

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ II

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:

(1) $f_n(t) = \frac{t}{1+nt}, t \geq 0.$

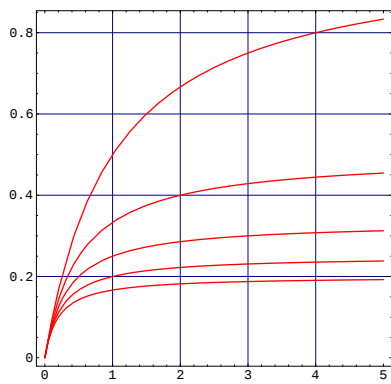
(2) $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}, t > 0.$

(3) $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}, t \geq \varepsilon_0,$ όπου ε_0 σταθερός θετικός αριθμός.

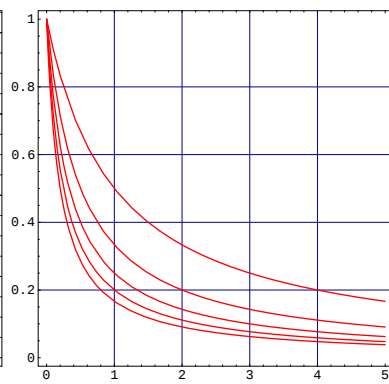
(4) $f_n(t) = \frac{t}{t+n}, t \geq 0.$

(5) $f_n(t) = \frac{n}{t+n}, t \geq 0.$

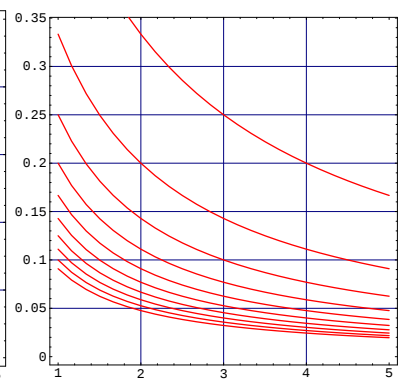
(6) $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}, t \in \mathbb{R}.$



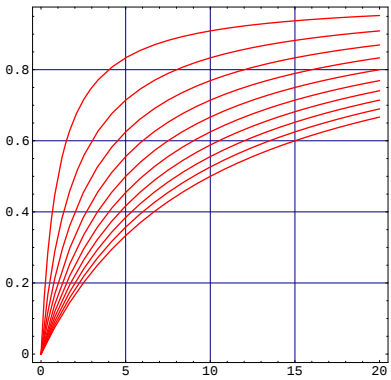
(α) $f_n(t) = \frac{t}{1+nt}$



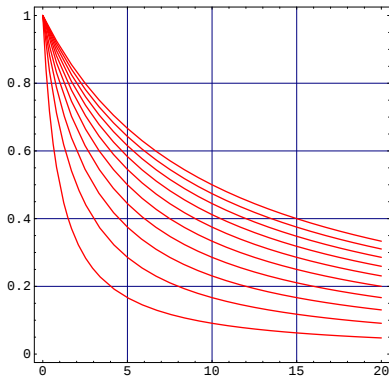
(β) $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$



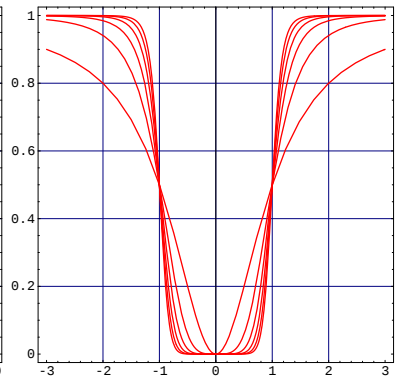
(γ) $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}, \varepsilon_0 = 1$



(δ) $f_n(t) = \frac{t}{t+n}$



(ε) $f_n(t) = \frac{n}{t+n}$



(ϛ) $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$

Λύση.

(1) Για κάθε n η συνάρτηση f_n είναι αύξουσα, άρα

$$\rho(f_n, 0) = \sup_{t \geq 0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t \geq 0} \frac{t}{1+nt} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{1+nt} = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Επομένως η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα, και άρα κατά σημείο, στη μηδενική συνάρτηση.

(2) Για κάθε $t > 0$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο. Επίσης, για κάθε n η f_n είναι φθίνουσα, άρα

$$\rho(f_n, 0) = \sup_{t > 0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t > 0} \frac{1}{1+nt} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+nt} = 1 \not\rightarrow 0.$$

Επομένως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(3) Αφού η f_n είναι φθίνουσα έχουμε

$$\sup_{t \geq \varepsilon_0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t \geq \varepsilon_0} \frac{1}{1 + nt} = \frac{1}{1 + n\varepsilon_0} \rightarrow 0, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Επομένως η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα, και άρα κατά σημείο, στη μηδενική συνάρτηση.

