

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Λύση. Η ακολουθία $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ είναι φθίνουσα, άρα από κριτήριο συμπίκνωσης, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln 2^n)^{\ln 2^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n \ln 2)^{n \ln 2}}$$

συγκλίνει. Αλλά

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n \ln 2)^{n \ln 2}}} = \frac{2}{(n \ln 2)^{\ln 2}} \rightarrow 0 < 1.$$

Επομένως, από κριτήριο ρίζας, η σειρά συγκλίνει. $\square$

Άσκηση 2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+c)^a(n+d)^b}, a, b, c, d > 0.$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου a_n είναι η ακολουθία $\left(1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right).$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, όπου a_n είναι η ακολουθία $\left(1, -1, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3^2}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{4^2}, -\frac{1}{4}, \dots\right).$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$

Λύση.

(1) Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ είναι φραγμένη. Η ακολουθία $\frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}$ είναι φθίνουσα και μηδενική. Άρα από κριτήριο Dirichlet, η σειρά συγκλίνει. Τώρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}.$$

Αλλά

$$\frac{\frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}}{\frac{1}{n^{a+b}}} = \frac{1}{(1+c/n)^a(1+d/n)^b} \rightarrow 1.$$

Άρα από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}}$ συγκλίνει, δηλαδή, αν και μόνο αν $a+b > 1$. Επομένως η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν $a+b > 1$.

(2) Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n$ είναι φραγμένη. Η ακολουθία $\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, είναι φθίνουσα και μηδενική. Άρα από κριτήριο Dirichlet, η σειρά συγκλίνει. Τώρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \ln n} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Αλλά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Άρα από κριτήριο συμπίκνωσης, η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

(3) Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Τότε

$$s_{2n} = (1 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Επίσης

$$s_{2n+1} = (1 - 1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και μάλιστα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Dirichlet, αυτό όμως δεν θα έδινε την τιμή του ορίου της σειράς. Έστω τώρα t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Τότε

$$t_{2n} = (1 + 1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \text{ (αρμονική)}.$$

Άρα $t_{2n} \rightarrow +\infty$, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

(4) Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Τότε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (1 - 1) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{n^2} = -\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Αλλά η ακολουθία $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$, $n \geq 2$, συγκλίνει διότι η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Άρα η s_{2n} συγκλίνει.

Επίσης

$$s_{2n+1} = (1 - 1) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{(n+1)^2} = s_{2n} + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Αλλά η s_{2n} συγκλίνει και $\frac{n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$. Άρα η s_{2n+1} συγκλίνει στο ίδιο όριο με την s_{2n} . Επομένως η σειρά συγκλίνει.

Έστω τώρα t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Τότε

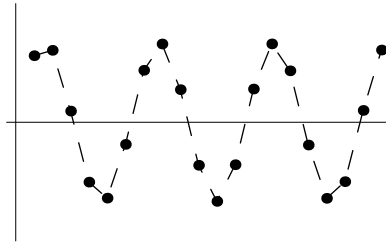
$$\begin{aligned} t_{2n} &= (1 + 1) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \text{ (αρμονική)}.$$

Άρα $t_{2n} \rightarrow +\infty$, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

- (5) Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, όπου $a_n = \sin n$, $b_n = \frac{1}{n}$. Στο σχήμα φαίνονται οι 20 πρώτοι όροι της a_n . Παρά τη φαινομενική συμμετρία, η ακολουθία δεν είναι περιοδική (στην πραγματικότητα είναι 1-1).



Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε

$$s_n = \sum_{k=1}^n \sin k = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^n \cos k + i \sum_{k=1}^n \sin k \right] = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^n (\cos k + i \sin k) \right] = \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^n e^{ik} \right] = \operatorname{Im} \frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}.$$

($\operatorname{Im}(x + iy)$ είναι το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $x + iy$. Επίσης χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $e^{it} = \cos t + i \sin t$, $t \in \mathbb{R}$). Άρα

$$|s_n| \leq \left| \frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}.$$

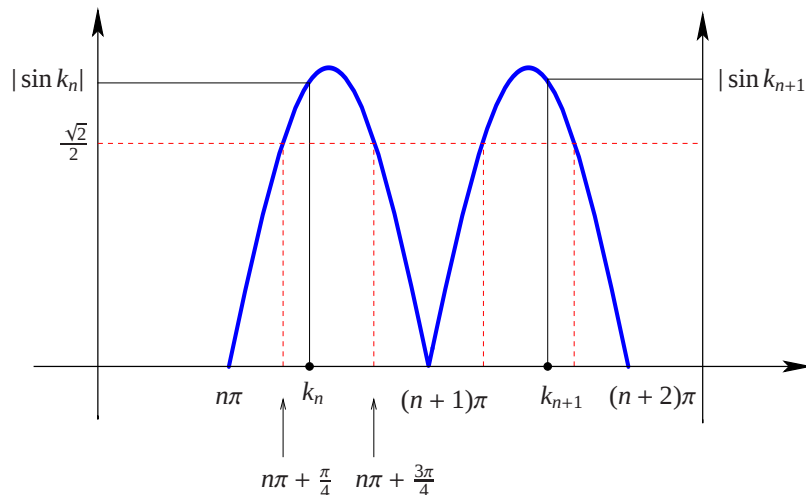
Επομένως η s_n είναι φραγμένη. Αλλά η b_n είναι φθίνουσα και μηδενική, άρα από κριτήριο Dirichlet, η σειρά συγκλίνει.

Έστω τώρα t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$. Θεωρούμε τα ζένα ανά δύο διαστήματα

$$\left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4} \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$|\sin t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ για κάθε } t \in \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4} \right].$$



Επίσης, το μήκος κάθε διαστήματος είναι $\pi/2 > 1$, άρα υπάρχουν φυσικοί αριθμοί

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$$

τέτοιοι ώστε

$$k_n \in \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4} \right] \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

διότι σε ένα κλειστό διάστημα μήκους τουλάχιστο 1 υπάρχει τουλάχιστο ένας ακέραιος αριθμός. Επομένως

$$t_{k_n} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{|\sin j|}{j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{|\sin k_j|}{k_j} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{k_j} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j\pi + \frac{3\pi}{4}} \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Αλλά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = +\infty \text{ (αρμονική).}$$

Άρα $t_{k_n} \rightarrow +\infty$, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα. □

Άσκηση 3. Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^n a_n b_n$ συγκλίνει για

κάθε φραγμένη ακολουθία b_n . Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

Λύση. Θέτουμε

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_n > 0 \\ 0 & \text{αν } a_n = 0 \\ -1 & \text{αν } a_n < 0 \end{cases}.$$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ η οποία συγκλίνει διότι η b_n είναι φραγμένη. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα. □

Άσκηση 4. Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια συγκλίνουσα σειρά, και b_n μια φθίνουσα και συγκλίνουσα ακολουθία. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.

Λύση. Θέτουμε $b = \lim b_n$. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, και t_n η ακολουθία

των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η s_n συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη.

Επίσης, η ακολουθία $b_n - b$ είναι φθίνουσα και μηδενική, άρα από κριτήριο Dirichlet, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ συγκλίνει, δηλαδή η t_n συγκλίνει. Αλλά

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k(b_k - b) + b \sum_{k=1}^n a_k = t_n + b s_n.$$

Αφού οι s_n και t_n συγκλίνουν, η ακολουθία $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ συγκλίνει καθώς $n \rightarrow \infty$. Επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. □

Άσκηση 5. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Θέτουμε $A = \{n : a_n < 0\}$ και $B = \{n : a_n > 0\}$. Δείξτε ότι τα σύνολα A και B είναι άπειρα.

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι το A είναι πεπερασμένο. Θέτουμε $n_0 = \max A$. Τότε $a_n \geq 0$ για κάθε $n > n_0$. Επομένως

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα, άτοπο. Ομοίως δείχνουμε ότι το B δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο. □