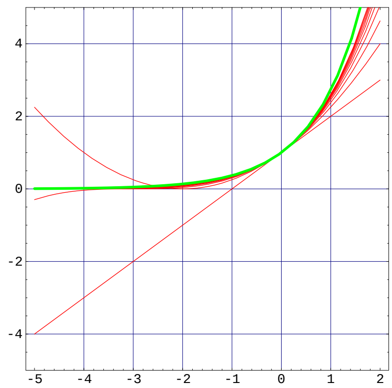
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

6ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Θέτουμε $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε την f_n ως προς την κατά σημείο σύγκλιση σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$, και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στα διαστήματα $(-\infty, a)$ και $(a, +\infty)$, όπου a τυχόντας πραγματικός αριθμός.

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$.



Άρα $f_n \to f$ κατά σημείο (σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$), όπου $f(x) = e^x$. Τώρα

$$\sup_{x>a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>a} \left| \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = \sup_{x>a} \left(e^x \left| 1 - \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x} \right| \right) \geq \lim_{x\to+\infty} \left(e^x \left| 1 - \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}{e^x} \right| \right) = +\infty,$$

διότι $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ έχουμε $\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0$ (εφαρμόζουμε διαδοχικά L' Hôpital, τόσες φορές όσες και ο βαθμός του πολυωνύμου). Άρα $f_n \not\rightrightarrows f$ ομοιόμορφα στο $(a, +\infty)$. Επίσης,

$$\sup_{x<a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x<a} \left| \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| \geq \lim_{x\to-\infty} \left| \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = +\infty,$$

διότι $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ και για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ έχουμε $\lim_{x\to-\infty} |p(x)| = +\infty$. Άρα $f_n \not\rightrightarrows f$ ομοιόμορφα στο $(-\infty, a)$. $\square$

Άσκηση 2. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε η f'' είναι φραγμένη. Θέτουμε $f_n(x) = n(f(x + 1/n) - f(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία f_n.

Λύση. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f''(x)| \leq M$ για κάθε x. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x).$$

Άρα $f_n \to f'$ κατά σημείο. Τώρα, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$f_n(x) = \frac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x + a_{n,x})$$

για κάποιο $0 < a_{n,x} < 1/n$. Πάλι από το θεώρημα μέσης τιμής

$$\frac{f'(x + a_{n,x}) - f'(x)}{a_{n,x}} = f''(x + b_{n,x})$$

για κάποιο $0 < b_{n,x} < a_{n,x}$. Άρα

$$|f_n(x) - f'(x)| = |f'(x + a_{n,x}) - f'(x)| = a_{n,x} |f''(x + b_{n,x})| \leq \frac{M}{n}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε x, επομένως

$$\rho(f_n, f') \leq \frac{M}{n} \to 0.$$

Άρα $f_n \to f'$ ομοιόμορφα. $\square$

Άσκηση 3. Βρείτε μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων f_n τέτοια ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, όπου f παραγωγίσιμη, $f_n' \to g$ κατά σημείο, αλλά $f' \neq g$.

Λύση. Θέτουμε $f_n(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$, $x \in [0,1]$. Τότε

$$\sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

άρα $f_n \to 0 = f$ ομοιόμορφα. Αλλά

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} = g(x).$$

Προφανώς $f' \neq g$. $\square$

Άσκηση 4. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση και a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε θέτουμε $f_{a_n}(x) = f(x+a_n)$. Δείξτε ότι αν για κάθε μηδενική ακολουθία a_n έχουμε $f_{a_n} \to f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Λύση. Από Ανάλυση Ι, για να δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι αν x_n, y_n είναι δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $x_n - y_n \to 0$, τότε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Έχουμε

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |f(x_n) - f(x_n + (y_n - x_n))| \le \rho(f, f_{y_n - x_n}) \to 0,$$

διότι η $y_n - x_n$ είναι μηδενική. $\square$

Άσκηση 5. Έστω $f_n(x) = n^2x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Εξετάστε την f_n ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Λύση. Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Άρα $f_n \to 0$ κατά σημείο. Αν η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη θα είχαμε

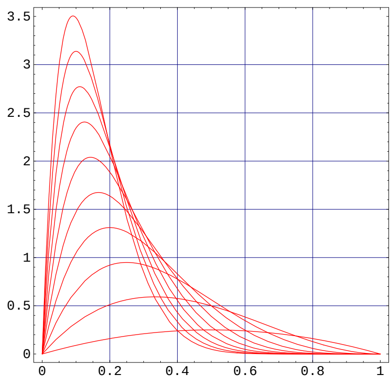
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Αλλά

$$\int_0^1 f_n(x)dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1.$$

Εναλλακτικά, η συνάρτηση $x(1-x)^n$, $0 \le x \le 1$, έχει μέγιστο στο $\dfrac{1}{n+1}$. Επομένως

$$\rho(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} \left(n^2x(1-x)^n \right) = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty.$$



$\square$

Άσκηση 6. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια f. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Λύση. Αφού f_n συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε x. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_{1/n}^{1} f_n(x)dx - \int_0^1 f(x)dx\right| &= \left|\int_{1/n}^{1} f_n(x)dx - \int_{1/n}^{1} f(x)dx - \int_0^{1/n} f(x)dx\right| \\ &\leq \int_{1/n}^{1} |f_n(x) - f(x)|dx + \int_0^{1/n} |f(x)|dx \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\rho(f_n, f) + \frac{1}{n}M \to 0.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων οι οποίες είναι ασυνεχείς σε κάθε σημείο.

Λύση. Θέτουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - 1/n, & x \in \mathbb{Q} \\ \\ f(x) + 1/n, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Οι f_n είναι ασυνεχείς σε κάθε x διότι αν πάρουμε μια ακολουθία ρητών q_k και μια ακολουθία άρρητων α_k τέτοιες ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = x$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} f_n(q_k) = \lim_{k\to\infty}(f(q_k) - 1/n) = f(x) - 1/n$$

και

$$\lim_{k\to\infty} f_n(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty}(f(\alpha_k) + 1/n) = f(x) + 1/n.$$

Επίσης για κάθε x έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |f(x) - 1/n - f(x)|, & x \in \mathbb{Q} \\ \\ |f(x) + 1/n - f(x)|, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = \frac{1}{n}.$$

Άρα $\rho(f_n, f) = 1/n \to 0$. Επομένως $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □