

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ - ΓΕΝΙΚΑ

Ορισμός. Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \dots$$

Η ακολουθία s_n ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Για ένα δεδομένο n , ο αριθμός a_n λέγεται n -οστός όρος της σειράς, και ο αριθμός s_n n -οστό μερικό άθροισμα της σειράς.

- Αν $\lim s_n = s$ για κάποιο $s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο s και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
- Αν $\lim s_n = \pm\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $\pm\infty$ και γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty$.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$ διότι αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τότε $s_n = n \rightarrow +\infty$.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ δεν συγκλίνει διότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει στο 1. Πράγματι

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1.$$

Παράδειγμα (Η γεωμετρική σειρά). Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n$.

Αν $\alpha = 1$ τότε $s_n = 1 + 1 + \dots + 1 = n \rightarrow +\infty$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = +\infty$.

Αν $\alpha \neq 1$ τότε $s_n = \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^n = \frac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το α :

Αν $|\alpha| < 1$, τότε $\alpha^{n+1} \rightarrow 0$, άρα $s_n \rightarrow \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$.

Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^{n+1} \rightarrow +\infty$, άρα $s_n \rightarrow +\infty$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = +\infty$.

Αν $\alpha \leq -1$, τότε η ακολουθία α^{n+1} δεν συγκλίνει, άρα η s_n δεν συγκλίνει, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει.

Παρατηρήσεις.

- Κάθε πεπερασμένο άθροισμα μπορεί να θεωρηθεί συγκλίνουσα σειρά.
- Η σύγκλιση ή η απόκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται αν αλλάξουμε τις τιμές πεπερασμένου πλήθους όρων. Σαν άσκηση, διατυπώστε και αποδείξτε αυστηρά την πρόταση αυτή.

Θεώρημα. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Τότε

$$a_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow s - s = 0.$$

□

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος, όπως θα δούμε παρακάτω, ΔΕΝ ισχύει.

Θεώρημα. Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$ για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αν s_n, t_n είναι οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των δύο σειρών, τότε η $\lambda s_n + \mu t_n$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$. Αλλά $\lambda s_n + \mu t_n \rightarrow \lambda a + \mu b$. $\square$

Παρατήρηση. Ο «πολλαπλασιασμός» δυο σειρών, όπως θα δούμε παρακάτω, γενικά δεν επιτρέπεται.

Θεώρημα (Κριτήριο Cauchy). Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_0$ έχουμε $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m| < \varepsilon$.

Απόδειξη. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_n συγκλίνει. Η s_n συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy. Η s_n είναι Cauchy αν και μόνο αν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m > n \geq n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon).$$

Αλλά $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m|$. $\square$

Θεώρημα. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο Cauchy, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_0$ να ισχύει $\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon$. Παίρνοντας όριο στην προηγούμενη ανισότητα καθώς $m \rightarrow \infty$ έχουμε $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$. $\square$

Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η ακολουθία $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, n \in \mathbb{N}$, του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται μερικές φορές «ουρά» της σειράς. Παρατηρήστε ότι η σειρά «σπάει» στο μερικό άθροισμα και στην ουρά. Το θεώρημα λέει ότι η ουρά είναι μια μηδενική ακολουθία.

Παράδειγμα (Η αρμονική σειρά). Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε, από το κριτήριο Cauchy θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m > n \geq n_0$ θα είχαμε

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} < \frac{1}{2}.$$

Ιδιαίτερα,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \frac{1}{2}.$$

Αλλά

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \dots + \frac{1}{n+n}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

άτοπο.

Παρατήρηση. Η αρμονική σειρά είναι ένα παράδειγμα μη-συγκλίνουσας σειράς με μηδενική ακολουθία όρων.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το κριτήριο Cauchy, η σειρά συγκλίνει.