ΣΕΙΡΕΣ ΟΡΩΝ ΜΕ ΑΥΘΑΙΡΕΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ - ΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ DIRICHLET

Στην παράγραφο αυτή δεν κάνουμε καμία υπόθεση σε ό,τι αφορά τα πρόσημα των όρων των σειρών τις οποίες εξετάζουμε. Κανένα από τα κριτήρια που έχουμε δει μέχρι τώρα (εκτός από το κριτήριο Cauchy) δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας σε τέτοιου είδους σειρές.

Ορισμός. *Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *λέμε ότι συγκλίνει απόλυτα, αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει.*

Θεώρημα. *Αν η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, από κριτήριο Cauchy υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m > n \geq n_0$ να ισχύει $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Επομένως $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Cauchy. □

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα διότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Άρα συγκλίνει.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος ΔΕΝ ισχύει. Για παράδειγμα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ δεν συγκλίνει απόλυτα διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Παρά ταύτα συγκλίνει. Πράγματι, έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Θα δείξουμε ότι οι υπακολουθίες s_{2n} και s_{2n+1} συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Παρατηρούμε ότι $s_{2n+2} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, άρα η s_{2n} είναι αύξουσα. Επίσης

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Δηλαδή η s_{2n} είναι αύξουσα και φραγμένη, επομένως συγκλίνει. Τώρα $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, άρα και η s_{2n+1} συγκλίνει στο ίδιο όριο. Συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

Ορισμός. *Μια σειρά η οποία συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα (όπως η προηγούμενη) λέμε ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.*

Η σύγκλιση μιας τέτοιας σειράς οφείλεται όχι μόνο στο απόλυτο μέγεθος των όρων της, αλλά και στις αλληλοαναιρέσεις που προκύπτουν από τη συνύπαρξη άπειρου πλήθους θετικών και άπειρου πλήθους αρνητικών όρων.

Θεώρημα (Κριτήριο Dirichlet). *Έστω* a_n, b_n *ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε:*

(1) *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *είναι φραγμένη.*

(2) *Η* b_n *είναι φθίνουσα και μηδενική.*

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αφού η s_n είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \searrow 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$0 \leq b_n \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε m, n με $m > n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_{k-1}) b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} s_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m} s_{k-1} b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} s_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} s_k b_{k+1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} s_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m-1} s_k b_{k+1} + s_m b_m - s_n b_{n+1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_m b_m - s_n b_{n+1}\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} |s_k| |b_k - b_{k+1}| + |s_m b_m| + |s_n b_{n+1}| \leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + 2M\varepsilon = (*)
\end{aligned}$$

αλλά η b_n είναι φθίνουσα, άρα

$$(*) = M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + 2M\varepsilon = M(b_{n+1} - b_m) + 2M\varepsilon \leq 3M\varepsilon.$$

Από κριτήριο Cauchy, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση. Το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι η b_n είναι φθίνουσα από κάποιο δείκτη και μετά.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε $p > 0$. Πράγματι η $\frac{1}{n^p}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ είναι φραγμένη. Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Dirichlet. Παρατηρήστε ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα μόνο για $p > 1$.