ΤΑ ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΛΟΓΟΥ ΚΑΙ ΡΙΖΑΣ

Θεώρημα (Κριτήριο λόγου). *Έστω a_n ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$.*

(1) *Αν $\ell < 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν $\ell > 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*

Απόδειξη.

(1) Αν $\ell < 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell + \varepsilon_0 < 1$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon_0$, και άρα

$$a_{n+1} < a_n(\ell + \varepsilon_0) < a_{n-1}(\ell + \varepsilon_0)^2 < a_{n-2}(\ell + \varepsilon_0)^3 < \cdots < a_{n_0}(\ell + \varepsilon_0)^{n-n_0+1}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\ell + \varepsilon_0)^n$ συγκλίνει (γεωμετρική, $0 < \ell + \varepsilon_0 < 1$). Άρα από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\ell > 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell - \varepsilon_1 > 1$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_1$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon_1$, και άρα

$$a_{n+1} > a_n(\ell - \varepsilon_1) > a_{n-1}(\ell - \varepsilon_1)^2 > a_{n-2}(\ell - \varepsilon_1)^3 > \cdots > a_{n_0}(\ell - \varepsilon_1)^{n-n_0+1}.$$

Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty}(\ell - \varepsilon_1)^n = +\infty$ (γεωμετρική, $\ell - \varepsilon_1 > 1$). Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

□

Θεώρημα (Κριτήριο ρίζας). *Έστω a_n ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$.*

(1) *Αν $\ell < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν $\ell > 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*

Απόδειξη.

(1) Αν $\ell < 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell + \varepsilon_0 < 1$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon_0$, και άρα $a_n < (\ell+\varepsilon_0)^n$. Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\ell + \varepsilon_0)^n$ συγκλίνει , άρα από κριτήριο σύγκρισης, και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\ell > 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell - \varepsilon_1 > 1$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_1$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε $\sqrt[n]{a_n} > \ell - \varepsilon_1$, και άρα $a_n > (\ell-\varepsilon_1)^n$. Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty}(\ell - \varepsilon_1)^n = +\infty$. Άρα από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Στα κριτήρια λόγου και ρίζας, αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to +\infty$ ή αν $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

(2) Τα κριτήρια δεν εφαρμόζονται αν $\ell = 1$. Πράγματι,

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα.

(1) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει διότι $\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$ (κριτήριο λόγου).

(2) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$ συγκλίνει διότι $\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e} < 1$ (κριτήριο ρίζας).