

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ II

9ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1. Στο $\mathbb{R}^N$ θεωρούμε τις μετρικές

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq k \leq N} |x(k) - y(k)|,$$

και

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^N |x(k) - y(k)|.$$

Έστω x_n μια ακολουθία στο $\mathbb{R}^N$ και $x \in \mathbb{R}^N$. Δείξτε ότι

$$x_n \xrightarrow{d_1} x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{d_\infty} x.$$

Λύση. Έχουμε δείξει ότι $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \leq N d_\infty(x, y)$ (άσκηση 2 του φυλλαδίου 8).

Αν $x_n \xrightarrow{d_1} x$ τότε $d_\infty(x_n, x) \leq d_1(x_n, x) \rightarrow 0$, άρα $x_n \xrightarrow{d_\infty} x$.

Αν $x_n \xrightarrow{d_\infty} x$ τότε $d_1(x_n, x) \leq N d_\infty(x_n, x) \rightarrow 0$, άρα $x_n \xrightarrow{d_1} x$. $\square$

Άσκηση 2. Στο $C([0, 1])$ (δηλαδή το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $[0, 1]$) θεωρούμε τις μετρικές

$$d_\infty(f, g) = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|,$$

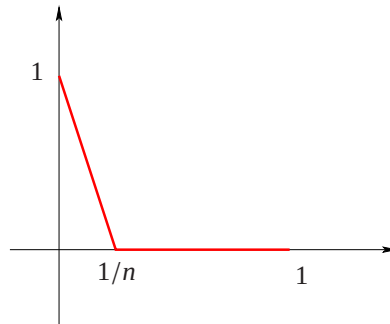
και

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt.$$

Βρείτε μια ακολουθία η οποία να συγκλίνει ως προς τη μία μετρική, αλλά να μην συγκλίνει ως προς την άλλη.

Λύση. Θέτουμε

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nt, & 0 \leq t \leq 1/n \\ 0, & 1/n \leq t \leq 1 \end{cases}.$$



Τότε

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \frac{1}{2n} \rightarrow 0,$$

άρα $f_n \xrightarrow{d_1} 0$. Αλλά η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην ασυνεχή συνάρτηση

$$h(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases},$$

επομένως δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε καμία συνάρτηση, άρα δεν συγκλίνει σε καμία συνάρτηση ως προς την d_∞ , αφού η σύγκλιση ως προς την d_∞ είναι ισοδύναμη με την ομοιόμορφη σύγκλιση.

Παρατηρήστε όμως ότι $d_1(f, g) \leq d_\infty(f, g)$, επομένως αν μια ακολουθία συγκλίνει ως προς την d_∞ τότε συγκλίνει και ως προς την d_1 . $\square$

Άσκηση 3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x \in X$. Δείξτε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(x, 1/n) = \{x\}$.

Λύση. Προφανώς $x \in D(x, 1/n)$ για κάθε n , άρα $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(x, 1/n)$. Αν τώρα $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} D(x, 1/n)$ τότε $y \in D(x, 1/n)$ για κάθε n , άρα

$$d(x, y) < 1/n \rightarrow 0,$$

συνεπώς $d(x, y) = 0$, επομένως $x = y$. Δηλαδή η τομή είναι ακριβώς το μονοσύνολο $\{x\}$. $\square$

Άσκηση 4. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και x_n μια ακολουθία στο X τέτοια ώστε $d(x_n, x_m) \geq 1$ για κάθε $n \neq m$. Δείξτε ότι η x_n δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Λύση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} \rightarrow x$ για κάποιο $x \in X$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $d(x_{k_n}, x) < 1/4$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως αν επιλέξουμε $n > m \geq n_0$ έχουμε

$$d(x_{k_n}, x_{k_m}) \leq d(x_{k_n}, x) + d(x_{k_m}, x) < 1/2,$$

άτοπο. $\square$

Άσκηση 5.

- (1) Βρείτε ένα φραγμένο μετρικό χώρο ο οποίος να περιέχει μια ακολουθία με την ιδιότητα της προηγούμενης άσκησης.
- (2) Βρείτε ένα μη φραγμένο μετρικό χώρο ο οποίος να περιέχει μια φραγμένη ακολουθία με την ιδιότητα της προηγούμενης άσκησης.

