

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ II

10ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Δείξτε ότι το A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν είναι ένωση ανοιχτών δίσκων.

Λύση. Αν το A είναι ένωση ανοιχτών δίσκων τότε είναι ανοιχτό σαν ένωση ανοιχτών συνόλων. Αντίστροφα, αν το A είναι ανοιχτό, τότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $r_x > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r_x) \subset A$. Άρα $A = \bigcup_{x \in A} D(x, r_x)$. $\square$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι κάθε ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (με τη συνηθισμένη μετρική) είναι ένωση κλειστών δίσκων.

Λύση. Από την προηγούμενη άσκηση, κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση ανοιχτών δίσκων, άρα αρκεί να δείξουμε ότι στο $\mathbb{R}^n$ κάθε ανοιχτός δίσκος είναι ένωση κλειστών δίσκων. Αυτό είναι αλήθεια γιατί

$$D(x, r) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ y \in \mathbb{R}^n : d_2(x, y) \leq r - \frac{1}{k} \right\}.$$

$\square$

Άσκηση 3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A, B \subset X$. Δείξτε ότι

- (1) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
- (2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
- (3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Λύση.

- (1) Αν $x \in \overline{A}$ τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \rightarrow x$. Αλλά $x_n \in B$ αφού $A \subset B$, άρα $x \in \overline{B}$.
- (2) Έχουμε ότι $A \subset A \cup B$ και $B \subset A \cup B$, άρα από το (1), $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ και $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Συνεπώς $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Επίσης, $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, άρα, πάλι από το (1), $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{A \cup B}$.
- (3) Όπως στο (2), έχουμε $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ και $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, άρα $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

$\square$

Άσκηση 4. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική, βρείτε δυο σύνολα A, B τέτοια ώστε $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ και μια οικογένεια συνόλων $A_n, n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$.

Λύση. Θέτουμε $A = (0, 1), B = (1, 2), A_n = [1/n, 1]$. Τότε $\overline{A \cap B} = \emptyset, \overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}, \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} = (0, 1], \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = [0, 1]$. $\square$

Άσκηση 5. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$ τέτοιο ώστε $\overline{A} = X$. Δείξτε ότι $A \cap G \neq \emptyset$ για κάθε μη κενό ανοιχτό σύνολο G .

Λύση. Αφού το G είναι μη κενό, υπάρχει $x \in G$. Αφού το G είναι ανοιχτό υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(x, r) \subset G$. Αλλά $x \in \overline{A}$, άρα $D(x, r) \cap A \neq \emptyset$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $A \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Άσκηση 6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$ τέτοιο ώστε $\overline{A} = X$. Δείξτε ότι $\overline{A \cap G} = \overline{G}$ για κάθε $G \subset X$ ανοιχτό.

Λύση. Άρκεί να δείξουμε ότι $\overline{G} \subset \overline{A \cap G}$. Έστω $x \in \overline{G}$ και $\varepsilon > 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι το $D(x, \varepsilon)$ τέμνει το σύνολο $A \cap G$. Αφού $x \in \overline{G}$, έχουμε ότι $D(x, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$. Έτσι το σύνολο αυτό είναι ανοιχτό και μη κενό, άρα από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $A \cap D(x, \varepsilon) \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Άσκηση 7. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $A \subset X, x \in X$. Θέτουμε

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y)$$

(η «απόσταση» του x από το A). Δείξτε ότι $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d_A(x) = 0$.

Λύση. Έστω $x \in \overline{A}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$. Επομένως $d_A(x) \leq d(x, x_n) \rightarrow 0$, άρα $d_A(x) = 0$. Αντίστροφα, αν $d_A(x) = 0$ τότε $\inf_{y \in A} d(x, y) = 0$, άρα από τις ιδιότητες του infimum, υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $d(x_n, x) < 1/n \rightarrow 0$. Δηλαδή $x_n \rightarrow x$. Επομένως $x \in \overline{A}$. $\square$

Άσκηση 8. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Με το συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης, για κάθε $\varepsilon > 0$ θέτουμε

$$\Delta(A, \varepsilon) = \{x \in X : d_A(x) < \varepsilon\}.$$

(η « ε -περιοχή» του A). Δείξτε ότι το $\Delta(A, \varepsilon)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Λύση. Έχουμε

$$x \in \Delta(A, \varepsilon) \Leftrightarrow d_A(x) < \varepsilon \Leftrightarrow \inf_{y \in A} d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow \exists y \in A : d(x, y) < \varepsilon \Leftrightarrow \exists y \in A : x \in D(y, \varepsilon) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{y \in A} D(y, \varepsilon).$$

Επομένως

$$\Delta(A, \varepsilon) = \bigcup_{y \in A} D(y, \varepsilon).$$

Άρα το $\Delta(A, \varepsilon)$ είναι ανοιχτό σαν ένωση ανοιχτών συνόλων. $\square$

Άσκηση 9. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $F \subset X$ κλειστό. Δείξτε ότι το F είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών συνόλων.

Λύση. Ισχυριζόμαστε ότι $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(F, 1/n)$ (με το συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης). Πράγματι, έχουμε προφανώς $F \subset \Delta(F, 1/n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(F, 1/n)$. Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(F, 1/n)$. Τότε

$$\begin{aligned} x \in \Delta(F, 1/n) \quad \forall n \in \mathbb{N} &\Rightarrow d_F(x) < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \inf_{y \in F} d(x, y) < 1/n \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in F : d(x, x_n) < 1/n \Rightarrow x_n \rightarrow x. \end{aligned}$$

Αλλά το F είναι κλειστό, άρα $x \in F$. Επομένως $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta(F, 1/n) \subset F$. $\square$