1. Συστηματα συντεταγμενων

Παράδειγμα 1. Βρείτε το σύνολα που ορίζουν οι ακόλουθες σχέσεις:
(α) Πολικές συντεταγμένες (1) $\phi = a$ (2) $\rho = \phi$
(β) Κυλινδρικές συντεταγμένες (1) $z = a$ (2) $\rho = a$ (3) $\rho = a$ και $z = \phi$
(γ) Σφαιρικές συντεταγμένες (1) $\theta = a$ (2) $\phi = a$ (3) $r = a$ (4) $r = \theta = a$ (5) $r = \theta = \phi$

Λύση:
Χρησιμοποιούμε τις

$$x = \rho \sin\theta \cos\phi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\phi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

(α)
(1) Ημιευθεία (2) Σπείρα
(β)
(1) Επίπεδο (2) Κύλινδρος (3) Έλικας
(γ)
(1) Κώνος (2) Ημιεπίπεδο (3) Σφαίρα (4) Κύκλος με ακτίνα $a \sin\theta$ (5) Μία γραμμή που αρχίζει από $r = 0$ και τελειώνει στο σημείο $r = \theta = \phi = \pi \Rightarrow x = y = 0, z = -\pi$

Παράδειγμα 2. Περιγράψτε την γεωμετρική σημασία των παρακάτω απεικονίσεων:
(α) Κυλινδρικές συντεταγμένες (1) $(\rho, \phi, z) \to (\rho, \phi + \pi, -z)$.
(β) Σφαιρικές συντεταγμένες (1) $(r, \phi, \theta) \to (r, \phi + \pi, \theta)$ (2) $(r, \phi, \theta) \to (r, \phi, \pi - \theta)$.

Λύση:
(α) Χρησιμοποιούμε τις

$$x = \rho \cos\phi, \quad y = \rho \sin\phi, \quad z.$$

(1) Έχουμε $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$.

(β) Χρησιμοποιούμε τις

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r \cos\theta.$$

(1)Έχουμε $\sin\phi \to \sin(\phi + \pi) = -\sin\phi,\ \cos\phi \to \cos(\phi + \pi) = -\cos\phi \Rightarrow$
$(x, y, z) \to (-x, -y, z)$.
(2) $\sin\theta \to \sin(\pi - \theta) = \sin\theta,\ \cos\theta \to \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \Rightarrow$
$(x, y, z) \to (x, y, -z)$.
