1. Εφαρμογες διπλων και τριπλων ολοκληρωματων

1.1. **Μέσες τιμές.** Έστω n αριθμοί $x_1, \ldots, x_n$, ο *μέσος όρος* τους ορίζεται ως

$$< x >= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Κατ΄ αναλογία ορίζουμε την μέση τιμή συνάρτησης στο διάστημα $[a, b]$:

$$< f >= \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Γιά συναρτήσεις δύο μεταβλητών έχουμε

$$< f >= \frac{\int\int_D f(x,y)dxdy}{\int\int_D dxdy}.$$

Αν έχουμε μάζες $m_1, \ldots, m_n$ στα σημεία $x_1, \ldots, x_n$ λέμε ότι το *κέντρο μάζας* είναι το

$$< x >= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}.$$

Αν τώρα υποθέσουμε μία συνεχή πυκνότητα μάζας $\rho(x)$, π.χ., έναν πλανήτη, τότε το κέντρο μάζας του είναι

$$< x >= \frac{\int x\rho(x)dx}{\int \rho(x)dx}.$$

Γιά συνεχή πυκνότητα μάζας $\rho(x, y)$ στο επίπεδο το κέντρο μάζας είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$< x >= \frac{\int x\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}, \quad < y >= \frac{\int y\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}.$$

Γιά συνεχή πυκνότητα μάζας $\rho(x, y, z)$ στον χώρο το κέντρο μάζας του είναι

$$< x >= \frac{\int x\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}, \quad < y >= \frac{\int y\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}, \quad < z >= \frac{\int z\rho(x,y,z)dxdydz}{\int \rho(x,y,z)dxdydz}.$$

1.2. **Δυναμικό βαρύτητας.** (Marsden, Tromba, σελ. 336, Παράδειγμα 7.)
Το δυναμικό βαρύτητας που δημιουργεί μία μάζας M που βρίσκεται σε σημείο (x, y, z) σε μάζα m που βρίσκεται σε σημείο (x_1, y_1, z_1) δίνεται από την σχέση

$$V(x_1, y_1, z_1) = \frac{GmM}{r}, \qquad r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}.$$

Αν υποθέσουμε μία ματανομή μάζας, π.χ., ένα αστέρι, τότε έχουμε

$$V(x_1, y_1, z_1) = Gm \int\int\int_{star} \frac{\rho(x,y,z)\, dxdydz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

όπου G είναι η σταθερά της βαρύτητας.

Παράδειγμα. Έστω ένας κούφιος πλανήτης, δηλ., μία σταθερή πυκνότητα μάζας ρ ανάμεσα σε δύο ομόκεντρες σφαίρες $r = r_1,\ r = r_2$. Θα υπολογίσουμε το δυναμικό βαρύτητας.

Λύση. Γράφουμε

$$V(x_1,y_1,z_1) = Gm\rho \int\int\int_{planet} \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Ας αγνοήσουμε την σταθερά $Gm\rho$ γιά απλοποίηση των τύπων.
Παρατηρούμε ότι το σώμα (πλανήτης) είναι συμμετρικο ώς προς οποιαδήποτε περιστροφή, άρα και το δυναμικό θα είναι συμμετρικό. Δηλαδή, γιά δεδομένη απόσταση $r = R$ από το κέντρο, όλα τα σημεία (x_1, y_1, z_1) είναι ισοδύναμα. Εκλέγουμε λοιπόν $x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = R$ και έχουμε

$$V(0,0,R) = \int\int\int_{planet} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-R)^2}}.$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

Οπότε $x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta$ και

$$\begin{aligned} V(0,0,R) &= \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2\sin\theta\, d\phi d\theta dr}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + (r\cos\theta - R)^2}} \\ &= 2\pi\int_{r_1}^{r_2} r^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}}\right) dr. \end{aligned}$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τον μετασχηματισμό $u = -2Rr\cos\theta$. Έχουμε

$$\frac{1}{2Rr}\int_{-2Rr}^{2Rr}(r^2+u+R^2)^{-1/2}du = \ldots = \frac{1}{Rr}\left\{\left[(r+R)^2\right]^{1/2} - \left[(r-R)^2\right]^{1/2}\right\} = \frac{1}{Rr}(r+R-|r-R|).$$

