ΣΕΙΡΕΣ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΟΡΩΝ - ΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΡΙΣΗΣ

Θεώρημα. *Έστω a_n μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε:*

(1) *Αν η s_n είναι φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει.*

(2) *Αν η s_n δεν είναι φραγμένη τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*

Απόδειξη. Αφού $a_n \geq 0$ για κάθε n, η ακολουθία s_n είναι αύξουσα. Επομένως αν είναι φραγμένη συγκλίνει, αν δεν είναι φραγμένη αποκλίνει στο $+\infty$. □

Παρατηρήσεις.

(1) Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι μια σειρά μη αρνητικών όρων είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Για παράδειγμα, είδαμε ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει, άρα κατ' ανάγκη αποκλίνει στο $+\infty$.

(2) Το προηγούμενο θεώρημα δεν ισχύει για σειρές αριθμών με αυθαίρετα πρόσημα. Για παράδειγμα η $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ δεν συγκλίνει. Παρά ταύτα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη.

Θεώρημα (Κριτήριο σύγκρισης). *Έστω a_n, b_n ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών τέτοιες ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε n. Τότε:*

(1) *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n, t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των δύο σειρών. Εφόσον $a_n \leq b_n$ για κάθε n, έχουμε ότι $s_n \leq t_n$ για κάθε n. Τώρα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε η t_n συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, επομένως και η s_n είναι φραγμένη συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ τότε $s_n \to +\infty$, άρα $t_n \to +\infty$, επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου n_0 κάποιος δεδομένος φυσικός αριθμός. Εξακολουθεί, επίσης, να ισχύει αν $\lambda a_n \leq \mu b_n$, όπου λ, μ δεδομένοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Παράδειγμα. Αν $p > 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Θεωρούμε την υπακολουθία $s_{2^{n+1}-1}$ και για κάθε n χωρίζουμε το $s_{2^{n+1}-1}$ σε $n+1$ διαδοχικές ομάδες με $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$ όρους η κάθε μία. Μέσα σε κάθε ομάδα κρατάμε τον πρώτο όρο (ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος) τόσες φορές όσες και το πλήθος των όρων της ομάδας. Έτσι το όλο άθροισμα μεγαλώνει:

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= \underbrace{1}_{1 \text{ όρος}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right)}_{2 \text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^n)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}\right)}_{2^n \text{ όροι}} \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^p} + \cdots + \frac{2^n}{2^{pn}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n(p-1)}}}_{\text{γεωμετρική πρόοδος}} \\ &= \frac{1-2^{(1-p)(n+1)}}{1-2^{1-p}} \leq \frac{1}{1-2^{1-p}}. \end{aligned}$$

Επομένως η $s_{2^{n+1}-1}$ είναι φραγμένη, άρα και η s_n είναι φραγμένη διότι $s_n \leq s_{2^{n+1}-1}$. Συνεπώς η σειρά συγκλίνει. Η ιδέα αυτής της απόδειξης θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω στην απόδειξη του κριτήριου συμπύκνωσης του Cauchy. Παρατηρήστε ότι αν $p \geq 2$, τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε την προηγούμενη απόδειξη.

Στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση της σειράς προκύπτει άμεσα από την ανισότητα $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ και το κριτήριο σύγκρισης (έχουμε δείξει σε παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει).

Παράδειγμα. Αν $0 < p \leq 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$. Πράγματι, έχουμε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ και γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, άρα από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$.

Θεώρημα (Οριακό κριτήριο σύγκρισης). *Έστω a_n, b_n ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, όπου $\ell > 0$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Εφόσον $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $\frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3\ell}{2} b_n$ για κάθε $n \geq n_0$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

Παραδείγματα.

(1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ αποκλίνει διότι $\frac{\frac{\sqrt{n}}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$ και γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 - n - 8}$ συγκλίνει διότι $\frac{\frac{n+2}{n^3-n-8}}{\frac{1}{n^2}} \to 1$ και γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Παράδειγμα (Ο αριθμός e σαν όριο σειράς). Θυμίζουμε ότι ο αριθμός e ορίζεται σαν το όριο της ακολουθίας

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$. Το ότι η σειρά συγκλίνει προκύπτει άμεσα από το κριτήριο σύγκρισης. Πράγματι, για κάθε $n \geq 2$ έχουμε ότι $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$ και γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει. Θέτουμε λοιπόν $s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ και θα δείξουμε ότι $s = e$. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Τότε $s_n \to s$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{n \cdot n \cdots n \cdot n} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = s_n.\end{aligned}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε $e \leq s$. Έστω τώρα τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού $s_n \to s$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $s_{n_0} > s - \varepsilon$. Τότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} > 1 + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$e \geq \sum_{k=0}^{n_0} \frac{1}{k!} = s_{n_0} > s - \varepsilon.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $e \geq s$. Δείξαμε δηλαδή ότι $e \leq s$ και $e \geq s$. Επομένως, $e = s$.