**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ**

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

**Άσκηση 1.** Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω σειρών.

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)2^n}$.

*Λύση.* Τα μερικά αθροίσματα και των δυο σειρών είναι τηλεσκοπικά.

(1)

$$s_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right) \to \frac{3}{4}.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο 3/4.

(2)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k2^{k-1}} - \frac{1}{(k+1)2^k}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n} \to 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο 1.

□

**Άσκηση 2.** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+n^2} - n\right)$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q}$, για κάθε $p, q \in \mathbb{R}$ με $0 < q < p$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-1/n}\right)$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+1/n)}$.

*Λύση.*

(1) Έχουμε

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}.$$

Επίσης

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}+n} \to \frac{1}{2}.$$

Αλλά η αρμονική σειρά αποκλίνει, άρα από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει.

(2) Έχουμε
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \le \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$
Αλλά η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$
συγκλίνει, άρα από κριτήριο σύγκρισης, η αρχική σειρά συγκλίνει.

(3) Έχουμε
$$\frac{\frac{1}{n^p-n^q}}{\frac{1}{n^p}} = \frac{n^p}{n^p-n^q} \to 1.$$
Η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Άρα, από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p-n^q}$$
συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(4) Έχουμε
$$\frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \ge \frac{1}{2n}.$$
Αλλά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty,$$
άρα από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει.

(5) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι άνω φραγμένη από το 3 (είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $e$ - Ανάλυση Ι). Επομένως, για $n \ge 3$ έχουμε $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le n$. Συνεπώς $\sqrt[n]{n}-1 \ge \frac{1}{n}$. Αλλά η αρμονική σειρά αποκλίνει, άρα από κριτήριο σύγκρισης, η αρχική σειρά αποκλίνει.

(6) Παρατηρούμε ότι
$$\lim \frac{1-e^{-1/n}}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1.$$
Η αρμονική σειρά αποκλίνει, άρα από οριακό σύγκρισης, η αρχική σειρά αποκλίνει.

(7) Παρατηρούμε ότι
$$\lim \frac{1}{n\ln(1+1/n)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$
Άρα η ακολουθία
$$\frac{1}{n\ln(1+1/n)}$$
δεν είναι μηδενική. Επομένως η σειρά δεν συγκλίνει, συνεπώς αποκλίνει αφού αποτελείται από θετικούς όρους.

□

**Άσκηση 3.** Έστω $a_n$ μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ συγκλίνει για κάθε $p \ge 1$.

*Λύση.* Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η $a_n$ είναι μηδενική, άρα υπάρχει $n_0$ τέτοιο ώστε $a_n < 1$ για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως για κάθε $n \ge n_0$ έχουμε $a_n^p \le a_n$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

**Άσκηση 4.** Έστω $a_n$ ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.

*Λύση.* Έχουμε $\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, άρα από κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει. Αντίστροφα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει τότε $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$, επομένως υπάρχει $n_0$ τέτοιο ώστε $\frac{a_n}{1+a_n} < \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n < \frac{2a_n}{1+a_n}$ (γιατί;) και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

**Άσκηση 5.** Έστω $a_n$, $b_n$ ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

*Λύση.* Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η ακολουθία $a_n$ είναι μηδενική, άρα φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $b_n \leq M$ για κάθε $n$. Άρα $a_n b_n \leq M a_n$ για κάθε $n$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

**Άσκηση 6.** Έστω $a_n$, $b_n$ ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

*Λύση.* Έχουμε ότι $(x-y)^2 \geq 0$, άρα $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Ιδιαίτερα, $a_n b_n \leq \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{1}{2}b_n^2$ για κάθε $n$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □