ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ II

11ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $A \subset X$. Δείξτε ότι:

(1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, $(A^\circ)^\circ = A^\circ$, $(A')' \subset A'$.
(2) $\overline{A} = A \cup \partial A$.
(3) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A' \subset A$.
(4) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $\partial A \subset A$.
(5) $X = A^\circ \cup \partial A \cup (X \setminus \overline{A})$.

Λύση.

(1) Το $\overline{A}$ είναι κλειστό και το A° είναι ανοιχτό, άρα $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ και $(A^\circ)^\circ = A^\circ$. Επίσης, το A' είναι κλειστό, άρα $\overline{A'} = A'$. Αλλά $\overline{A'} = A' \cup (A')'$, επομένως $(A')' \subset A'$.
(2) Έχουμε
$$A \cup \partial A = A \cup (\overline{A} \setminus A^\circ) = A \cup (\overline{A} \cap (X \setminus A^\circ)) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup (X \setminus A^\circ)) = \overline{A} \cap X = \overline{A}.$$
(3) Έστω A κλειστό, τότε $A = \overline{A}$. Αλλά $A' \subset \overline{A}$. Άρα $A' \subset A$. Αντίστροφα, έστω ότι $A' \subset A$. Τότε $\overline{A} = A \cup A' = A$, άρα A κλειστό.
(4) Έστω A κλειστό, τότε $A = \overline{A}$. Αλλά $\partial A \subset \overline{A}$, άρα $\partial A \subset A$. Αντίστροφα, έστω ότι $\partial A \subset A$. Από το (2) έχουμε ότι $\overline{A} = A \cup \partial A = A$, άρα A κλειστό.
(5) Έχουμε
$$\begin{aligned} A^\circ \cup \partial A \cup (X \setminus \overline{A}) &= A^\circ \cup (\overline{A} \cap (X \setminus A^\circ)) \cup (X \setminus \overline{A}) = [(A^\circ \cup \overline{A}) \cap (A^\circ \cup (X \setminus A^\circ))] \cup (X \setminus \overline{A}) \\ &= (\overline{A} \cap X) \cup (X \setminus \overline{A}) = \overline{A} \cup (X \setminus \overline{A}) = X. \end{aligned}$$
Παρατηρήστε ότι τα A°, ∂A και $X \setminus \overline{A}$ είναι ανά δύο ξένα.

□

Άσκηση 2. Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική (χωρίς αποδείξεις):

(1) Βρείτε δυο σύνολα A, B τέτοια ώστε $(A \cup B)^\circ \neq A^\circ \cup B^\circ$.
$([0,1] \cup [1,2])^\circ = [0,2]^\circ = (0,2)$
$[0,1]^\circ \cup [1,2]^\circ = (0,1) \cup (1,2) \neq (0,2)$.

(2) Βρείτε δυο σύνολα A, B τέτοια ώστε $\left(\overline{A}\right)^\circ \neq A$, $\overline{B^\circ} \neq B$.
$\left(\overline{[0,1]}\right)^\circ = [0,1]^\circ = (0,1) \neq [0,1]$.
$\overline{(0,1)^\circ} = \overline{(0,1)} = [0,1] \neq (0,1)$.

(3) Βρείτε δυο σύνολα A, B τέτοια ώστε $\partial(A \cup B) \neq \partial A \cup \partial B$.
$\partial([0,1] \cup [1,2]) = \partial[0,2] = \{0,2\}$
$\partial[0,1] \cup \partial[1,2] = \{0,1\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\} \neq \{0,2\}$.

(4) Βρείτε ένα σύνολο A τέτοιο ώστε το A' να είναι άπειρο αριθμήσιμο.
$\{n + 1/m : n, m \in \mathbb{N}\}' = \mathbb{N}$.

(5) Βρείτε ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $(A')' \neq A'$.
$(\{1/n : n \in \mathbb{N}\}')' = \{0\}' = \emptyset \neq \{0\}$.

Άσκηση 3. Για τα παρακάτω σύνολα A στο $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη μετρική, εξετάστε αν είναι ανοιχτά ή κλειστά ή τίποτα από τα δυο, και βρείτε τα $\overline{A}$, A°, ∂A και A' (χωρίς αποδείξεις):

(1) $A = \{(x, y) : x > 0\}$:
ανοιχτό, όχι κλειστό, $\overline{A} = \{(x, y) : x \geq 0\}$, $A^\circ = A$,
$\partial A = \{(x, y) : x = 0\}$, $A' = \overline{A}$.