(4) Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$, άρα $f_n \rightarrow 0$ κατά σημείο. Επίσης, για κάθε n η f_n είναι αύξουσα, άρα

$$\sup_{t \geq 0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t \geq 0} \frac{t}{t + n} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{t + n} = 1.$$

Δηλαδή $\sup_{t \geq 0} |f_n(t) - 0| \rightarrow 0$, επομένως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(5) Έχουμε $f_n(t) = 1 - \frac{t}{t + n}$, άρα από το προηγούμενο ερώτημα, η f_n συγκλίνει κατά σημείο, και όχι ομοιόμορφα, στη σταθερή συνάρτηση 1.

(6) Αν $|t| > 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} t^{2n} = +\infty$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t^{2n} + 1} = 0$.

Αν $|t| < 1$ τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} t^{2n} = 0$, άρα $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 1$.

Αν $|t| = 1$ τότε $t^{2n} = 1$ άρα $f_n(t) = 1/2$.

Επομένως η f_n συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1 \\ 1, & |t| > 1 \\ 1/2, & |t| = 1 \end{cases}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς και η f ασυνεχής, η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

□

Άσκηση 2. Έστω $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς, τέτοιες ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα. Έστω επίσης x_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \rightarrow x$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$.

Λύση. Αφού f_n συνεχείς και $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι η f είναι συνεχής και ότι

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \rightarrow 0.$$

Αφού f συνεχής, έχουμε $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Άρα

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| + |f(x_n) - f(x)| \rightarrow 0.$$

□

Άσκηση 3. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Θετούμε $f_n(x) = f(x + 1/n)$. Δείξτε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού f ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|(x + 1/n) - x| < \delta$ και άρα $|f(x + 1/n) - f(x)| < \varepsilon$. Συνεπώς $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, επομένως $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα.

□

Άσκηση 4. Θετούμε $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$, και έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι $f_n g \rightarrow 0$ ομοιόμορφα.

Λύση. Η g είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, άρα φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει $M > 1$ τέτοιο ώστε $|g(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι συνεχής και $g(1) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|g(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (1 - \delta, 1]$. Παρατηρούμε ότι $(1 - \delta)^n \rightarrow 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(1 - \delta)^n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι, γι'αυτά τα n έχουμε ότι:

Αν $t \in [0, 1 - \delta]$ τότε $|f_n(t)g(t)| \leq M(1 - \delta)^n < M\varepsilon$.

Αν $t \in (1 - \delta, 1]$ τότε $|f_n(t)g(t)| < \varepsilon < M\varepsilon$.

Άρα για κάθε $t \in [0, 1]$ και κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|f_n(t)g(t)| < M\varepsilon$. Δηλαδή $\sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)g(t)| \leq M\varepsilon$. Επομένως

$f_n g \rightarrow 0$ ομοιόμορφα.

□

Άσκηση 5. Έστω $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων οι οποίες δεν μηδενίζονται πουθενά. Υποθέτουμε ότι $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq M$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα.

Λύση. Αφού $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\rho(f_n, f) \leq M/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως γι'αυτά τα n και κάθε $x \in I$ έχουμε

$$M \leq |f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \rho(f_n, f) + |f_n(x)| \leq M/2 + |f_n(x)|.$$

Άρα $|f_n(x)| \geq M/2$. Επομένως

$$\left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)||f(x)|} \leq \frac{2\rho(f_n, f)}{M^2}.$$

Παίρνοντας $\sup$ ως προς x έχουμε

$$\rho\left(\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{2\rho(f_n, f)}{M^2} \rightarrow 0.$$

Άρα $\frac{1}{f_n} \rightarrow \frac{1}{f}$ ομοιόμορφα. □

Άσκηση 6. Στην προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι η υπόθεση $|f(x)| \geq M$ ($M > 0$) για κάθε x , είναι απαραίτητη.

Λύση. Θέτουμε $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $x \in (0, 1)$. Τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$. Αλλά

$$\sup_{x \in (0,1)} \left| \frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{n} \sup_{x \in (0,1)} \frac{1}{x\left(x + \frac{1}{n}\right)} = +\infty.$$

□