ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ

7ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Αφού ένα πολυώνυμο είναι γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων του x, έχουμε ότι $\int_0^1 P \cdot f = 0$ για κάθε πολυώνυμο P. Από το θεώρημα του Weierstrass, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n στο $[0,1]$ τέτοια ώστε $P_n \to f$ ομοιόμορφα. Επομένως

$$0 \le \int_0^1 f^2 = \int_0^1 f \cdot f = \int_0^1 (f - P_n + P_n) \cdot f = \int_0^1 (f - P_n) \cdot f \le \rho(P_n, f) \int_0^1 |f| \to 0.$$

Επομένως $\int_0^1 f^2 = 0$. Αφού η f είναι συνεχής έχουμε ότι $f^2 = 0$ (αν το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης είναι 0 τότε η συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν). Άρα $f = 0$. □

Άσκηση 2. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

Λύση. Η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 γιατί $\sqrt[n]{n^a} \to 1$, άρα το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1,1)$. Για $x = 1$ η σειρά συγκλίνει αν $a < -1$. Αποκλίνει αν $a \ge -1$. Για $x = -1$ η σειρά συγκλίνει αν $a < 0$ από το κριτήριο Dirichlet. Δεν συγκλίνει αν $a \ge 0$. Παρατηρήστε ότι αν $a < -1$, τότε, από το κριτήριο Weierstrass, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[-1,1]$. □

Άσκηση 3. Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι R. Υπολογίστε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m x^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$, όπου $m \in \mathbb{N}$ σταθερά.

Λύση. Έχουμε

$$\limsup |a_n^m|^{1/n} = \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^m = \frac{1}{R^m}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της πρώτης σειράς είναι R^m. Τώρα

$$|x| < R^{1/m} \Rightarrow |x^m| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{mn}| < \infty$$

και

$$|x| > R^{1/m} \Rightarrow |x^m| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{mn}| = \infty.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δεύτερης σειράς είναι $R^{1/m}$. Αν για τον υπολογισμό της ακτίνας σύγκλισης της δεύτερης σειράς θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό, θα έπρεπε να παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία των συντελεστών της σειράς δεν είναι η a_n, αλλά η ακολουθία

$$b_n = \begin{cases} a_{n/m}, & \text{αν το } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του } m \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

δηλαδή η ακολουθία

$$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots, 0, a_2, 0, \ldots, 0, a_3, 0, \ldots),$$

όπου το a_k εμφανίζεται στην km-θέση. Επομένως η $|b_n|^{1/n}$ είναι η

$$(|a_0|, 0, \ldots, 0, |a_1|^{\frac{1}{m}}, 0, \ldots, 0, |a_2|^{\frac{1}{2m}}, 0, \ldots, 0, |a_3|^{\frac{1}{3m}}, 0, \ldots),$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\limsup |b_n|^{1/n} = \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{1/m}$. □

Άσκηση 4. Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}$ στο $[-a,a]$, $a > 0$. Συγκλίνει η σειρά απόλυτα για κάποιο x;

Λύση. Έχουμε

$$(-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} = (-1)^n \frac{x^2}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} = f_n(x) + a_n.$$

Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από κριτήριο Dirichlet, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα ως σειρά σταθερών συναρτήσεων. Επίσης

$$|f_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^2}.$$

Αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο Weierstrass, η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Επομένως η

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα ως άθροισμα ομοιόμορφα συγκλινουσών σειρών. Απόλυτη σύγκλιση δεν έχουμε σε κανένα σημείο διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

□

Άσκηση 5. Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$, $x > 0$.

Λύση. Η σειρά συγκλίνει κατά σημείο διότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (οριακό κριτήριο σύγκρισης). Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x^2}, \ x > 0.$$

Τότε

$$\rho(s_n, f) = \sup_{x>0} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x^2} \right| = \sup_{x>0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2} \geq \frac{1}{1+\left(\frac{n+1}{n+1}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Παρά ταύτα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα της μορφής $[a, +\infty)$, $a > 0$, από κριτήριο Weierstrass. □

Άσκηση 6. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1+\frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-a, a]$, $a > 0$.

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1+\frac{x}{n}\right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[\cos 1 \cdot \sin\frac{x}{n} + \sin 1 \cdot \cos\frac{x}{n}\right] \\
&= \cos 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \sin\frac{x}{n} + \sin 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[\cos\frac{x}{n} - 1\right] + \sin 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\
&= \cos 1 \cdot f_n(x) + \sin 1 \cdot g_n(x) + \sin 1 \cdot a_n.
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^{3/2}} \leq \frac{a}{n^{3/2}}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Επίσης

$$|g_n(x)| \leq \frac{|x|^2}{n^{5/2}} \leq \frac{a^2}{n^{5/2}}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Τέλος, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από κριτήριο Dirichlet, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα ως σειρά σταθερών συναρτήσεων. Επομένως η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα ως άθροισμα ομοιόμορφα συγκλινουσών σειρών. □