Λύση.

- (1) Στο $\mathbb{R}$ με τη διακριτή μετρική, η ακολουθία $x_n = n$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα.
- (2) Έστω

$$X = \{x : x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}, x(k) \in \mathbb{R}, \sup_k |x(k)| < \infty\}$$

το σύνολο όλων των φραγμένων ακολουθιών πραγματικών αριθμών, με μετρική

$$d_{\infty}(x, y) = \sup_k |x(k) - y(k)|.$$

Θέτουμε

$$e_n(k) = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}.$$

Τότε $e_n \in D(0, 2)$, για κάθε n (όπου 0, η ταυτοτικά ίση με μηδέν ακολουθία) άρα η e_n είναι φραγμένη. Επίσης $d_{\infty}(e_n, e_m) = 1$ για κάθε $n \neq m$.

Μην συγχέετε τις διαφορετικές σημασίες της έννοιας «ακολουθία» σε αυτή και άλλες παρόμοιες ασκήσεις που έχουν να κάνουν με σύνολα τα οποία αποτελούνται από ακολουθίες. Για κάθε n , το e_n σε στοιχείο του X είναι μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών (με τη συνηθισμένη έννοια). Η e_n σαν ακολουθία στοιχείων του X (δηλαδή σαν ακολουθία ακολουθιών) είναι φραγμένη ως προς τη μετρική d_{∞} . $\square$

Άσκηση 6. Έστω (X, d) μετρικός χώρος, $x_n, y_n, x, y \in X$ έτσι ώστε $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$. Δείξτε ότι

$$d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y).$$

Λύση. Έχουμε

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n),$$

άρα

$$d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Ομοίως

$$d(x, y) - d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, y).$$

Επομένως

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y) \rightarrow 0.$$

$\square$

Άσκηση 7. Έστω $\mathcal{A} = \{x : x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}}, x(k) \in \mathbb{R}\}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών πραγματικών αριθμών με μετρική

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|}.$$

(Άσκηση 6 του φυλλαδίου 8.) Δείξτε ότι μια ακολουθία x_n στοιχείων του $\mathcal{A}$ (δηλαδή, μια ακολουθία ακολουθιών) συγκλίνει ως προς την d σε κάποιο $x \in \mathcal{A}$ αν και μόνο αν $x_n(k) \rightarrow x(k)$ για κάθε k .

Λύση. Έστω ότι $x_n \rightarrow x$. Σταθεροποιούμε τυχόν k και επιλέγουμε n_0 έτσι ώστε $2^k d(x_n, x) < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Για τέτοια n έχουμε

$$\frac{1}{2^k} \frac{|x_n(k) - x(k)|}{1 + |x_n(k) - x(k)|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} = d(x_n, x).$$

Άρα

$$|x_n(k) - x(k)| \leq \frac{2^k d(x_n, x)}{1 - 2^k d(x_n, x)} \rightarrow 0, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $x_n(k) \rightarrow x(k)$ για κάθε k , και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε k_0 έτσι ώστε $\sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Αφού

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} = 0, \text{ υπάρχει } n_0 \text{ τέτοιο ώστε για κάθε } n \geq n_0 \text{ έχουμε } \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επομένως για όλα αυτά τα n παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} = \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_0} \frac{1}{2^j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα $x_n \rightarrow x$. Το $\mathcal{A}$ μπορεί να θεωρηθεί το απειροδιάστατο ανάλογο των Ευκλείδειων χώρων $\mathbb{R}^N$. Τα στοιχεία του $\mathbb{R}^N$ είναι διατεταγμένες N -άδες, ενώ τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ είναι ακολουθίες δηλαδή διατεταγμένες ∞ -άδες. Έτσι ένας εναλλακτικός συμβολισμός για το $\mathcal{A}$ θα μπορούσε να είναι $\mathbb{R}^{\infty}$. Η άσκηση αυτή λέει ότι μια ακολουθία στον χώρο αυτό συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως και στην περίπτωση των Ευκλείδειων χώρων. $\square$