(2) $A = \{(x, y) : x \geq 0\}$:
όχι ανοιχτό, κλειστό, $\overline{A} = A$, $A^\circ = \{(x, y) : x > 0\}$,
$\partial A = \{(x, y) : x = 0\}$, $A' = A$.

(3) $A = \{(n,0) : n \in \mathbb{N}\}$:
κλειστό, όχι ανοιχτό, $\overline{A} = A$, $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = A$, $A' = \emptyset$.

(4) $A = \{(1/n,0) : n \in \mathbb{N}\}$:
όχι ανοιχτό, όχι κλειστό, $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$, $A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \overline{A}$,
$A' = \{(0,0)\}$.

(5) $A = \{(1/n,1/m) : n,m \in \mathbb{N}\}$:
όχι ανοιχτό, όχι κλειστό,
$\overline{A} = A \cup \{(1/n,0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,1/n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$,
$A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \overline{A}$,
$A' = \{(1/n,0) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,1/n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0,0)\}$.

(6) $A = \mathbb{Q} \times \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$:
όχι ανοιχτό, όχι κλειστό, $\overline{A} = \mathbb{R} \times (\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\})$,
$A^\circ = \emptyset$, $\partial A = \overline{A}$, $A' = \overline{A}$.

Άσκηση 4. Έστω (X,d) μετρικός χώρος και x_n μια ακολουθία στο X με την ιδιότητα $d(x_n,x_m) = 1$ για κάθε $n,m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$. Θέτουμε $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι $A' = \emptyset$, και άρα το A είναι κλειστό.

Λύση. Για οποιοδήποτε $x \in X$, το $D(x,1/4) \cap A$ δεν μπορεί να είναι άπειρο. Πράγματι αν ήταν, θα υπήρχαν τουλάχιστο δυό διαφορετικά $x_n, x_m \in D(x,1/4)$. Αλλά τότε θα είχαμε

$$1 = d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

άτοπο. Άρα $A' = \emptyset$. Επομένως $\overline{A} = A \cup A' = A$, δηλαδή το A είναι κλειστό. □

Άσκηση 5. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $A \subset X$. Δείξτε ότι:

(1) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.
(2) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.
(3) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Λύση.

(1) Το $X \setminus A^\circ$ είναι κλειστό υπερσύνολο του $X \setminus A$, άρα $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus A^\circ$. Έστω τώρα $x \in X \setminus A^\circ$. Τότε $x \notin A^\circ$, άρα για κάθε $r > 0$ έχουμε $D(x,r) \not\subset A$, δηλαδή $D(x,r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Επομένως $x \in \overline{X \setminus A}$.
(2) Εφαρμόζουμε το (1) με το $X \setminus A$ στη θέση του A.
(3) Έχουμε

$$\begin{aligned}\partial(X \setminus A) &= \overline{X \setminus A} \setminus (X \setminus A)^\circ = \overline{X \setminus A} \cap (X \setminus (X \setminus A)^\circ) = (X \setminus A^\circ) \cap (X \setminus (X \setminus \overline{A})) \\ &= (X \setminus A^\circ) \cap \overline{A} = \overline{A} \setminus A^\circ = \partial A.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 6. Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $A \subset X$. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}x \in \partial A &\Leftrightarrow \text{κάθε περιοχή του } x \text{ τέμνει και το } A \text{ και το } X \setminus A \\ &\Leftrightarrow \exists x_n \in A,\ \exists y_n \in X \setminus A : x_n \to x \ \&\ y_n \to x.\end{aligned}$$

Λύση.

$$\begin{aligned}x \in \partial A &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \setminus A^\circ = \overline{A} \cap (X \setminus A^\circ) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \ \&\ x \in \overline{X \setminus A} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\ D(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \ \&\ D(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \\ \\ \exists x_n \in A,\ \exists y_n \in X \setminus A : x_n \to x \ \&\ y_n \to x \end{cases}\end{aligned}$$

□