Αντικαθιστούμε και έχουμε

$$V(0,0,R) = \frac{2\pi}{R}\int_{r_1}^{r_2} r(r+R-|r-R|)dr.$$

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις

(α) $R \geq r_2$, δηλ., έξω από τον πλανήτη. Είναι $|r-R| = R-r$ και

$$V(0,0,R) = \frac{4\pi}{R}\int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{4\pi}{3R}(r_2^3 - r_1^3).$$

Αλλά $(4\pi/3)(r_2^3 - r_1^3)$ είναι ο όγκος του πλανήτη. Εισάγωντας στο αποτέλεσμα τον παράγοντα $Gm\rho$ (τον οποίο είχαμε παραλείψει) βρίσκουμε δυναμικό $V = GmM/R$, δηλ., το δύναμικό ως εάν η μάζα να ήταν συγκεντωμένη στο κέντρο του πλανήτη.

(β) Αν $R \leq r_1$, δηλ., μέσα στο κοίλωμα. Είναι $|r-R| = r-R$ και

$$V(0,0,R) = \frac{2\pi}{R}\int_{r_1}^{r_2} r dr = 2\pi(r_2^2 - r_1^2).$$

Εισάγωντας στο αποτέλεσμα τον παράγοντα $Gm\rho$ έχουμε τελικά

$$V(0,0,R) = 2\pi\, Gm\rho(r_2^2 - r_1^2).$$

Το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του R και άρα το δυναμικό είναι σταθερό μέσα στο κοίλωμα. Η δύναμη της βαρύτητας είναι

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} V,$$

ώστε βρίσκουμε $\boldsymbol{F} = 0$, δηλαδή μηδενική δύναμη, μέσα στο κοίλωμα.

(γ) Αν $r_1 < R < r_2$, δηλ., μέσα στον πλανήτη. Είναι $r < R \Rightarrow |r - R| = R - r$ και $r > R \Rightarrow |r - R| = r - R$. Ώστε

$$\begin{aligned} V(0,0,R) &= \frac{2\pi}{R}\int_{r_1}^{R} r(r + R - |r - R|)dr + \frac{2\pi}{R}\int_{R}^{r_2} r(r + R - |r - R|)dr \\ &= \frac{4\pi}{R}\int_{r_1}^{R} r^2 dr + \frac{2\pi}{R}\int_{R}^{r_2} r dr = \frac{4\pi}{3R}(R^3 - r_1^3) + 2\pi(r_2^2 - R^2). \end{aligned}$$

Γιά να πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα πρέπει να εισάγουμε τον παράγοντα $Gm\rho$ στον παραπάνω τύπο.

Άσκηση. Σχεδιάστε την γραφική παράσταση του δυναμικού.

1.3. **Χημικό δυναμικό ενός κβαντικού αερίου.** Αέρια που προέρχονται από ατμούς αλκαλικών μετάλων (π.χ., Li, Na, K, Rb, Cs) μπορούν να ψυχθούν σε πολύ χαμηλές θερμοκρασίες ($T \sim 1\text{nK}$) αφού πρώτα παγιδευτούν με laser και άλλες μεθόδους σε μαγνητικές παγίδες. Τα μαγνητικά δυναμικά μπορεί να είναι κυλινδρικά συμμετρικά της μορφής

$$V = \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 z^2),$$

όπου (ρ, z) είναι κυλινδρικές συντεταγμένες και β είναι σταθερά που δείχνει πόσο επιμηκυσμένη προς την z διεύθυνση είναι η παγίδα.
Από την κβαντική φυσική ξέρουμε ότι (σε προσέγγιση) η πυκνότητα των ατόμων του αερίου δίνεται από την

$$n(\rho, z) = \begin{cases} [\mu - V(\rho, z)]/g, & V(\rho, z) < \mu \\ 0, & V(\rho, z) \geq \mu, \end{cases}$$

όπου μ είναι μία σταθερά την οποία εισάγει σε αυτό το σημείο η θεωρία. Το μ λέγεται *χημικό δυναμικό* και δίνει ένα μέτρο της μέσης ενέργειας των ατόμων. Το g είναι μία επιπλέον σταθερά την οποία θα θεωρήσουμε $g = 1$ στην συνέχεια. Σύμφωνα με την κβαντική θεωρία το πλήθος των ατόμων N είναι ίσο με το ολοκλήρωμα

$$N = \int n\, dV$$

όπου η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλο τον χώρο. Εάν είναι γνωστός ο αριθμός των ατόμων N το ερώτημα που τίθεται είναι να υπολογίσουμε το χημικό δυναμικό μ γιά ένα τέτοιο σύστημα.

