ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός. *Έστω* a_n *μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μια σειρά συναρτήσεων της μορφής* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *λέγεται δυναμοσειρά με κέντρο* 0.

Παρατήρηση. Μια δυναμοσειρά συγκλίνει τουλάχιστο για $x = 0$.

Ορισμός. *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά. Θέτουμε*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$$

κάνοντας τη σύμβαση $\frac{1}{0} = +\infty$ *και* $\frac{1}{+\infty} = 0$. *Το* R *λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Αν* $R > 0$ *τότε το διάστημα* $(-R, R)$ *λέγεται διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς.*

Θεώρημα. *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης* R. *Τότε:*

(1) *Αν* $R > 0$ *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα* $[-a, a] \subset (-R, R)$ *με* $0 < a < R$.
(2) *Αν* $R < +\infty$ *τότε η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για κανένα* $|x| > R$.

Απόδειξη.

(1) Επιλέγουμε $b > 0$ έτσι ώστε $a < b < R$. Τότε $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{b}$. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{b}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $|a_n x^n| < \left(\frac{|x|}{b}\right)^n \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in [-a, a]$. Αλλά η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ συγκλίνει διότι $0 < \frac{a}{b} < 1$. Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Weierstrass.
(2) Αν $|x| > R$, τότε $\limsup_n |a_n x^n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} > 1$. Επομένως υπάρχουν $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ έτσι ώστε $|a_{k_n} x^{k_n}| > 1$. Άρα η ακολουθία $a_n x^n$ δεν είναι μηδενική, επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλείεται να συγκλίνει.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Από το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει **κατά σημείο σ' ολόκληρο** το διάστημα σύγκλισης και **ομοιόμορφα** σε κάθε **κλειστό** υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισης. **Δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ολόκληρο το διάστημα σύγκλισης. Στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης, δηλαδή για $x = \pm R$, η σειρά μπορεί είτε να συγκλίνει ή να μην συγκλίνει.
(2) Αν για μια δυναμοσειρά έχουμε ότι, για κάποιο r, συγκλίνει για κάθε x με $|x| < r$ και δεν συγκλίνει για κάθε x με $|x| > r$, τότε το r είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.
(3) Αν μια δυναμοσειρά έχει μηδενική ακτίνα σύγκλισης, τότε συγκλίνει μόνο για $x = 0$ και για κανένα άλλο x.
(4) Κάθε δυναμοσειρά είναι συνεχής συνάρτηση σ' ολόκληρο το διάστημα σύγκλισης.
(5) Μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα $[a, b]$ του διαστήματος σύγκλισης και ισχύει

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Θεώρημα. *Έστω* a_n *μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τέτοια ώστε*

$$\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *έχει ακτίνα σύγκλισης* R.

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη για $0 < R < +\infty$. Οι περιπτώσεις $R = 0$ και $R = +\infty$ αποδεικνύονται ανάλογα. Για $x \neq 0$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \frac{|x|}{R}$ το οποίο είναι $\begin{cases} < 1, & \text{αν } |x| < R \\ > 1, & \text{αν } |x| > R \end{cases}$. Από κριτήριο λόγου, η $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ συγκλίνει αν $|x| < R$ και δεν συγκλίνει αν $|x| > R$. Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι ακριβώς R.

□

Παραδείγματα.

(1) Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης, άρα συγκλίνει κατά σημείο σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα. Η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ γιατί

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \to +\infty.$$

(2) Η $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ έχει μηδενική ακτίνα σύγκλισης, άρα συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

(3) Η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Άρα συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $(-1, 1)$ αλλά όχι σ' ολόκληρο το $(-1, 1)$ (από το πρώτο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας). Για $x = \pm 1$ η σειρά δεν συγκλίνει.

(4) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Για $x = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά η οποία δεν συγκλίνει, ενώ για $x = -1$ παίρνουμε την εναλλάσουσα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει από κριτήριο Dirichlet. Όπως είδαμε στο δεύτερο παράδειγμα της προηγούμενης ενότητας, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-1, 0]$, άρα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-1, a]$, με $-1 < a < 1$. Δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα της μορφής $(a, 1)$.

(5) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και συγκλίνει και στα δυο άκρα του διαστήματος σύγκλισης. Επίσης, από κριτήριο Weierstrass συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

(6) Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$, από κριτήριο λόγου ή ρίζας, συγκλίνει αν $|x| < 2$. Δεν συγκλίνει αν $|x| > 2$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι 2 και όχι 4, όπως θα έλεγε κανείς αν εφάρμοζε απρόσεκτα τον ορισμό.

Θεώρημα. *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης* $R > 0$. *Θέτουμε* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R, R)$. *Τότε η* f *είναι παραγωγίσιμη και*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, επομένως συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του $(-R, R)$. Θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R).$$

Θα δείξουμε ότι $f' = g$. Για $x \in (-R, R)$ έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right) dt = a_0 + \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} \right) dt \ (*).$$

Αλλά $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} = g(t)$ ομοιόμορφα στο $[0, x]$. Άρα παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στην $(*)$ έχουμε $f(x) = a_0 + \int_0^x g(t)dt$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του απειροστικού λογισμού, η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. □

Παράδειγμα (Η εκθετική συνάρτηση). Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (η δυναμοσειρά είδαμε ότι έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης). Αυτός είναι ένας εναλλακτικός τρόπος να ορίσουμε τη γνωστή από τον απειροστικό λογισμό εκθετική συνάρτηση ($\exp(x) = e^x$). Επαληθεύουμε δύο από τις ιδιότητές της χρησιμοποιώντας θεωρία σειρών:

(1) $(e^x)' = e^x$ διότι

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

(2) $e^{e+y} = e^x e^y$ διότι

$$\exp(x)\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

Ορισμός. *Μια σειρά της μορφής* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$*, όπου* $x_0 \in \mathbb{R}$ *σταθερό, λέγεται δυναμοσειρά με κέντρο* x_0.

Η ακτίνα σύγκλισης R τέτοιων σειρών ορίζεται από τον ίδιο τύπο και το διάστημα σύγκλισης ορίζεται να είναι $(x_0 - R, x_0 + R)$. Η υπόλοιπη θεωρία είναι τελείως ανάλογη.