ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n}.$$

Λύση. Έχουμε

$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\sin^2 \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Άρα, από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ οι άλλες δυο συγκλίνουν. Στην άσκηση αυτή, η ιδέα για την επιλογή των ακολουθιών $1/n$ και $1/n^2$ στο οριακό κριτήριο σύγκρισης είναι ότι για πολύ μικρά x, το $\sin x$ είναι περίπου ίσο με x. Έτσι, στην πρώτη σειρά για παράδειγμα, όταν το n είναι πολύ μεγάλο, το $\sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ είναι περίπου ίσο με $\frac{1}{\sqrt{n}}$. □

Άσκηση 2. Έστω a_n μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{a_n^n} = a_n \to 0 < 1$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο ρίζας. □

Άσκηση 3. Έστω $p > 0$. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{pn}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^p n}{n}\right)^n.$$

Λύση. Έχουμε

$$\lim \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = \lim \frac{1}{n^p} = \lim \frac{\log^p n}{n} = 0.$$

Άρα, από την προηγούμενη άσκηση, οι σειρές συγκλίνουν. □

Άσκηση 4. Έστω a_n μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία a_{k_n} τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

Λύση. Αφού $a_n \to 0$ υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ τέτοια ώστε $a_{k_n} < \dfrac{1}{n^2}$. Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει. □

Άσκηση 5. Έστω a_n μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Έστω τώρα a_{k_n} μια υπακολουθία της a_n. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.

Λύση. Έστω s_n και t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ αντίστοιχα. Τότε

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} a_{k_j} \leq \sum_{j=1}^{k_n} a_j = s_{k_n}.$$

Παρατηρήστε ότι η προηγούμενη ανισότητα, γενικά, δεν θα ήταν σωστή αν οι όροι της a_n είχαν αυθαίρετα πρόσημα. Αφού τώρα η σειρά συγκλίνει, η s_n είναι φραγμένη, άρα και η s_{k_n} είναι φραγμένη. Επομένως η t_n είναι φραγμένη, συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει. □

Άσκηση 6. Έστω a_n φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι:

(1) $na_n \to 0$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ συγκλίνει.

Λύση.

(1) Θέτουμε $b_n = na_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι $b_{2n} \to 0$ και $b_{2n+1} \to 0$. Έχουμε

$$b_{2n} = 2na_{2n} = 2(\underbrace{a_{2n} + \cdots + a_{2n}}_{n \text{ φορές}}) \leq 2(a_{2n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n+1}) = 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Αλλά $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ διότι η σειρά συγκλίνει (η ουρά μιας συγκλίνουσας σειράς τείνει στο 0). Άρα $b_{2n} \to 0$. Επίσης,

$$b_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} 2na_{2n} = \frac{2n+1}{2n} b_{2n} \to 0.$$

(2) Έστω s_n και t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= a_1 - a_2 \\ 2(a_2 - a_3) &= (a_2 - a_3) + (a_2 - a_3) \\ &\ \cdots \\ n(a_n - a_{n+1}) &= (a_n - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+1}) + \cdots + (a_n - a_{n+1}). \end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned} t_n &= (a_1 - a_{n+1}) + (a_2 - a_{n+1}) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+1}) \\ &= s_n - na_{n+1} = s_n - \frac{n}{n+1}(n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Αλλά η s_n συγκλίνει, $\frac{n}{n+1} \to 1$, και $(n+1)a_{n+1} \to 0$ από το (1). Άρα η t_n συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο με την s_n.

□

Άσκηση 7. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Δείξτε ότι

$$1 + \ln\frac{n+1}{2} \leq s_n \leq 1 + \ln n,$$

και συμπεράνετε ότι $\lim \frac{s_n}{\ln n} = 1$.

Λύση. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [k, k+1]$ έχουμε $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$. Ολοκληρώνοντας την ανισότητα ως προς x πάνω στο $[k, k+1]$ παίρνουμε

$$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

Άρα για κάθε $k \geq 2$ έχουμε

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x}.$$

Αθροίζοντας για k από 2 ως n παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow \int_{2}^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow 1 + \int_{2}^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x} \\
&\Rightarrow 1 + \ln \frac{n+1}{2} \leq s_n \leq 1 + \ln n.
\end{aligned}$$

Διαιρώντας την προηγούμενη ανισότητα με $\ln n$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{\ln 2}{\ln n} \leq \frac{s_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο. Η άσκηση αυτή λέει ότι η αρμονική σειρά τείνει στο άπειρο «τόσο γρήγορα» όσο και ο λογάριθμος. Παρά ταύτα, το n πρέπει να γίνει πάρα πολύ μεγάλο για να μπορέσουμε να πούμε ότι το s_n είναι «περίπου ίσο» με το $\ln n$. Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, έδωσε:

$$s_{10^9} = \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n} \cong 21.3005, \quad \ln 10^9 \cong 20.7233.$$

□