

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ II
8ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Βρείτε ποιές από τις ακόλουθες συναρτήσεις είναι μετρικές στο $\mathbb{R}$.

- (1) $d(x, y) = |x - y|^2$.
- (2) $d(x, y) = |x^2 - y^2|$.
- (3) $d(x, y) = |x - y|^3$.
- (4) $d(x, y) = |x^3 - y^3|$.

Λύση.

- (1) $d(1, -1) = 4 > 2 = d(1, 0) + d(0, -1)$. Η τριγωνική ανισότητα δεν ισχύει, άρα η d δεν είναι μετρική.
- (2) $d(1, -1) = 0$. Η απόσταση δύο διαφορετικών σημείων είναι μηδέν, άρα η d δεν είναι μετρική.
- (3) $d(1, -1) = 8 > 2 = d(1, 0) + d(0, -1)$. Η τριγωνική ανισότητα δεν ισχύει, άρα η d δεν είναι μετρική.
- (4)
 - $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x^3 - y^3| = 0 \Leftrightarrow |x - y|(x^2 + y^2 + xy) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
 - $d(x, y) = d(y, x)$.
 - $d(x, y) = |x^3 - y^3| \leq |x^3 - z^3| + |z^3 - y^3| = d(x, z) + d(z, y)$.

Άρα η d είναι μετρική.

□

Άσκηση 2. Στο $\mathbb{R}^N$ θεωρούμε τις μετρικές

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|,$$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|^2 \right)^{1/2},$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq N} |x(k) - y(k)|.$$

Δείξτε ότι $d_\infty \leq d_1 \leq \sqrt{N} d_2 \leq N d_\infty$. Δηλαδή οι τρεις μετρικές είναι «συγκρίσιμες».

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} d_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq k \leq N} |x(k) - y(k)| \leq \sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)| = d_1(x, y) = \sum_{k=1}^N 1 \cdot |x(k) - y(k)| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^N 1^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{N} d_2(x, y) = \sqrt{N} \left(\sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{N} \left(N \max_{1 \leq k \leq N} |x(k) - y(k)|^2 \right)^{1/2} = N d_\infty(x, y). \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα λέει ότι το maximum N μη αρνητικών αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμά τους. Η δεύτερη ανισότητα είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz. Η τρίτη ανισότητα λέει ότι το άθροισμα N αριθμών είναι μικρότερο ή ίσο από N φορές το maximum.

□

Άσκηση 3. Έστω X σύνολο και d_1, d_2 δυο μετρικές στο X . Θέτουμε $d = d_1 + d_2$. Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

Λύση. Επαληθεύουμε τις τρεις ιδιότητες:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_1(x, y) + d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow d_1(x, y) = 0 \text{ \& } d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) = d_1(y, x) + d_2(y, x) = d(y, x)$.
- $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y) \leq d_1(x, z) + d_1(z, y) + d_2(x, z) + d_2(z, y) = d(x, z) + d(z, y)$.

□

Άσκηση 4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Θέτουμε $\rho(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$. Δείξτε ότι η ρ είναι μετρική.

Λύση. Η ρ προφανώς ικανοποιεί τις ιδιότητες $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ και $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Για να δείξουμε ότι ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, χρησιμοποιούμε το ότι $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ για $a, b \geq 0$.

$$\rho(x, y) = \sqrt{d(x, y)} \leq \sqrt{d(x, z) + d(z, y)} \leq \sqrt{d(x, z)} + \sqrt{d(z, y)} = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Γενικότερα, αν $0 < p \leq 1$, τότε η $(d(x, y))^p$ είναι μετρική. Αυτό προκύπτει από το ότι για $0 < p \leq 1$ και $a, b \geq 0$ έχουμε $(a + b)^p \leq a^p + b^p$. Η ανισότητα αυτή αποδεικνύεται ως εξής. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(t) = (1+t)^p - 1 - t^p$, $t \geq 0$. Τότε $f'(t) = p(1+t)^{p-1} - pt^{p-1} \leq 0$ γιατί $p-1 \leq 0$. Άρα η f είναι φθίνουσα. Επομένως για $b \neq 0$ έχουμε $f(a/b) \leq f(0) = 0$. Δηλαδή

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^p - 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^p \leq 0,$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη με b^p . Αν $b = 0$ τότε η ανισότητα είναι προφανής (έχουμε ισότητα). $\square$

Άσκηση 5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Θέτουμε $\sigma(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$, $x, y \in X$. Δείξτε ότι η σ είναι μετρική.

Λύση. Έχουμε

- $\sigma(x, y) = 0 \Leftrightarrow \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} = 0 \Leftrightarrow \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$.
- Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(t) = \frac{t}{1+t}$, $t \geq 0$, είναι αύξουσα γιατί $f'(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$. Άρα

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)} = f(\rho(x, y)) \leq f(\rho(x, z) + \rho(z, y)) = \frac{\rho(x, z) + \rho(z, y)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \\ &= \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(x, z) + \rho(z, y)} \leq \frac{\rho(x, z)}{1 + \rho(x, z)} + \frac{\rho(z, y)}{1 + \rho(z, y)} \\ &= \sigma(x, z) + \sigma(z, y). \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 6. Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Δηλαδή

$$\mathcal{A} = \{x : x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Για κάθε $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$, θέτουμε

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Δείξτε ότι η d είναι μετρική.

Λύση. Η d είναι καλά ορισμένη διότι για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < +\infty.$$

Τώρα, η $d(x, y)$ είναι μια σειρά μη αρνητικών αριθμών, άρα

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow (\forall n) \left(\frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall n) (x_n = y_n) \Leftrightarrow x = y.$$

Προφανώς $d(x, y) = d(y, x)$. Τέλος, αν f είναι η συνάρτηση της προηγούμενης άσκησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(|x_n - y_n|) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (f(|x_n - z_n|) + f(|z_n - y_n|)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - z_n|}{1 + |x_n - z_n|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|z_n - y_n|}{1 + |z_n - y_n|} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

$\square$

Άσκηση 7. Έστω $C^1([a, b])$ το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $[a, b]$. Δηλαδή

$$C^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ παραγωγίσιμη, } f' \text{ συνεχής}\}.$$

Για κάθε $f, g \in C^1([a, b])$ θέτουμε

$$d(f, g) = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t) - g'(t)|.$$

Εξετάστε αν η d είναι μετρική.

Λύση. Η d είναι καλά ορισμένη διότι οι f', g' είναι συνεχείς, άρα το $\sup$ είναι πεπερασμένο. Αλλά η d δεν είναι μετρική διότι αν θέσουμε $f = 0$, $g = 1$, τότε $d(f, g) = 0$. $\square$

Άσκηση 8. Έστω $\mathcal{R}([-1, 1])$ το σύνολο όλων των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[-1, 1]$. Για κάθε $f, g \in \mathcal{R}([-1, 1])$ θέτουμε

$$d_1(f, g) = \int_{-1}^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Εξετάστε αν η d είναι μετρική.

Λύση. Η d_1 δεν είναι μετρική διότι αν θέσουμε $f = 0$, και

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases},$$

τότε $d_1(f, g) = 0$. Παρατηρήστε ότι αν περιορίσουμε την d_1 στο $C([-1, 1])$, τότε, όπως έχουμε πει, είναι μετρική. $\square$