Θα υπολογίσουμε πρώτα τον αριθμό των ατόμων N σαν συνάρτηση των παραμέτρων:

$$N = \int\int\int \left[\mu - \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 z^2)\right] \rho d\rho d\phi dz.$$

Έχουμε $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ενώ το ϕ δεν εμφανίζεται στην ολοκληρωταία ποσότητα ούτε στα όρια ολοκλήρωσης. Άρα

$$N = 2\pi \int\int \left[\mu - \frac{1}{2}(\rho^2 + \beta^2 z^2)\right] \rho d\rho dz.$$

Το χωρίο ολοκλήρωσης (όπου $n \neq 0$) στο επίπεδο (ρ, z) είναι μία έλλειψη. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\zeta = \beta z$, ώστε

$$N = \frac{\pi}{\beta} \int \int \left[2\mu - (\rho^2 + \zeta^2)\right] \, \rho d\rho d\zeta.$$

Γιά να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης παρατηρούμε ότι γιά $\rho = 0 \Rightarrow -\sqrt{2\mu} \leq \zeta \leq \sqrt{2\mu}$, ενώ γιά τυχόν ζ έχουμε $0 \leq \rho \leq \sqrt{2\mu - \zeta^2}$ (θυμηθείτε ότι $\rho \geq 0$ στις κυλινδρικές συντεταγμένες). Άρα έχουμε

$$N = \frac{\pi}{\beta} \int_{-\sqrt{2\mu}}^{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\sqrt{2\mu-\zeta^2}} \left[2\mu - (\rho^2 + \zeta^2)\right] \, \rho d\rho \, d\zeta.$$

Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η ολοκληρωταία ποσότητα είναι άρτια ως προς ζ και έχουμε τελικά

$$N = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} \int_0^{\sqrt{2\mu-\zeta^2}} \left[2\mu - (\rho^2 + \zeta^2)\right] \, \rho d\rho \, d\zeta.$$

Ορίζουμε τώρα $\eta = \rho^2$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
N &= \frac{\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} \int_{\eta=0}^{2\mu-\zeta^2} [2\mu - \eta - \zeta^2] \, d\eta \, d\zeta \\
&= \frac{\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} \left[2\mu\eta - \frac{\eta^2}{2} - \zeta^2\eta\right]_{\eta=0}^{2\mu-\zeta^2} d\zeta = \frac{\pi}{\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} (2\mu - \zeta^2) \left[2\mu - \frac{2\mu - \zeta^2}{2} - \zeta^2\right] d\zeta \\
&= \frac{\pi}{2\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} (2\mu - \zeta^2)^2 \, d\zeta = \frac{\pi}{2\beta} \int_0^{\sqrt{2\mu}} (4\mu^2 - 4\mu\zeta^2 + \zeta^4) \, d\zeta = \frac{\pi}{2\beta} \left[4\mu^2\zeta - 4\mu\frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2\mu}} \\
&= \frac{\pi}{2\beta} \sqrt{2\mu} \, \mu^2 \left[4 - \frac{8}{3} + \frac{4}{5}\right] = \frac{\pi}{\beta} \sqrt{2\mu} \, \mu^2 \, \frac{16}{15} = \frac{4\pi}{15\beta} (2\mu)^{5/2}.
\end{aligned}$$

Θεωρώντας τώρα ότι τα β και N είναι γνωστά, λύνουμε την παραπάνω ως προς μ και βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα:

$$(2\mu)^{5/2} = \frac{15\beta N}{4\pi} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} \left(\frac{15\beta N}{4\pi}\right)^{5/2}.$$