο $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι κλειστό γιατί $F = \bigcup_{k=1}^n \{x_k\}$ και τα μονοσύνολα δείξαμε ότι είναι κλειστά.

- (3) Σε κάθε διακριτό χώρο X , κάθε σύνολο $A \subset X$ είναι ανοιχτό γιατί για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $D(x, 1/2) = \{x\} \subset A$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε σύνολο είναι επίσης κλειστό, αφού το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.
- (4) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, το $(0, 2)$ είναι ανοιχτό γιατί $(0, 2) = D(1, 1)$. Το $(0, 2)$ δεν είναι κλειστό γιατί η ακολουθία $1/n \in (0, 2)$ συγκλίνει στο $0 \notin (0, 2)$.
- (5) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, το $[0, 2]$ είναι κλειστό γιατί αν μια ακολουθία αριθμών μεταξύ του 0 και του 2 συγκλίνει τότε το όριό της είναι μεταξύ του 0 και του 2. Το $[0, 2]$ δεν είναι ανοιχτό γιατί κάθε περιοχή του 0 περιέχει αρνητικούς αριθμούς, επομένως δεν υπάρχει περιοχή του 0 η οποία να περιέχεται εξ' ολοκλήρου στο $[0, 2]$.
- (6) Γενικότερα, κάθε ανοιχτό διάστημα (a, b) είναι ανοιχτό σύνολο και όχι κλειστό. Κάθε κλειστό διάστημα είναι κλειστό σύνολο και όχι ανοιχτό.
- (7) Το $(0, +\infty)$ είναι ανοιχτό διότι $(0, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (0, n)$ (ένωση ανοιχτών συνόλων).
- (8) Ένα ημιάνοιχτο διάστημα δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό σύνολο.
- (9) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι ανοιχτό γιατί δεν περιέχει διάστημα. Δεν είναι κλειστό γιατί το $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ δεν περιέχει διάστημα.
- (10) Το σύνολο $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι κλειστό γιατί η ακολουθία $1/n \in A$ συγκλίνει στο $0 \notin A$. Το A δεν είναι ανοιχτό γιατί δεν περιέχει διάστημα.
- (11) Το σύνολο $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ είναι κλειστό γιατί το συμπλήρωμά του

$$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \cup (1, +\infty)$$

είναι ανοιχτό σαν ένωση ανοιχτών συνόλων. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, το A δεν είναι ανοιχτό.

- (12) Το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό γιατί

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1).$$

Παρατήρηση. Η άπειρη τομή ανοιχτών συνόλων δεν είναι κατ' ανάγκη ανοιχτό σύνολο, για παράδειγμα

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}.$$

Άρα, η άπειρη ένωση κλειστών συνόλων δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό σύνολο.