

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ II

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Είναι αλήθεια ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ συγκλίνουν;

Λύση. Όχι. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει, αλλά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} = -\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty.$$

Είναι αλήθεια αν οι όροι της σειράς έχουν τελικά σταθερό πρόσημο (άσκηση 5 του 2ου φυλλάδιου). $\square$

Άσκηση 2. Είναι αλήθεια ότι αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει;

Λύση. Ναι. Έστω

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1}, \quad t_n = \sum_{k=1}^n a_{2k}, \quad u_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Θέτουμε $s = \lim s_n$ και $t = \lim t_n$. Τότε

$$u_{2n} = s_n + t_n \rightarrow s + t, \quad u_{2n-1} = s_n + t_{n-1} \rightarrow s + t.$$

Άρα η u_n συγκλίνει. $\square$

Άσκηση 3. Είναι δυνατό μια αποκλίνουσα σειρά θετικών αριθμών να έχει συγκλίνουσα αναδιάταξη;

Λύση. Όχι. Αν υπήρχε συγκλίνουσα αναδιάταξη, τότε η αρχική σειρά θα ήταν αναδιάταξη μιας συγκλίνουσας σειράς θετικών αριθμών επομένως θα συνέκλινε. $\square$

Άσκηση 4. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Θέτουμε

$$A = \{n : a_n \geq 0\} = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\}, \quad B = \{n : a_n < 0\} = \{l_1 < l_2 < \dots < l_n < \dots\}.$$

Τα σύνολα αυτά είναι άπειρα από την άσκηση 5 του 3ου φυλλάδιου. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{l_n}$ αποκλίνουν.

Λύση. Θέτουμε

$$b_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \quad c_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n), \quad s_n = \sum_{j=1}^n b_j, \quad t_n = \sum_{j=1}^n c_j.$$

Τότε

$$s_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |a_j| + \sum_{j=1}^n a_j \right) \rightarrow +\infty, \quad t_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n |a_j| - \sum_{j=1}^n a_j \right) \rightarrow +\infty.$$

Επομένως

$$\sum_{j=1}^n a_{k_j} = s_{k_n} \rightarrow +\infty, \quad \sum_{j=1}^n a_{l_j} = -t_{l_n} \rightarrow -\infty.$$

$\square$

Άσκηση 5. Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι έχει αποκλίνουσα αναδιάταξη.

Λύση. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό της προηγούμενης άσκησης, έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = +\infty$. Επομένως υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_{n_1}} > 1 - a_{l_1}.$$

Ομοίως, αφού $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_{k_n} = +\infty$, υπάρχει $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε

$$a_{k_{n_1+1}} + a_{k_{n_1+2}} + \dots + a_{k_{n_2}} > 1 - a_{l_2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε $n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ τέτοια ώστε

$$a_{k_{n_{j-1}+1}} + a_{k_{n_{j-1}+2}} + \dots + a_{k_{n_j}} > 1 - a_{l_j}.$$

Συνεπώς η αναδιάταξη

$$(a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_{n_1}} + a_{l_1}) + (a_{k_{n_1+1}} + a_{k_{n_1+2}} + \dots + a_{k_{n_2}} + a_{l_2}) + \dots + (a_{k_{n_{j-1}+1}} + a_{k_{n_{j-1}+2}} + \dots + a_{k_{n_j}} + a_{l_j}) + \dots$$

αποκλίνει (κάθε παρένθεση είναι μεγαλύτερη από 1). $\square$

Άσκηση 6.

- (1) Δείξτε ότι $\lim_n \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$.
 (2) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Λύση.

- (1) Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = n, \dots, 2n$ έχουμε

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x-1}.$$

Άρα

$$\int_n^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{2n+1} \frac{dx}{x-1}.$$

Επομένως

$$\ln \frac{2n+1}{n} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln \frac{2n}{n-1}.$$

Παίρνοντας όρια ως προς n έχουμε το ζητούμενο.

- (2) Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς. Τότε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \rightarrow \ln 2. \end{aligned}$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι η s_n συγκλίνει. Επομένως, κατ' ανάγκη, $s_n \rightarrow \ln 2$. $\square$